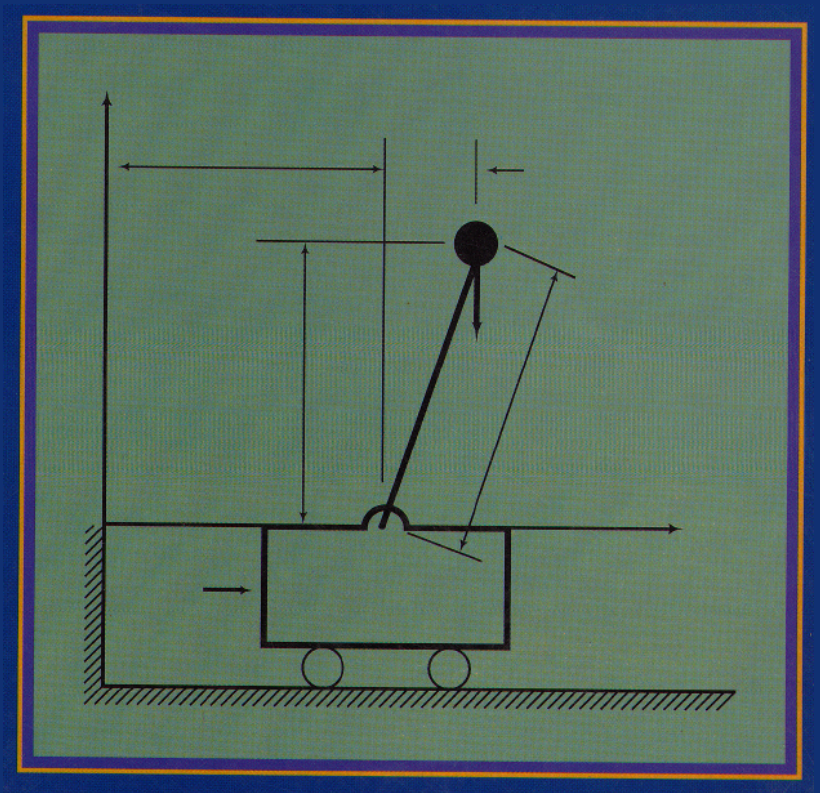
Ingeniería de Control Moderna

TERCERA EDICIÓN



PEARSON
PRENTICE HALL

KATSUHIKO OGATA

Pares de transformada de Laplace

	$f(t)$	$F(s)$
1	Impulso unitario $\delta(t)$	1
2	Escalón unitario l(t)	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{1}{s^n}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
7	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
8	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
9	$\frac{1}{ab}\left[1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt})\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
10	sen ωt	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
11	cos ωt	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
12	e^{-at} sen ωt	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
13	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
14	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen} \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\, t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
15	$-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\, t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
16	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\, t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$

Propiedades de la transformada de Laplace

1	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0\pm)$
2	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0\pm) - \dot{f}(0\pm)$
3	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}\,{}^{(k-1)}f(0\pm)$ donde ${}^{(k-1)}f(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}f(t)$
4	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\left[\int f(t)\,dt\right]_{t=0\pm}$
5	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s}$
6	$\int_0^\infty f(t)\,dt = \lim_{s\to 0} F(s)$ si $\int_0^\infty f(t)\,dt$ existe
7	$\mathcal{L}\,[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$
8	$\mathcal{L}\,[f(t-a)1(t-a)] = e^{-as}F(s) \qquad a \geq 0$
9	$\mathcal{L}\,[tf(t)] = \frac{dF(s)}{ds}$
10	$\mathcal{L}\,[t^2f(t)] = \frac{d^2}{ds^2}F(s)$
11	$\mathcal{L}\,[t^nf(t)] = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$
12	$\mathcal{L}\left[\frac{1}{t}f(t)\right] = \int_s^\infty F(s)\,ds$ si $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}f(t)$ existe
13	$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(as)$
14	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau\right] = F_1(s)F_2(s)$
15	$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)G(s-p)\,dp$

Ingeniería de control moderna

Ingeniería de control moderna

Tercera edición

Katsuhiko Ogata

University of Minnesota

TRADUCCIÓN:

Miguel Ángel Martínez Sarmiento
Traductor profesional

REVISIÓN TÉCNICA:

Ing. Francisco José Rodríguez Ramírez
Ingeniero Mecánico Electricista
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México

MÉXICO . ARGENTINA . BRASIL . COLOMBIA . COSTA RICA . CHILE
ESPAÑA . GUATEMALA . PERÚ . PUERTO RICO . VENEZUELA

EDICIÓN EN ESPAÑOL:

SUPERVISOR DE TRADUCCIÓN: CARLOS TALANCÓN ESPINOSA
SUPERVISOR DE PRODUCCIÓN: MAGDIEL GÓMEZ MARINA

EDICIÓN EN INGLÉS:

Publisher: Tom Robbins
Associate editor: Alice Dworkin
Production editor: Ann Marie Longobardo
Cover Designer: Bruce Kenselaar
Manufacturing Buyer: Donna Sullivan

OGATA: INGENIERÍA DE CONTROL MODERNA, 3a. Ed.

Traducido del inglés de la obra: **MODERN CONTROL ENGINEERING, Third Edition**

Al1 rights reserved. Authorized translation from English language edition published by Prentice-Hall, Inc. A Simon & Schuster Company.

Todos los derechos reservados. Traducción autorizada de la edición en inglés publicada por Prentice-Hall, Inc. A Simon & Schuster Company.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage and retrieval system, without permission in writing from the publisher.

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o método sin autorización por escrito del editor.

Derechos reservados © 1998 respecto a la tercera edición en español publicada por:
PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA, S.A.
Calle 4 No. 25 - 2" piso, Fracc. Industrial Alce Blanco
53370 Naucalpan de Juárez, Edo. de México

ISBN 970-17-0048-1

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1524.

Original English Language Edition Published by Prentice-Hall, Inc.
A Simon & Schuster Company
Copyright © MCMXCVII
Al1 rights reserved
ISBN 0-13-227307-1

IMPRESO EN MÉXICO / PRINTED IN MEXICO

ABR

PROGRAMAS EDUCATIVOS, S. A. DE C.V.
CALZ. CHABACANO No. 65, LOCAL A
COL. ASTURIAS, DELEG. CUAUHTEMOC,
C.P. 06850, MÉXICO, D.F.

EMPRESA CERTIFICADA POR EL
INSTITUTO MEXICANO DE NORMALIZACIÓN
Y CERTIFICACIÓN A.C., SAJO LA NORMA
ISO-9002: 1994/NMX-CC-004:1995
CON EL No. DE REGISTRO RSC-048

2000

Contenido

Prefacio xiii

Capitulo 1 Introducción a los sistemas de control 1

l-l Introducción 1
1-2 Ejemplos de sistemas de control 3
1-3 Control en lazo cerrado en comparación con el control en lazo abierto 6
1-4 Diseño de los sistemas de control 8
1-5 Panorama del libro 9
Ejemplo de problemas y soluciones 10
Problemas ll

Capítulo 2 La transformada de Laplace 13

2-1 Introducción 13
2-2 Panorama de las variables complejas y las funciones complejas 14
2-3 Transformada de Laplace 17
2-4 Teoremas de la transformada de Laplace 27
2-5 Transformada inversa de Laplace 35
2-6 Expansión en fracciones parciales con MATLAB 41

2-7 Solución de ecuaciones diferenciales lineales e invariantes con el tiempo 44
Ejemplo de problemas y soluciones 46
Problemas 55

Capítulo 3 Modelo matemático de sistemas lineales 57

3-1 Introducción 57
3-2 Función de transferencia y de respuesta impulso 60
3-3 Diagramas de bloque 63
3-4 Modelado en el espacio de estados 70
3-5 Representación en el espacio de estados de sistemas dinámicos 76
3-6 Sistemas mecánicos 81
3-7 Sistemas eléctricos 87
3-8 Sistema del nivel de líquido 92
3-9 Sistemas térmicos 96
3-10 Linealización de modelos matemáticos no lineales 100
Ejemplo de problemas y soluciones 105
Problemas 129

Capítulo 4 Análisis de la respuesta transitoria **134**

4-1 Introducción 134
4-2 Sistemas de primer orden 136
4-3 Sistemas de segundo orden 141
4-4 Análisis de respuesta transitoria con MATLAB 160
4-5 Un problema de ejemplo resuelto con MATLAB 178
Ejemplo de problemas y soluciones 187
Problemas 207

Capítulo 5 Acciones básicas de control y respuesta de sistemas de control **211**

5-1 Introducción 211
5-2 Acciones básicas de control 212
5-3 Efectos de las aciones de control integral y derivativa sobre el desempeño de un sistema 219
5-4 Sistemas de orden superior 228
5-5 Criterio de estabilidad de Routh 232
5-6 Controladores neumáticos 238
5-7 Controladores hidráulicos 255
5-8 Controladores electrónicos 262

5-9 Adelanto de fase y atraso de fase en una respuesta senoidal 269
5-10 Errores en estado estable en los sistemas de control de realimentación unitaria 274
Ejemplo de problemas y soluciones 282
Problemas 309

Capítulo 6 Análisis del lugar geométrico de las raíces 317

6-1 Introducción 317
6-2 Gráficas del lugar geométrico de las raíces 319
6-3 Resumen de las reglas generales para construir los lugares geométricos de las raíces 330
6-4 Gráficas del lugar geométrico de las raíces con MATLAB 338
6-5 Casos especiales 348
6-6 Análisis de sistemas de control mediante el lugar geométrico de las raíces 357
6-7 Lugares geométricos de las raíces para sistemas con retardo de transporte 360
6-8 Gráficas de contornos de las raíces 364
Ejemplo de problemas y soluciones 368
Problemas 400

Capítulo 7 Diseño de sistemas de control mediante el método del lugar geométrico de las raíces 404

7-1 Introducción 404
7-2 Consideraciones preliminares de diseño 407
7-3 Compensación de adelanto 409
7-4 Compensación de atraso 418
7-5 Compensación de atraso-adelanto 427
Ejemplo de problemas y soluciones 439
Problemas 467

Capítulo 8 Análisis de la respuesta en frecuencia 471

8-1 Introducción 471
8-2 Trazas de Bode 473
8-3 Graficación de trazas de Bode con MATLAB 492
8-4 Trazas polares 504
8-5 Obtención de trazas de Nyquist con MATLAB 512
8-6 Trazas de magnitud logarítmica contra la fase 519

8-7 Criterio de estabilidad de Nyquist 521
8-8 Análisis de estabilidad 532
8-9 Estabilidad relativa 542
8-10 Respuesta en frecuencia en lazo cerrado 556
8-11 Determinación experimental de funciones de transferencia 567
Ejemplo de problemas y soluciones 573
Problemas 605

Capitulo 9 Diseño de sistemas de control mediante la respuesta en frecuencia 609

9-1 Introducción 609
9-2 Compensación de adelanto 612
9-3 Compensación de atraso 621
9-4 Compensación de atraso-adelanto 630
9-5 Comentarios finales 636
Ejemplo de problemas y soluciones 639
Problemas 667

Capítulo 10 Controles PID e introducción al control robusto 669

10-1 Introducción 669
10-2 Reglas de sintonización para controladores PID 670
10-3 Modificaciones de los esquemas de control PID 679
10-4 Control de dos grados de libertad 683
10-5 Consideraciones de diseño para el control robusto 685
Ejemplo de problemas y soluciones 690
Problemas 703

Capítulo ll Análisis de sistemas de control en el espacio de estados 710

ll-l Introducción 710
11-2 Representaciones en el espacio de estados de los sistemas basados en la función de transferencia 711
ll-3 Transformación de modelos de sistemas con MATLAB 718
ll-4 Solución de la ecuación de estado lineal e invariante con el tiempo 722
ll-5 Algunos resultados útiles en el análisis matricial 729
ll-6 Controlabilidad 737
ll-7 Observabilidad 743
Ejemplo de problemas y soluciones 749
Problemas 783

Capítulo 12 Diseño de sistemas de control en el espacio de estados 786

12-1 Introducción 786
12-2 Ubicación de polos 787
12-3 Solución de problemas de ubicación de polos con MATLAB 798
12-4 Diseño de sistemas del tipo regulador mediante la ubicación de polos 803
12-5 Observadores de estado 813
12-6 Diseño de observadores de estado con MATLAB 837
12-7 Diseño de sistemas de seguimiento 843
12-8 Ejemplo del diseño de un sistema de control con MATLAB 852
Ejemplo de problemas y soluciones 864
Problemas 893

Capítulo 13 Análisis de estabilidad de Liapunov y control óptimo cuadrático 896

13-1 Introducción 896
13-2 Análisis de estabilidad de Liapunov 897
13-3 Análisis de la estabilidad de Liapunov de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo 907
13-4 Sistemas de control con modelo de referencia 912
13-5 Control óptimo cuadrático 915
13-6 Solución de problemas de control óptimo cuadrático con MATLAB 925
Ejemplo de problemas y soluciones 935
Problemas 958

Apéndice Antecedentes necesarios para el uso efectivo de MATLAB 960

A-l Introducción 960
A-2 Graficación de curvas de respuesta 965
A-3 Cálculo de funciones matriciales 967
A-4 Modelos matemáticos de sistemas lineales 977

Bibliografía 983

Índice 987

Prefacio

Este libro se escribió para estudiantes del ultimo grado de licenciatura en ingeniería, con la intención de que se use como texto para un primer curso de sistemas de control. Presenta un tratamiento completo del análisis y el diseño de sistemas de control en tiempo continuo. Supone que el lector ha tomado cursos introductorios de ecuaciones diferenciales, análisis vectorial y matricial, análisis de circuitos y mecánica.

En esta tercera edición se integra MATLAB® al texto. Todos los problemas de cálculo se resuelven con MATLAB. Asimismo, se han mejorado los aspectos de diseño, y se han agregado nuevos temas, ejemplos y problemas.

El texto está dividido en 13 capítulos y un apéndice. Su contenido a grandes rasgos es el siguiente: el capítulo 1 presenta el material introductorio sobre sistemas de control. El capítulo 2 ofrece la transformada de Laplace para funciones del tiempo y los teoremas básicos de la transformada de Laplace que suelen encontrarse. (Si los estudiantes tienen un conocimiento adecuado acerca de la transformada de Laplace, este capítulo puede pasarse por alto.) El capítulo 3 trata el modelado matemático de los sistemas dinámicos y desarrolla modelos mediante la función de transferencia' y el espacio de estados. El capítulo 4 proporciona el análisis de respuesta transitoria de los sistemas de primer y segundo órdenes. Este capítulo incluye un análisis de cálculo de la respuesta transitoria mediante el uso de MATLAB. El capítulo 5 presenta las acciones básicas de control de los controladores industriales automáticos y analiza los de tipo neumático, hidráulico y electrónico. Este capítulo estudia también la respuesta de los sistemas de orden superior y el criterio de estabilidad de Routh.

El capítulo 6 aborda el análisis mediante el lugar geométrico de las raíces. En él se presenta el enfoque de MATLAB para graficar los lugares geométricos de las raíces. El capítulo 7 presenta el diseño de compensadores de avance, atraso y avance-atraso mediante el método del lugar geométrico de las raíces. El capítulo 8 se enfrenta con el análisis de la respuesta en frecuencia de los sistemas de control. Analiza las trazas de Bode, las trazas polares, el criterio de estabilidad de Nyquist y la respuesta en frecuencia en lazo cerrado, que

incluye el enfoque de MATLAB para obtener gráficas de la respuesta en frecuencia. El capítulo 9 cubre las técnicas de diseño y compensación mediante métodos de la respuesta en frecuencia. Específicamente, en este capítulo se analiza el enfoque de las trazas de Bode para el diseño de compensadores de adelanto, atraso y adelanto-atraso. El capítulo 10 aborda los controles PID básicos y modificados. Proporciona un análisis de los controles de dos grados de libertad y consideraciones de diseño para el control robusto.

El capítulo ll presenta un análisis básico de los sistemas de control en el espacio de estados. En él se ofrecen conceptos de controlabilidad y observabilidad. El capítulo incluye la transformación de los modelos de sistemas (de la función de transferencia al espacio de estados y viceversa) mediante el uso de MATLAB. El capítulo 12 trata el diseño de los sistemas de control en el espacio de estados. Este capítulo empieza con los problemas de diseño en la ubicación de polos y el diseño de observadores de estados. Se presenta el diseño de un sistema de seguimiento de tipo 1 con base en el enfoque de ubicación de polos, que incluye una solución con MATLAB. El capítulo 13 empieza con el análisis de estabilidad de Liapunov, seguido por el diseño de un sistema de control con modelo de referencia, en el que primero se formulan las condiciones para la estabilidad de Liapunov y después se diseña el sistema dentro de estas limitaciones. A continuación, se tratan los problemas de control cuadrático óptimo. Aquí se usa la ecuación de estabilidad de Liapunov para llegar a la teoría de control cuadrático óptimo. También se presenta una solución de MATLAB para el problema del control cuadrático óptimo.

Este libro no supone un conocimiento previo de MATLAB. Si el lector todavía no conoce MATLAB, se le recomienda que primero lea el apéndice y después estudie MATLAB tal como se presenta en el texto.

En todo el libro se ha tenido el cuidado de resaltar los conceptos básicos implícitos y de evitar los argumentos extremadamente matemáticos al momento de presentar el material. Se ofrecen comprobaciones matemáticas cuando contribuyen a la comprensión de los temas presentados. Todo el material se ha organizado en función de un desarrollo gradual de la teoría de control.

Los ejemplos aparecen en puntos estratégicos en todo el libro para que el lector obtenga una mejor comprensión de la materia que se analiza. Además, se ofrecen varios problemas resueltos (problemas A) al final de cada capítulo. Estos problemas constituyen una parte integral del texto. Se sugiere al lector que estudie con cuidado todos estos problemas para obtener una comprensión más profunda de los temas analizados. Además, se proporcionan muchos problemas sin resolver (problemas B), para que el alumno resuelva en casa como parte de un examen.

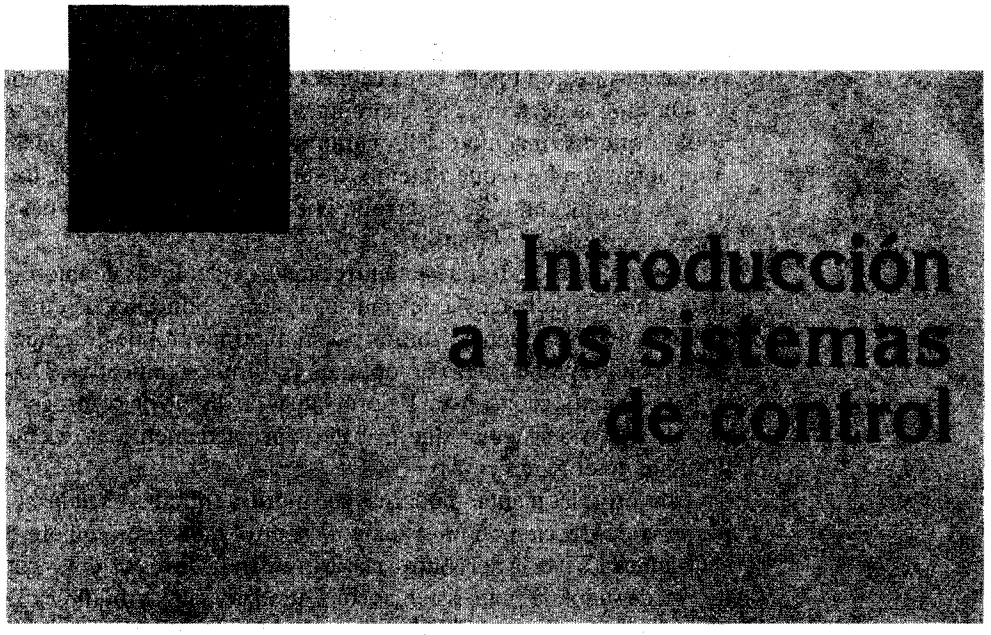
Gran parte del material presentado en este libro se ha probado en las clases de sistemas de control de los últimos años de licenciatura y los primeros de maestría en la Universidad de Minnesota.

Si el libro se usa como texto para un curso trimestral de cuatro horas semanales (40 horas de clase) o un curso semestral de tres horas semanales (42 horas de clase), puede cubrirse gran parte del material de los primeros diez capítulos. (Estas secciones cubren todo el material básico que se requiere por lo general en un curso inicial sobre sistemas de control.) Si el libro se usa como texto para un curso semestral de cuatro horas semanales (52 horas de clase), es posible cubrir gran parte de su contenido con flexibilidad, omitiendo ciertos temas. En un curso secuencial de dos trimestres (60 horas de clase o más) es posible cubrir todo el libro. El texto también sirve para aquellos ingenieros practicantes que desean estudiar por su cuenta el material básico de la teoría de control.

Quiero expresar mi sincero agradecimiento al profesor Suhada Jayasuriya, de la Universidad de Texas A & M, quien revisó el manuscrito final y aportó muchos comentarios

constructivos.También debo reconocer el entusiasmo de Linda Ratts Engelman en la publicación de la tercera edición; a los revisores anónimos, que hicieron valiosas sugerencias en las etapas iniciales del proceso de revisión; y a mis alumnos, quienes resolvieron muchos de los problemas de tipo A y B incluidos en este libro.

Katsuhiko Ogata



Introducción a los sistemas de control

1-1 INTRODUCCIÓN

El control automático ha desempeñado una función vital en el avance de la ingenierfa y la ciencia. Ademas de su extrema importancia en los sistemas de vehículos espaciales, de guiado de misiles, robóticos y similares; el control automático se ha vuelto una parte importante e integral de los procesos modernos industriales y de manufactura. Por ejemplo, el control automático es esencial en el control numérico de las máquinas-herramienta de las industrias de manufactura, en el diseño de sistemas de pilotos automáticos en la industria aeroespacial, y en el diseño de automóviles y camiones en la industria automotriz. También es esencial en las operaciones industriales como el control de presión, temperatura, humedad, viscosidad y flujo en las industrias de proceso.

Debido a que los avances en la teoría y la práctica del control automático aportan los medios para obtener un desempeño óptimo de lossistemas dinámicos, mejorar la productividad, aligerar la carga de muchas operaciones manuales repetitivas y rutinarias, así como de otras actividades, casi todos los ingenieros y científicos deben tener un buen conocimiento de este campo.

Panorama histórico. El primer trabajo significativo en control automático fue el regulador de velocidad centrífugo de James Watt para el control de la velocidad de una máquina de vapor, en el siglo XVIII. Minorsky, Hazen y Nyquist, entre muchos otros, aportaron trabajos importantes en las etapas iniciales del desarrollo de la teoría de control. En 1922, Minorsky trabajó en los controladores automáticos para dirigir embarcaciones, y mostr6 que la estabilidad puede determinarse a partir de las ecuaciones diferenciales que describen el sistema. En 1932, Nyquist diseñó un procedimiento relativamente simple para determinar la estabilidad de sistemas en lazo cerrado, con base en la respuesta en lazo abierto en estado

estable cuando la entrada aplicada es una senoidal. En 1934, Hazen, quien introdujo el término servomecanismos para los sistemas de control de posición, analizó el diseño de los servomecanismos con relevadores, capaces de seguir con precisión una entrada cambiante.

Durante la década de los cuarenta, los métodos de la respuesta en frecuencia hicieron posible que los ‘ingenieros diseñaran sistemas de control lineales en lazo cerrado que cumplieran con los requerimientos de desempeño. A finales de los años cuarenta y principios de los cincuenta, ‘se desarrolló por completo el método del lugar geométrico de las raíces propuesto por Evans.

Los métodos de respuesta en frecuencia y del lugar geométrico de las raíces, que forman el núcleo de la teoría de control clásica, conducen a sistemas estables que satisfacen un conjunto más o menos arbitrario de requerimientos de desempeño. En general, estos sistemas son aceptables pero no óptimos en forma significativa. Desde el final de la década de los cincuenta, el énfasis en los problemas de diseño de control se ha movido del diseño de uno de muchos sistemas que trabajen apropiadamente al diseño de un sistema óptimo de algún modo significativo.

Conforme las plantas modernas con muchas entradas y salidas se vuelven más y más complejas, la descripción de un sistema de control moderno requiere de una gran cantidad de ecuaciones. La teoría del control clásica, que trata de los sistemas con una entrada y una salida, pierde su solidez ante sistemas con entradas y salidas múltiples Desde alrededor de 1960, debido a que la disponibilidad de las computadoras digitales hizo posible el análisis en el dominio del tiempo de sistemas complejos, la teoría de control moderna, basada en el análisis en el dominio del tiempo y la síntesis a partir de variables de estados, se ha desarrollado para enfrentar la creciente complejidad de las plantas modernas y los requerimientos limitativos respecto de la precisión, el peso y el costo en aplicaciones militares, espaciales e industriales.

Durante los años comprendidos entre 1960 y 1980,se investigaron a fondo el control óptimo tanto de sistemas determinfsticos como estocásticos, y el control adaptable, mediante el aprendizaje de sistemas complejos. De 1980 a la fecha, los descubrimientos en la teoría de control moderna se centraron en el control robusto, el control de H_∞ y temas asociados.

Ahora que las computadoras digitales se han vuelto más baratas y más compactas, se usan como parte integral de los sistemas de control. Las aplicaciones recientes de la teoría de control moderna incluyen sistemas ajenos a la ingeniería, como los biológicos, biomédicos, económicos y socioeconómicos.

Definiciones. Antes de analizar los sistemas de control, deben definirse ciertos términos básicos.

Variable controlada y variable manipulada La variable ***controlada es*** la cantidad o condición que se mide y controla. La variable ***manipulada*** es la cantidad o condición que el controlador modifica para afectar el valor de la variable controlada. Por lo común, la variable controlada es la salida (el resultado) del sistema. ***Controlar*** significa medir el valor de la variable controlada del sistema y aplicar la variable manipulada al sistema para corregir o limitar una desviación del valor medido a partir de un valor deseado.

En el estudio de la ingenierfa de control, necesitamos definir términos adicionales que resultan necesarios para describir los sistemas de control.‘

Plantas. Una planta puede ser una parte de un equipo, tal vez un conjunto de las partes de una máquina que funcionan juntas, el propósito de la cual es ejecutar una operación particular. En este libro, llamaremos planta a cualquier objeto físico que se va a controlar (tal como un dispositivo mecánico, un horno de calefacción, un reactor químico o una nave espacial).

Procesos. El ***Diccionario Merriam-Webster*** define un proceso como una operación o un desarrollo natural progresivamente continuo, marcado por una serie de cambios graduales que se suceden uno al otro en una forma relativamente fija y que conducen a un resultado o propósito determinados; o una operación artificial o voluntaria progresiva que consiste en una serie de acciones o movimientos controlados, sistemáticamente dirigidos hacia un resultado o propósito determinados. En este libro llamaremos ***proceso*** a cualquier operación que se va a controlar. Algunos ejemplos son los procesos químicos, económicos y biológicos.

Sistemas. Un sistema es una combinación de componentes que actúan juntos y realizan un objetivo determinado. Un sistema no necesariamente es físico. El concepto de sistema se aplica a fenómenos abstractos y dinámicos, tales como los que se encuentran en la economía. Por tanto, la palabra sistema debe interpretarse como una implicación de sistemas físicos, biológicos, económicos y similares.

Perturbaciones. Una perturbación es una señal que tiende a afectar negativamente el valor de la salida de un sistema. Si la perturbación se genera dentro del sistema se denomina ***interna,*** en tanto que una perturbación ***externa*** se produce fuera del sistema y es una entrada.

Control realimentado. El control realimentado se refiere a una operación que, en presencia de perturbaciones, tiende a reducir la diferencia entre la salida de un sistema y alguna entrada de referencia y lo continúa haciendo con base en esta diferencia. Aquí sólo se especifican con este término las perturbaciones impredecibles, dado que las perturbaciones predecibles o conocidas siempre pueden compensarse dentro del sistema.

1-2 EJEMPLOS DE SISTEMAS DE CONTROL

En esta sección presentaremos varios ejemplos de sistemas de control.

Sistema de control de velocidad. El principio básico del regulador de velocidad de Watt para una máquina se ilustra en el diagrama esquemático de la figura l-l. La cantidad

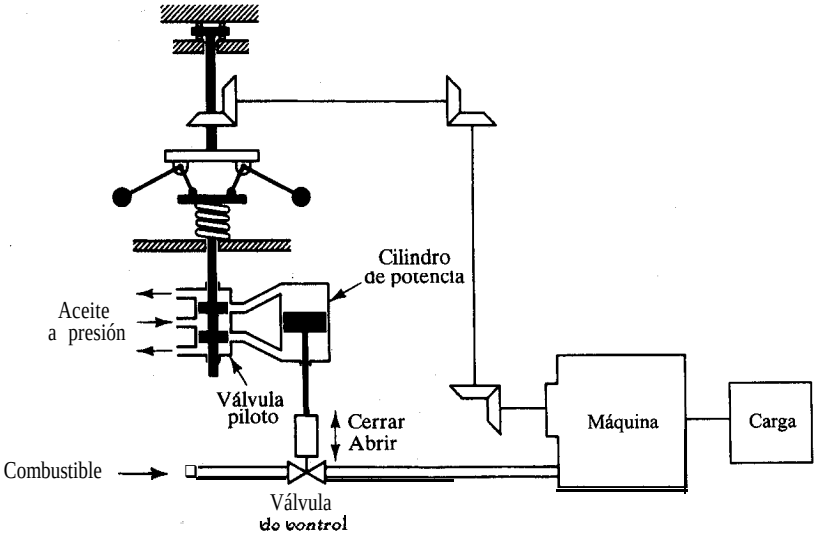


Figura 1–1
Sistema de control de velocidad.

de combustible que se admite para la máquina se ajusta de acuerdo con la diferencia entre la velocidad de la máquina que se pretende y la velocidad real.

La secuencia de acciones puede describirse del modo siguiente: el regulador de velocidad se ajusta de modo que, a la velocidad deseada, no fluya aceite a presión en ningún lado del cilindro de potencia. Si la velocidad real cae abajo del valor deseado debido a una perturbación, la disminución de la fuerza centrífuga del regulador de velocidad provoca que la válvula de control se mueva hacia abajo, aportando más combustible y la velocidad del motor aumenta hasta alcanzar el valor deseado. En cambio, si la velocidad del motor aumenta sobre el valor deseado, el incremento en la fuerza centrífuga del controlador provoca que la válvula de control se mueva hacia arriba. Esto disminuye la provisión de combustible y la velocidad del motor se reduce hasta alcanzar el valor deseado.

En-este sistema de control de velocidad, la planta (el sistema controlado) es la máquina y la variable controlada es la velocidad de la misma. La diferencia entre la velocidad deseada y la velocidad real es la señal de error. La señal de control (la cantidad de combustible) que se va a aplicar a la planta (la máquina) es la señal de actuación. La entrada externa que se aplica para afectar la variable controlada es la perturbación. Un cambio inesperado en la carga es una perturbación.

Sistema de control de un robot. Los robots industriales se usan con frecuencia en la industria para mejorar la productividad. Un robot puede realizar tareas monótonas y complejas sin errores en la operación. Asimismo, puede trabajar en un ambiente intolerable para operadores humanos. Por ejemplo, puede funcionar en temperaturas extremas (tanto altas como bajas), en un ambiente de presión alta o baja, bajo el agua o en el espacio. Hay robots especiales para la extinción de incendios, las exploraciones submarinas y espaciales, entre muchos otros

El robot industrial debe manejar partes mecánicas que tengan una forma y un peso determinados. Por tanto, debe tener al menos un brazo, una muñeca y una mano. Debe tener la fuerza suficiente para realizar la tarea y la capacidad para al menos una movilidad limitada. De hecho, algunos robots actuales son capaces de moverse libremente por sí mismos en un espacio limitado en una fábrica.

El robot industrial debe tener algunos dispositivos sensores. A los robots de nivel bajo, se les instalan microinterruptores en los brazos como dispositivos sensores. El robot toca primero un objeto y después, mediante los microinterruptores, confirma la existencia del objeto en el espacio y avanza al paso siguiente para asirlo.

En un robot de nivel alto se usa un medio óptico (como un sistema de televisión) para rastrear el fondo del objeto. El robot reconoce el patrón y determina la presencia y orientación del objeto. Se requiere de una computadora para procesar las señales del proceso de reconocimiento de patrones (véase figura 1-2). En algunas aplicaciones, el robot computarizado reconoce la presencia y orientación de cada parte mecánica mediante un proceso de reconocimiento de patrones que consiste en la lectura de los números de código que se fijan a cada parte. A continuación, el robot levanta la parte-y'ia mueve a un lugar conveniente para su ensamble, y después ensambla varias partes para formar un componente. Una computadora digital bien programada funciona como controlador.

Sistema de control de temperatura. La figura 1-3 muestra un diagrama esquemático del control de temperatura de un horno eléctrico. La temperatura del horno eléctrico se mide mediante un termómetro, que es un dispositivo analógico. La temperatura analógica se convierte a una temperatura digital mediante un convertidor A/D. La temperatura digital se introduce a un controlador mediante una interfase. Esta temperatura digital se compara con una temperatura que se ingresa mediante un programa y si hay una dis-

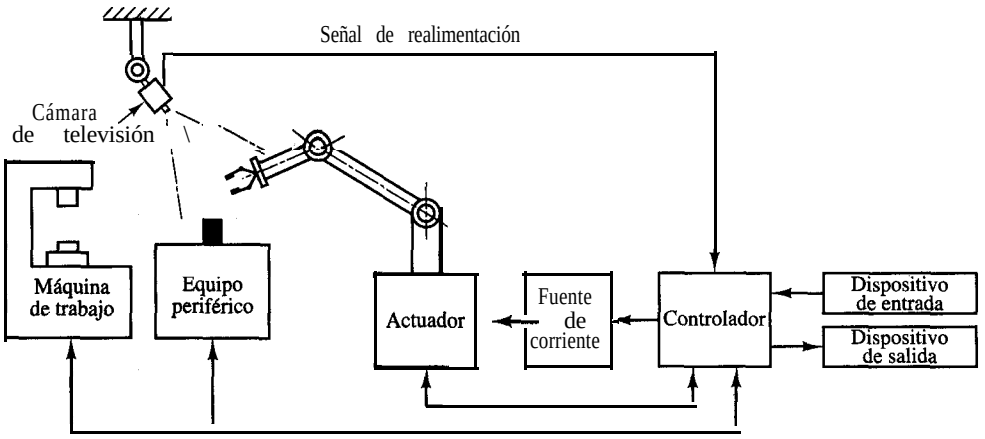


Figura 1–2
Robot que usa un proceso de reconocimiento de patrones.

crepancia (error) el controlador envía una señal al calefactor, a través de una interfase, un amplificador y un relevador, para hacer que la temperatura del horno adquiera el valor deseado.

Control de temperatura del compartimiento del pasajero de un automóvil. La figura 1–4 muestra un diagrama funcional del control de temperatura del compartimiento del pasajero de un automóvil. La temperatura deseada, convertida a un voltaje, es la entrada del controlador. La temperatura real del compartimiento del pasajero se convierte a un voltaje mediante un sensor y se alimenta al controlador para que éste la compare con la entrada. La temperatura ambiente y la transferencia térmica por radiación del Sol, que no son constantes conforme se conduce el automóvil, funcionau como perturbaciones. Este sistema emplea tanto un control realimentado como uno de prealimentación. (El control prealimentado establece una acción correctiva antes de que las perturbaciones afecten el resultado.)

La temperatura del compartimiento del pasajero de un automóvil difiere considerablemente dependiendo del lugar en donde se mida. En lugar de usar sensores múltiples para medir la temperatura y promediar los valores, es económico instalar un pequeño ventilador de succión en el lugar en donde los pasajeros normalmente detectan la temperatura. La temperatura del aire del aspirador es una indicación de la temperatura del compartimiento del pasajero y se considera la salida del sistema.

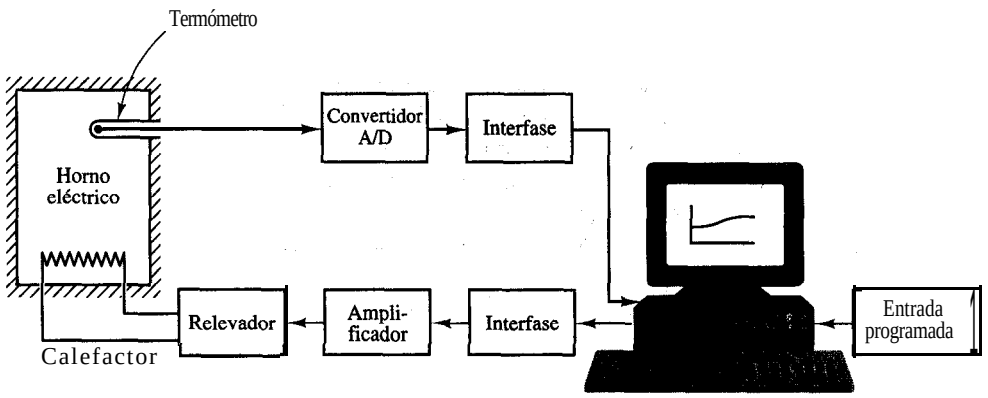


Figura 1–3
Sistema de control de temperatura.

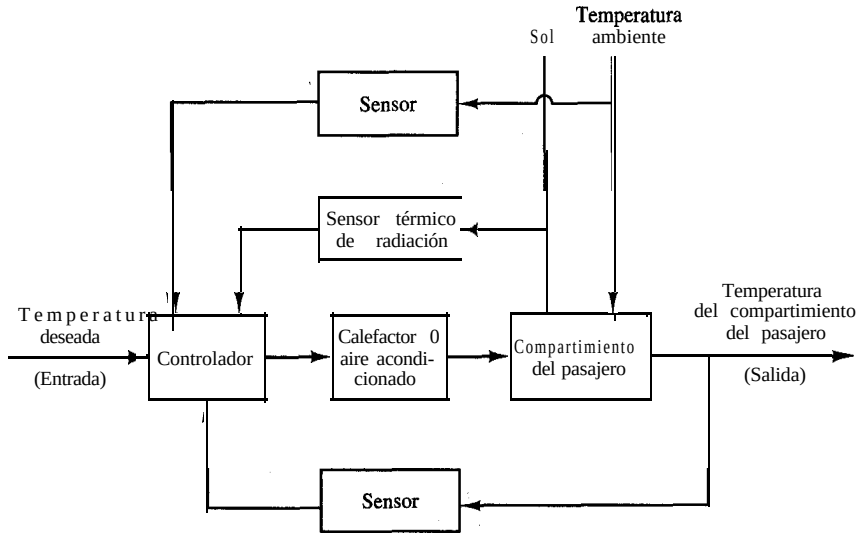


Figura 1–4
Control de temperatura del compartimiento del pasajero de un automóvil.

El controlador recibe la señal de entrada, la señal de salida y las señales de los sensores de las fuentes de perturbación. El controlador envía una señal de control óptima al aire acondicionado o al calefactor para controlar la cantidad de aire frío o caliente a fin de que la temperatura del compartimiento del pasajero se mantenga al valor deseado.

Sistemas empresariales. Un sistema empresarial está formado por muchos grupos. Cada tarea asignada a un grupo representará un elemento dinámico del sistema. Para la correcta operación de tal sistema deben establecerse métodos de realimentación para reportar los logros de cada grupo. El acoplamiento cruzado entre los grupos funcionales debe reducirse a un mínimo para evitar retardos de tiempo inconvenientes en el sistema. Entre más pequeño sea dicho acoplamiento, más regular será el flujo de señales y materiales de trabajo.

Un sistema empresarial es un sistema en lazo cerrado. Un buen diseño del mismo reducirá el control administrativo requerido. Observe que las perturbaciones en este sistema son la falta de personal o de materiales, la interrupción de las comunicaciones, los errores humanos, etcétera.

El establecimiento de un sistema bien fundado para obtener estimados, basado en estadísticas, es imprescindible para una administración adecuada. (Observe que es un hecho bien conocido que el desempeño de tal sistema mejora mediante el tiempo de previsión o anticipación.)

Con el propósito de aplicar la teoría de control para mejorar el desempeño de tal sistema, debemos representar la característica dinámica de los grupos componentes del sistema mediante un conjunto de ecuaciones relativamente simples.

Aunque es ciertamente una dificultad obtener representaciones matemáticas de los grupos de componentes, la aplicación de técnicas de optimización a los sistemas empresariales mejora significativamente el desempeño de tales sistemas.

1-3 CONTROL EN LAZO CERRADO EN COMPARACIÓN CON EL CONTROL EN LAZO ABIERTO

Sistemas de control realimentados. Un sistema que mantiene una relación prescrita entre la salida y la entrada de referencia, comparándolas y usando la diferencia como

medio de control, se denomina ***sistema de control realimentado.*** Un ejemplo sería el sistema de control de temperatura de una habitación. Midiendo la temperatura real y comparándola con la temperatura de referencia (la temperatura deseada), el termostato activa o desactiva el equipo de calefacción o de enfriamiento para asegurar que la temperatura de la habitación se conserve en un nivel cómodo sin considerar las condiciones externas

Los sistemas de control realimentados no se limitan a la ingeniería, sino que también se encuentran en diversos campos ajenos a ella. Por ejemplo, el cuerpo humano es un sistema de control realimentado muy avanzado.Tanto la temperatura corporal como la presión sanguínea se conservan constantes mediante una realimentación fisiológica. De hecho, la realimentación realiza una función vital: vuelve el cuerpo humano relativamente insensible a las perturbaciones externas, por lo cual lo habilita para funcionar en forma adecuada en un ambiente cambiante.

Sistemas de control en lazo cerrado. Los sistemas de control realimentados se denominan también ***sistemas de control en lazo cerrado.*** En la práctica, los términos control realimentado y control en lazo cerrado se usan indistintamente. En un sistema de control en lazo cerrado, se alimenta al controlador la señal de error de actuación, que es la diferencia entre la señal de entrada y la señal de realimentación (que puede ser la señal de salida misma o una función de la señal de salida y sus derivadas y/o integrales), a fin de reducir el error y llevar la salida del sistema a un valor conveniente. El término control en lazo cerrado siempre implica el uso de una acción de control realimentado para reducir el error del sistema.

Sistemas de control en lazo abierto. Los sistemas en los cuales la salida no afecta la acción de control se denominan ***sistemas de control en lazo abierto.*** En otras palabras, en un sistema de control en lazo abierto no se mide la salida ni se realimenta para compararla con la entrada. Un ejemplo practico es una lavadora. El remojo, el lavado y el enjuague en la lavadora operan con una base de tiempo. La máquina no mide la señal de salida, que es la limpieza de la ropa.

En cualquier sistema de control en lazo abierto, la salida no se compara con la entrada de referencia. Por tanto, a cada entrada de referencia le corresponde una condición operativa fija; como resultado, la precisión del sistema depende de la calibración. Ante la presencia de perturbaciones, un sistema de control en lazo abierto no realiza la tarea deseada. En la práctica, el control en lazo abierto sólo se usa si se conoce la relación entre la entrada y la salida y si no hay perturbaciones internas ni externas. Es evidente que estos sistemas no son de control realimentado. Observe que cualquier sistema de control que opere con una base de tiempo es en lazo abierto. Por ejemplo, el control del tránsito mediante señales operadas con una base de tiempo es otro ejemplo de control en lazo abierto.

Sistemas de control en lazo cerrado en comparación con los sistemas en lazo abierto. Una ventaja del sistema de control en lazo cerrado es que el uso de la realimentación vuelve la respuesta del sistema relativamente insensible a las perturbaciones externas y a las variaciones internas en los parámetros del sistema. Por tanto, es posible usar componentes relativamente precisos y baratos para obtener el control adecuado de una planta determinada, en tanto que hacer eso es imposible en el caso de un sistema en lazo abierto.

Desde el punto de vista de la estabilidad, el sistema de control en lazo abierto es más fácil de desarrollar, porque la estabilidad del sistema no es un problema importante. Por otra parte, la estabilidad es una función principal en el sistema de control en lazo cerrado, lo cual puede conducir a corregir en exceso errores que producen oscilaciones de amplitud constante o cambiante.

Debe señalarse que, para los sistemas en los que se conocen con anticipación las entradas y en los cuales no hay perturbaciones, es aconsejable emplear un control en lazo abierto. Los sistemas de control en lazo cerrado sólo tienen ventajas cuando se presentan perturbaciones impredecibles y/o variaciones impredecibles en los componentes del sistema. Observe que la valoración de la energía de salida determina en forma parcial el costo, el peso y el tamaño de un sistema de control. La cantidad de componentes usados en un sistema de control en lazo cerrado es mayor que la que se emplea para un sistema de control equivalente en lazo abierto. Por tanto, el sistema de control en lazo cerrado suele tener costos y potencias más grandes. Para disminuir la energía requerida de un sistema, se emplea un control en lazo abierto cuando puede aplicarse. Por lo general, una combinación adecuada de controles en lazo abierto y en lazo cerrado es menos costosa y ofrecerá un desempeño satisfactorio del sistema general.

1-4 DISEÑO DE LOS SISTEMAS DE CONTROL

Los sistemas de control actuales son, por lo general, no lineales. Sin embargo, si es posible aproximarlos mediante modelos matemáticos lineales, podemos usar uno o más métodos de diseño bien desarrollados. En un sentido práctico, las especificaciones de desempeño determinadas para el sistema particular sugieren cuál método usar. Si se presentan las especificaciones de desempeño en términos de las características de respuesta transitoria y/o las medidas de desempeño en el dominio de la frecuencia, no tenemos otra opción que usar un enfoque convencional basado en los métodos del lugar geométrico de las raíces y/o la respuesta en frecuencia. (Estos métodos se presentan en los capítulos 6 al 9.) Si las especificaciones de desempeño se presentan como índices de desempeño en términos de las variables de estado, deben usarse los enfoques de control moderno. (Estos enfoques se presentan en los capítulos ll al 13.)

En tanto que el diseño de un sistema de control mediante los enfoques del lugar geométrico de las raíces y de la respuesta en frecuencia es una tarea de la ingeniería, el diseño del sistema en el contexto de la teoría de control moderna (métodos en el espacio de estados) emplea formulaciones matemáticas del problema y aplica la teoría matemática para diseñar los problemas en los que el sistema puede tener entradas y salidas múltiples y ser variantes con el tiempo. Aplicando la teoría de control moderna, el diseñador puede iniciar a partir de un índice de desempeño, junto con las restricciones impuestas en el sistema, y avanzar para diseñar un sistema estable mediante un procedimiento completamente analítico. La ventaja del diseño basado en la teoría de control moderna es que permite al diseñador producir un sistema de control óptimo en relación con el índice de desempeño considerado.

Los sistemas que pueden diseñarse mediante un enfoque convencional están por lo general limitados a una entrada y una salida, y son lineales e invariantes con el tiempo. El diseñador busca satisfacer todas las especificaciones de desempeño mediante la repetición estudiada de prueba y error. Después de diseñar un sistema, el diseñador verifica si satisface todas las especificaciones de desempeño. Si no las cumple, repite el proceso de diseño ajustando los parámetros o modificando la configuración del sistema hasta que se cumplan las especificaciones determinadas.Aunque el diseño se basa en un procedimiento de prueba y error, el ingenio y los conocimientos del diseñador cumplen una función importante en un diseño exitoso. Un diseñador experimentado será capaz de diseñar un sistema aceptable sin realizar muchas pruebas.

Por lo general, es conveniente que el sistema diseñado exhiba la menor cantidad posible de errores, en respuesta a la señal de entrada. A este respecto, debe ser razonable el amortiguamiento del sistema. La dinámica del sistema debe ser relativamente insensible a variaciones pequeñas en sus parámetros. Las perturbaciones no deseadas deben estar bien atenuadas. [En general, la parte de alta frecuencia debe atenuarse rápido para que puedan atenuarse los ruidos de alta frecuencia (como ruidos de los sensores). Si se conoce el ruido o las frecuencias de perturbación, pueden usarse filtros de ranura para atenuar estas frecuencias específicas.] Si el diseño del sistema se reduce a unos cuantos candidatos, puede hacerse una elección óptima entre ellos a partir de consideraciones como el desempeño general proyectado, el costo, el espacio y el peso.

1-5 PANORAMA DEL LIBRO

A continuación presentaremos brevemente el orden y el contenido del libro.

El capítulo 1 contiene el material introductorio sobre los sistemas de control. El capítulo 2 presenta la teoría de la transformada de Laplace, necesaria para el entendimiento de la teoría de control que se presenta en el libro. El capítulo 3 aborda el modelado matemático de sistemas dinámicos mediante funciones de transferencia y ecuaciones en el espacio de estados. Este capítulo incluye el análisis de linealización de sistemas no lineales. El capítulo 4 trata los análisis de respuesta transitoria de sistemas de primer y segundo orden. Este capítulo también proporciona detalles de los análisis de respuesta transitoria con MATLAB. El capítulo 5 presenta, primero, las acciones básicas de control y, después, analiza los controladores neumáticos, hidráulicos y electrónicos. Asimismo, este capítulo se refiere al criterio de estabilidad de Routh.

El capítulo 6 aporta un análisis del lugar geométrico de las raíces de los sistemas de control. Se presentan las reglas generales para desarrollar los lugares geométricos de las raíces. Se incluyen análisis detallados para graficar lugares geométricos de las raíces con MATLAB. El capítulo 7 aborda el diseño de los sistemas de control mediante el método del lugar geométrico de las raíces. Específicamente, se analizan en detalle los enfoques del lugar geométrico de las raíces para el diseño de compensadores de adelanto, de atraso y de adelanto-atraso. El capítulo 8 ofrece el análisis de la respuesta en frecuencia de los sistemas de control. Se revisan las trazas de Bode, las trazas polares, el criterio de estabilidad de Nyquist y la respuesta en frecuencia en lazo cerrado. El capítulo 9 se dedica al diseño de sistemas de control mediante el enfoque de la respuesta en frecuencia. Aquí se usan las trazas de Bode para diseñar compensadores de adelanto, de atraso y de adelanto-atraso. El capítulo 10 trata los controles PID básicos y modificados. Los temas que se incluyen son las reglas para sintonizar los controladores PID, las modificaciones de esquemas de control PID, el control con dos grados de libertad y consideraciones de diseño para el control robusto.

El capítulo ll presenta el material básico para el análisis en el espacio de estados de sistemas de control. Se deriva la solución de las ecuaciones de estado invariantes con el tiempo y se analizan conceptos de controlabilidad y observabilidad. El capítulo 12 trata el diseño de sistemas de control en el espacio de estados. Este capítulo empieza con problemas de ubicación de polos, seguidos por el diseño de observadores de estados y concluye con el diseño de sistemas de seguimiento de tipo 1. Se utiliza MATLAB para resolver los problemas de ubicación de polos, el diseño de observadores de estados y el diseño de sistemas de seguimiento. El capítulo 13, que es el último, presenta el análisis de estabilidad de Liapunov y el control cuadrático óptimo. Este capítulo empieza con el análisis de estabilidad de Liapunov. A continuación, se usa el enfoque de estabilidad de Liapunov para

diseñar sistemas de control con modelo de referencia. Por último, se analizan en detalle problemas de control cuadrático óptimo. Aquí se emplea el enfoque de estabilidad de Liapunov para derivar la ecuación de Riccati para un control cuadrático óptimo. Se incluyen soluciones de MATLAB para los problemas de control cuadrático óptimo.

El apéndice resume los fundamentos necesarios para el uso efectivo de MATLAB. Este apéndice se presenta específicamente para aquellos lectores que todavía no están familiarizados con MATLAB.

EJEMPLO DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

A-1-1. Haga una lista de las ventajas y desventajas principales de los sistemas de control en lazo abierto.

Solución. Las ventajas de los sistemas de control en lazo abierto son las siguientes:

1. Una construcción sencilla y un mantenimiento fácil.
2. Son menos costosos que un sistema equivalente en lazo cerrado.
3. No existe el problema de estabilidad.
4. Son convenientes cuando es difícil medir la salida o no son factibles en el aspecto económico. (Por ejemplo, en el sistema de una lavadora, sería muy costoso ofrecer un dispositivo para medir la calidad de la salida -la limpieza de la ropa- de la lavadora.)

Las desventajas de los sistemas de control en lazo abierto son las siguientes:

1. Las perturbaciones y los cambios en la calibración provocan errores y la salida puede ser diferente de lo que se busca.
2. Para conservar la calidad requerida en la salida, es necesaria una recalibración de vez en cuando.

A-1-2. La figura 1–5(a) es un diagrama esquemático de un sistema de control de nivel de líquido. Aquí el controlador automático mantiene el nivel de líquido comparando el nivel real con un nivel deseado y corrigiendo cualquier error mediante un ajuste de la apertura de la válvula neumática. La figura 1–5(b) es un diagrama de bloques del sistema de control. Dibuje el diagrama de bloques correspondiente para un sistema de control de nivel de líquido operado por personas.

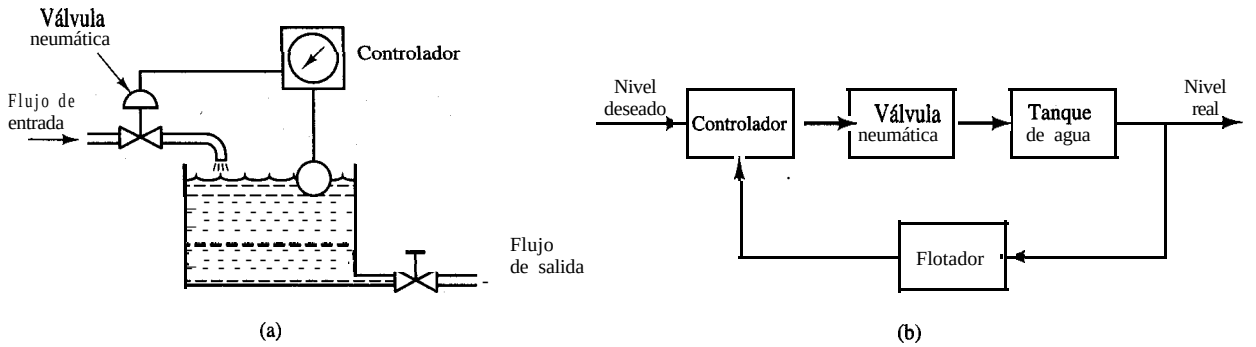


Figura 1–5
(a) Sistema de control de nivel de líquido; (b) diagrama de bloques.

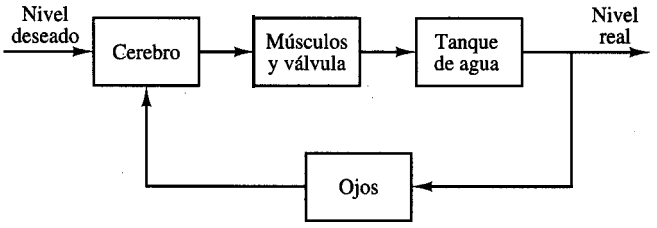


Figura 1–6
Diagrama de bloques de un sistema de control de nivel de líquido operado por personas.

Solución. En el sistema operado por personas, los ojos, el cerebro y los músculos corresponden al sensor, el controlador y la válvula neumática, respectivamente. La figura 1-6 muestra un diagrama de bloques.

A-1-3. Un sistema de ingeniería organizacional está formado por los grupos principales, como son la administración, la investigación y el desarrollo, el diseño preliminar, los experimentos, el diseño y boceto de los productos, la fabricación y el ensamble y las pruebas. Estos grupos se conectan entre sí para formar la operación completa.

Para analizar el sistema, se reduce al conjunto de componentes más elemental, necesario para ofrecer el detalle analítico, y se representan las características dinámicas de cada componente mediante un grupo de ecuaciones simples. (El desempeño dinámico de tal sistema se determina de la relación entre el logro progresivo y el tiempo.)

Dibuje un diagrama de bloques funcional que muestre un sistema de ingeniería organizacionai.

Solución. Un diagrama de bloques funcional se dibuja mediante los bloques para representar las actividades funcionales y conectando líneas de señales para representar la salida de información o de productos de la operación del sistema. Un diagrama de bloques posible se muestra en la figura 1-7.

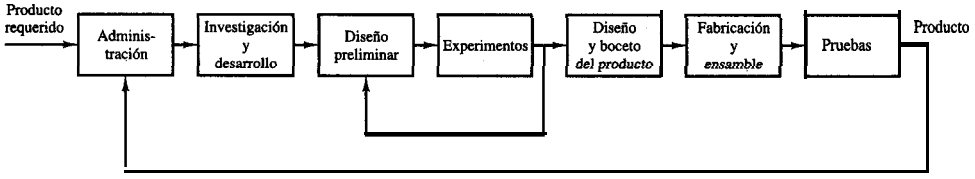


Figura 1–7
Diagrama de bloques de un sistema de ingeniería organizacional.

PROBLEMAS

B-l-l. En los hogares se encuentran muchos sistemas de control en lazo cerrado y en lazo abierto. Dé varios ejemplos y descríbalos.

B-1-2. Proporcione dos ejemplos de sistemas de control realimentados en los cuales una persona actúe como controlador.

B-1-3. La figura l-g muestra un sistema de control de tensión. Explique la secuencia de las acciones de control cuando la velocidad de alimentación se modifica repentinamente durante un periodo breve.

B-1-4. Muchas máauinas. como los tornos. las fresadoras y las esmeriladoras, cuentan con guías para reproducir el contorno de las plantillas. La figura 1-9 muestra un diagrama esquemático de un sistema guía en el cual la herramienta duplica la forma de la plantilla sobre la parte de trabajo. Explique la operación de este sistema.

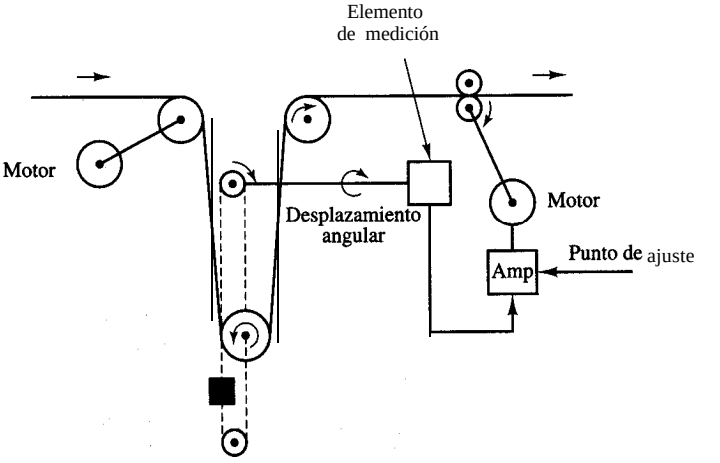


Figure 1–8
Sistema de control de tensión.

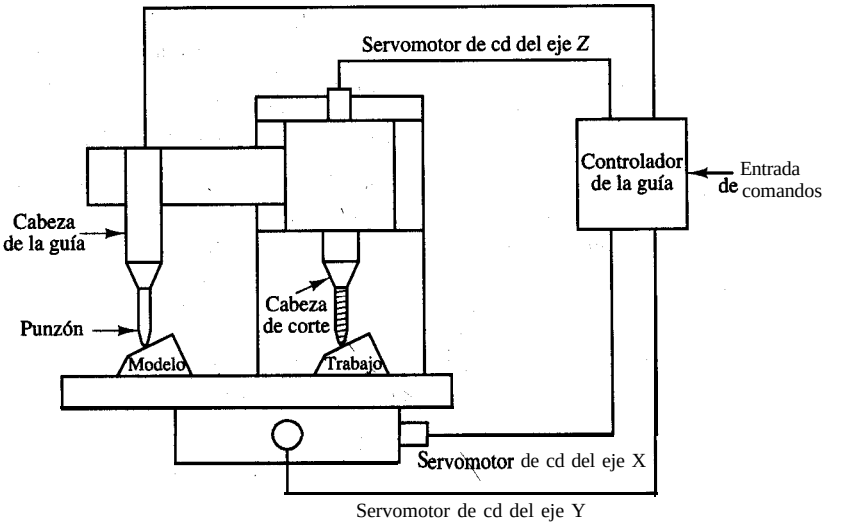
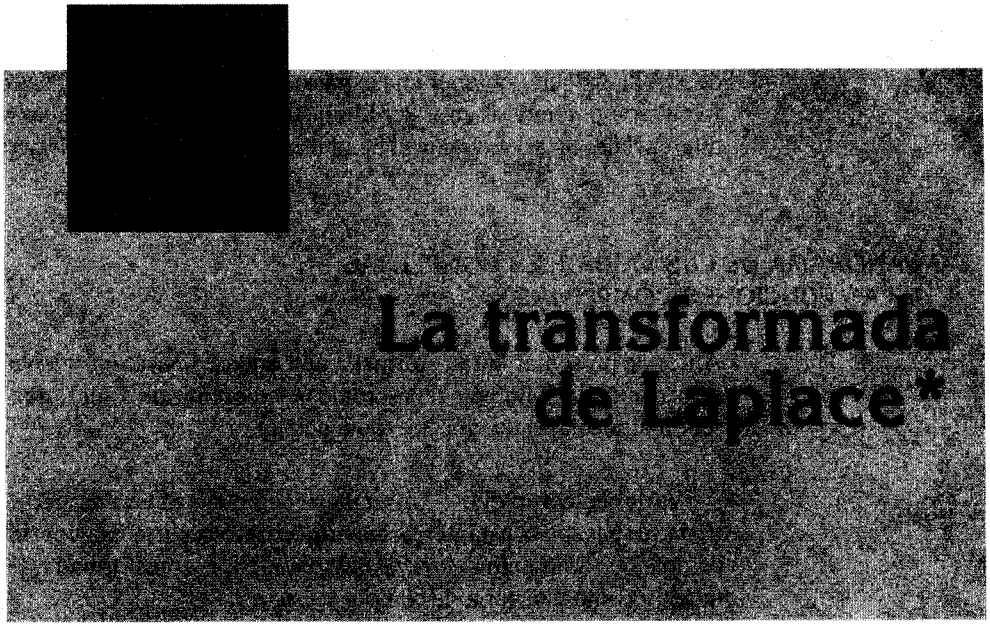


Figure 1–9
Diagrama esquemático de un sistema guía.



La transformada de Laplace*

2-1 INTRODUCCIÓN

El método de la transformada de Laplace es un método operativo que aporta muchas ventajas cuando se usa para resolver ecuaciones diferenciales lineales. Mediante el uso de la transformada de Laplace, es posible convertir muchas funciones comunes, tales como las funciones senoidales, las funciones senoidales amortiguadas y las funciones exponenciales, en funciones algebraicas de una variable s compleja. Las operaciones tales como la diferenciación y la integración se sustituyen mediante operaciones algebraicas en el plano complejo. Por tanto, en una ecuación algebraica, una ecuación diferencial lineal se transforma en una variable compleja s. Si se resuelve la ecuación algebraica en s para la variable dependiente, la solución de la ecuación diferencial (la transformada inversa de Laplace de la variable dependiente) se encuentra mediante una tabla de transformadas de Laplace o una técnica de expansión en fracciones parciales, que se presenta en la sección 2-5.

Una ventaja del método de la transformada de Laplace es que permite el uso de técnicas gráficas para predecir el desempeño del sistema, sin tener que resolver las ecuaciones diferenciales del sistema. Otra ventaja del método de la transformada de Laplace es que, cuando se resuelve la ecuación diferencial, es posible obtener simultáneamente tanto el componente transitorio como el componente de estado estable de la solución.

Panorama del capítulo. La sección 2-1 presenta información introductoria. La sección 2-2 reseña brevemente las variables y funciones complejas. La sección 2-3 deriva la transformada de Laplace de las funciones del tiempo que se usan con frecuencia en la in-

*Este capitulo puede pasarse por alto si el estudiante ya está familiarizado con la transformada de Laplace.

geniería de control. La sección 2–4 presenta teoremas útiles de la transformada de Laplace y la sección 2-5 trata la transformada inversa de Laplace. La sección 2-6 presenta el enfoque de MATLAB para obtener una expansión en fracciones parciales de $B(s)/A(s)$, donde $A(s)$ y B(s) son polinpmios en s. Por último, la sección 2-7 aborda las soluciones de ecuaciones diferenciales invariantes con el tiempo, mediante el enfoque de la transformada de Laplace.

2-2 PANORAMA DE LAS VARIABLES COMPLEJAS Y LAS FUNCIONES COMPLEJAS

Antes de presentar la transformada de Laplace, revisaremos la variable compleja y la función compleja. También repasaremos el teorema de Euler, que relaciona las funciones senoidales con las funciones exponenciales.

Variable **compleja.** Un número complejo tiene una parte real y una parte imaginaria, ambas son constantes. Si la parte real y/o la parte imaginaria son variables, el número complejo se denomina ***variable compleja.*** En la transformada de Laplace, usamos la notación s como una variable compleja; esto es,

$$s = \sigma + j\omega$$

donde σ es la parte real y ω es la parte imaginaria.

Función compleja. Una función compleja F(s), una función des, tiene una parte real y una parte imaginaria, o bien,

$$F(s) = F_x + jF_y$$

donde F_x y F_y son cantidades reales. La magnitud de $F(s)$ es $\sqrt{F_x^2 + F_y^2}$, y el ángulo θ de $F(s)$ es $\tan^{-1}(F_y/F_x)$. El ángulo se mide en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj, a partir del eje real positivo. El complejo conjugado de $F(s)$ es $\bar{F}(s) = F_x - jF_y$.

Las funciones complejas que por lo general se encuentran en el análisis de sistemas de control lineales son funciones univaluadas de s y se determinan en forma única para un determinado valor de s.

Se dice que una función compleja G(s) es ***analítica*** en una región si G(s) y todas sus derivadas existen en tal región. La derivada de la función analítica G(s) se obtiene mediante

$$\frac{d}{ds}\,\mathrm{G(s)} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{G(s + \Delta s) - G(s)}{\mathrm{As}} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta s}$$

Dado de As = $\Delta\sigma + j\Delta\omega$, As puede tender a cero a lo largo de una cantidad infinita de trayectorias diferentes. Es posible demostrar, pero aquí se plantea sin una comprobación, que si son iguales las derivadas que se toman a lo largo de dos trayectorias determinadas, esto es, As = $\Delta\sigma$ y As = $j\Delta\omega$, la derivada es única para cualquier otra trayectoria As = $\Delta\sigma + j\Delta\omega$ y, por tanto, la derivada existe.

Para una trayectoria determinada As = $\Delta\sigma$ (lo que significa que la trayectoria está sobre el eje real),

$$\frac{d}{ds}\,\mathrm{G(s)} = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \left(\frac{\Delta G_x}{\Delta\sigma} + j\frac{\Delta G_y}{\Delta\sigma} \right) = \frac{\partial G_x}{\partial\sigma} + j\frac{\partial G_y}{\partial\sigma}$$

Para otra trayectoria determinada As = $j\Delta\omega$ (lo que significa que la trayectoria está sobre el eje imaginario),

$$\frac{d}{ds}\,G(s) = \lim_{j\Delta\omega\to 0}\left(\frac{\Delta G_x}{j\Delta\omega} + j\frac{\Delta G_y}{j\Delta\omega}\right) = -j\frac{\partial G_x}{\partial\omega} + \frac{\Delta G_y}{\partial\omega}$$

Si estos dos valores de la derivada son iguales,

$$\frac{\partial G_x}{\partial\sigma} + j\frac{\partial G_y}{\partial\sigma} = \frac{\partial G_y}{\partial\omega} - j\frac{\partial G_x}{\partial\omega}$$

o si se satisfacen las dos condiciones siguientes,

$$\frac{\partial G_x}{\partial\sigma} = \frac{\partial G_y}{\partial\omega} \quad \text{y} \quad \frac{\partial G_y}{\partial\sigma} = -\frac{\partial G_x}{\partial\omega}$$

la derivada $dG(s)/ds$ se determina en forma única. Estas dos condiciones se conocen como las condiciones de Cauchy-Riemann. Si se cumplen estas condiciones, la función G(s) es analítica.

Como ejemplo, considere la siguiente G(s):

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Por tanto,

$$G(\sigma + j\omega) = \frac{1}{\sigma + j\omega + 1} = G_x + jG_y$$

en donde

$$G_x = \frac{\sigma+1}{(\sigma+1)^2+\omega^2} \qquad \text{y} \qquad G_y = \frac{-\omega}{(\sigma+1)^2+\omega^2}$$

Es posible apreciar que, excepto en s = -1 (esto es, σ = -1, ω = 0), G(s) satisface las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial G_x}{\partial\sigma} = -\frac{\omega^2 - (\sigma+1)^2}{[(\sigma+1)^2+\omega^2]^2}$$

$$\frac{\partial G_y}{\partial\sigma} = -\frac{\partial G_x}{\partial\omega} = \frac{2\omega(\sigma+1)}{[(\sigma+1)^2+\omega^2]^2}$$

Por tanto, G(s) = 1/(s + 1) es analítica en el plano s completo, excepto en s = -1. Se encuentra que la derivada $dG(s)/ds$, excepto en s = 1, es:

$$\frac{d}{ds}G(s) = \frac{\partial G_x}{\partial\sigma} + j\frac{\partial G_y}{\partial\sigma} = \frac{\partial G_y}{\partial\omega} - j\frac{\partial G_x}{\partial\omega}$$

$$= -\frac{1}{(\sigma + j\omega + 1)^2} = -\frac{1}{(s+1)^2}$$

Observe que la derivada de una función analítica se obtiene simplemente diferenciando G(s) con respecto a s. En este ejemplo,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+1}\right) = -\frac{1}{(s+1)^2}$$

Los puntos en el plano s en los cuales la función G(s) es analítica se denominan puntos ***ordinarios,*** en tanto que los puntos en el planos en los cuales la función G(s) no es analítica se denominan puntos ***singulares.*** Los puntos singulares en los cuales la función G(s) o sus derivadas tienden a infinito se denominan polos. En el ejemplo anterior, s = -1 es un punto singular y es un polo de la función G(s).

Si G(s) tiende a infinito conforme s se aproxima a $-p$ y si la función:

$$G(s)(s + p)^n, \qquad \text{paran} = 1, 2, 3, \ldots$$

tiene un valor finito diferente de cero en $s = -p$, entonces $s = -p$ se denomina polo de orden n. Si n = 1, el polo se designa polo simple. Si $n = 2, 3, \ldots$, el polo se clasifica como polo de segundo orden, polo de tercer orden, etc. Los puntos en los cuales la función G(s) es igual a cero se denominan ceros.'

Como ejemplo, considere la función compleja

$$\mathbf{G(s)} = \frac{K(s+2)(s+10)}{s(s+1)(s+5)(s+15)^2}$$

G(s) tiene ceros en s = -2, s = -10, polos simples en s = 0, s = -1, s = -5, y un polo doble (polo múltiple del orden 2) en s = -15. Observe que G(s) se vuelve cero en $s = \infty$. Dado que, para valores grandes de s,

$$G(s) \doteq \frac{K}{s^3}$$

G(s) posee un cero triple (un cero múltiple de orden 3) en $s = \infty$. Si se incluyen puntos en infinito, G(s) tiene la misma cantidad de polos que de ceros. En resumen, G(s) tiene cinco ceros (s = -2,s = -10,s = $\infty, s = \infty, s = \infty$) ycincopolos (s = 0,s = -1,s = -5,s = -15,s = -15).

El teorema de Euler. Las expansiones en series de potencias de $\cos\theta$ y sen θ son, respectivamente,

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$$

$$\text{sen}\,\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$

Y, por tanto,

$$\cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta = 1 + (j\theta) + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \frac{(j\theta)^4}{4!} + \cdots$$

Dado que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

vemos que

$$\cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta = e^{j\theta} \tag{2–1}$$

Esto se conoce como el ***teorema de Euler.***

Con el teorema de Euler podemos expresar el seno y el coseno en términos de una función exponencial. Tomando en cuenta que $e^{-j\theta}$ es el complejo conjugado de $e^{j\theta}$, y que,

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta$$

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j \operatorname{sen}\theta$$

encontramos, después de sumar y restar estas dos ecuaciones, que

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \tag{2–2}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \tag{2–3}$$

2-3 TRANSFORMADA DE LAPLACE

Primero presentaremos una definición de la transformada de Laplace y un breve análisis de la condición para la existencia de ésta y después ofreceremos ejemplos de la derivación de las transformadas de Laplace en varias funciones comunes.

Definamos

f(t) = una función del tiempo t tal que $f(t) = 0$ para $t < 0$

s = una variable compleja

$\mathcal{L}$ = un símbolo operativo que indica que la cantidad a la que antecede se va a transformar mediante la integral de Laplace $\int_0^\infty e^{-st}\,dt$

$F(s)$ = transformada de Laplace de $f(t)$

A continuación, la transformada de Laplace de $f(t)$ se obtiene mediante

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

El proceso inverso de encontrar la función del tiempo $f(t)$ a partir de la transformada de Laplace $F(s)$ se denomina ***transformada inversa de Laplace.*** La notación para la transformada inversa de Laplace es $\mathcal{L}^{-1}$, se encuentra a partir de $F(s)$ mediante la siguiente integral de inversión:

$$\mathcal{L}^{-1}\,[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}\,ds, \quad \text{para } t > 0 \tag{2–4}$$

en donde c, la abscisa de convergencia, es una constante real y se eligió más grande que las partes reales para todos los puntos singulares de $F(s)$. Por tanto, la trayectoria de integración es paralela al eje jo y se desplaza una cantidad c a partir de él. Esta trayectoria de integración va hacia la derecha de todos los puntos singulares.

Parece complicado evaluar la integral de inversión. En la práctica, rara vez se emplea esta integral para encontrar $f(t)$. Hay métodos más sencillos para obtener f(t). Analizaremos tales métodos más simples en la sección 2-5.

Se debe señalar que en este libro siempre se supone que la función de tiempo f(t) es cero para valores negativos; esto es,

$$f(t) = 0, \quad \text{para } t < 0$$

Existencia de la transformada de Laplace. La transformada de Laplace de una función $f(t)$ existe si la integral de Laplace converge. La integral convergirá si $f(t)$ es seccionalmente continua en cada intervalo finito en el rango $t > 0$ y si es de un orden exponencial conforme t tiende a infinito. Se dice que una función $f(t)$ es de orden exponencial si existe una constante σ real positiva tal que la función

$$e^{-\sigma t}|f(t)|$$

tiende a cero conforme t tiende a infinito. Si el límite de la función $e^{-\sigma t}|f(t)|$ tiende a cero para σ mayor que σ_c y el límite tiende a infinito para σ menor que σ_c, el valor de σ_c se denomina ***abscisa de convergencia.***

Para la función f(t) = Ae^{-at}

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\sigma t}|Ae^{-at}|$$

tiende a 0 si $\sigma > -a$. En este caso, la abscisa de convergencia es $\sigma_c = -a$. La integral $\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ sólo converge si σ, la parte real de s, es mayor que la abscisa de convergencia σ_c. Por tanto, debe elegirse el operador s como una constante tal que esta integral converja.

En términos de los polos de la función $F(s)$, la abscisa de convergencia σ_c corresponde a la parte real del polo que se ubica en la parte más alejada a la derecha del plano s. Por ejemplo, para la función siguiente $F(s)$,

$$F(s) = \frac{K(s + 3)}{(s + 1)(s + 2)}$$

la abscisa de convergencia σ_c es igual a -1. Puede apreciarse que, para funciones tales como t, sen ωt, y t sen ωt, la abscisa de convergencia es igual a cero. Para funciones como e^{-ct}, te^{-ct}, e^{-ct} sen ωt, etc., la abscisa de convergencia es igual a $-c$. Sin embargo, para funciones que crecen más rápido que la función exponencial, es imposible encontrar valores convenientes de la abscisa de convergencia. Por tanto, funciones tales como e^{t^2} y te^{t^2} no poseen transformadas de Laplace.

Debe advertirse al lector que, aunque,@' (para $0 \le t \le \infty$) no posee una transformada de Laplace, la función del tiempo definida mediante

$$f(t) = e^{t^2}, \quad \text{para } 0 \le t \le T < \infty$$

$$= 0, \quad \text{para } t < 0, T < t$$

sí posee una transformada de Laplace, dado que $f(t) = e^{t^2}$ sólo para un intervalo de tiempo limitado $0 \le t \le T$ y no para $0 \le t \le \infty$. Tal señal debe generarse físicamente. Observe que las señales que podemos generar físicamente siempre tienen transformadas de Laplace correspondientes.

Si una función $f(t)$ tiene transformada de Laplace, entonces la transformada de Laplace de $Af(t)$, en donde A es una constante, se obtiene mediante

$$\mathcal{L}[Af(t)] = A\mathcal{L}[f(t)]$$

Esto es obvio a partir de la definición de la transformada de Laplace. Asimismo, si las funciones $f_1(t)$ y $f_2(2)$ tienen transformadas de Laplace, la transformada de Laplace de la función $f_1(t) + f_2(t)$ se obtiene mediante

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)]$$

Una vez más, la prueba de esta relación es evidente a partir de la definición de la transformada de Laplace.

A continuación, derivaremos las transformadas de Laplace de algunas funciones que se encuentran con frecuencia.

Función exponencial. Considere la función exponencial

$$f(t) = 0, \qquad \text{para } t < 0$$

$$= Ae^{-at}, \qquad \text{para } t \geq 0$$

en donde A y a son constantes. La transformada de Laplace de esta función exponencial se obtiene del modo siguiente:

$$\mathcal{L}[Ae^{-at}] = \int_0^\infty Ae^{-at}e^{-st}\,dt = A\int_0^\infty e^{-(a+s)t}\,dt = \frac{A}{s+a}$$

Se aprecia que la función exponencial produce un polo en el plano complejo.

Al obtener la transformada de Laplace de $f(t) = Ae^{-at}$, *fue* necesario que la parte real de s fuera mayor que $-a$ (la abscisa de convergencia). Puede surgir de inmediato la pregunta de si la transformada de Laplace obtenida de esta forma es válida o no, en el rango en que $\sigma <$ -a en el plano s. Para contestar esta pregunta, debemos recurrir a la teoría de la variable compleja. En la teoría de la variable compleja, existe un teorema conocido como teorema de extensión analítica. Éste plantea que, si dos funciones analíticas son iguales para una longitud finita a lo largo de cualquier arco en una región en la cual ambas son analíticas, entonces son iguales en cualquier parte de la región. El arco de igualdad es por lo general el eje real o una parte de él. Si se usa este teorema, prevalece la forma de $F(s)$ determinada mediante una integración en la cual se permite que s tenga cualquier valor positivo real mayor que la abscisa de convergencia para todos los valores complejos de s en los cuales $F(s)$ es analítica. Por tanto, aunque requerimos que la parte real de s sea mayor que la abscisa de convergencia, para hacer la $\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ absolutamente convergente, una vez obtenida la transformada de Laplace F(s), esta última se considera válida en todo el plano s, excepto en los polos de F(s).

Función escalón. Considere la función escalón

$$f(t) = 0, \qquad \text{para } t < 0$$

$$= A, \qquad \text{para } t < 0$$

en donde A *es* una constante. Observe que éste es un caso especial de la función exponencial Ae^{-at}, en donde a = 0. La función escalón no está definida en $t = 0$. Su transformada de Laplace se obtiene mediante

$$\mathcal{L}[A] = \int_0^\infty Ae^{-st}\,dt = \frac{A}{s}$$

Al efectuar esta integración, supusimos que la parte real de s era mayor que cero (la abscisa de convergencia) y, por tanto, que $\lim_{t\to\infty} e^{-st}$ era cero. Como se plante6 antes, la

transformada de Laplace obtenida de tal modo es válida en todo el plano s, excepto en el polo $s = 0$.

La función escalón cuya altura es la unidad se denomina función *escalón unitario.* La función escalón unitario que ocurre en $t = t_0$ se escribe con frecuencia como $1(t - t_0)$. La función escalón de altura A que ocurre en $t = 0$ puede escribirse entonces como F(t) = *Al(t).* La transformada de Laplace de la función escalón unitario, que se define mediante:

$$l(t) = 0, \qquad \text{para } t < 0$$

$$= 1, \qquad \text{para } t > 0$$

es $1/s$, o bien,

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$$

Físicamente, una función escalón que ocurre en $t = 0$ corresponde a una señal constante aplicada repentinamente al sistema en el tiempo t igual a cero.

Función rampa. Considere la función rampa

$$f(t) = 0, \qquad \text{para } t < 0$$

$$= At, \qquad \text{para } t \geq 0$$

en donde A es una constante. La transformada de Laplace de esta función rampa se obtiene como

$$\mathcal{L}[At] = \int_0^\infty Ate^{-st}\,dt = At\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{Ae^{-st}}{-s}\,dt$$

$$= \frac{A}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{A}{s^2}$$

Función senoidal. La transformada de Laplace de la función senoidal:

$$f(t) = 0, \qquad \text{para } t < 0$$

$$= A \operatorname{sen} \omega t, \quad \text{para } t \geq 0$$

en donde A y ω son constantes, se obtiene del modo siguiente. Remitiéndonos a la ecuación (2−3), sen ωt se puede escribir como

$$\operatorname{sen} \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

Por tanto

$$\mathcal{L}[A \operatorname{sen} \omega t] = \frac{A}{2j}\int_0^\infty (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{\mathrm{A}}{2j}\frac{1}{s - jo} - \frac{\mathrm{A}}{2j}\frac{1}{s + j\omega} = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Asimismo, la transformada de Laplace de $A \cos \omega t$ se deriva del modo siguiente:

$$\mathcal{L}[A \cos ot] = \frac{As}{s^2 + \omega^2}$$

Comentarios. La transformada de Laplace de cualquier función $f(t)$ se encuentra si se multiplica $f(t)$ por e^{-st} y después se integra el producto de $t = 0$ a $t = \infty$. Sin embargo, una vez que conocemos el método para obtener la transformada de Laplace, no es necesario obtener cada vez la transformada de Laplace $f(t)$. Es posible usar las tablas de transformadas de Laplace en forma conveniente para encontrar la transformada de una función $f(t)$ determinada. La tabla 2-1 muestra las transformadas de Laplace de las funciones de tiempo que aparecerán con frecuencia en los análisis de sistemas de control lineales.

En el análisis siguiente presentamos transformadas de Laplace de funciones, al igual que teoremas acerca de la transformada de Laplace,útiles para estudiar los sistemas de control lineales.

Funciones desplazadas en el tiempo. Obtengamos la transformada de Laplace de la función desplazada en el tiempo $f(t - \alpha)1(t - a)$, en donde $a \geq 0$. Esta función es cero para $T < a$. Las funciones $f(t)1(t)$ y $f(t - \alpha)1(t - a)$ aparecen en la figura 2-1.

Por definición, la transformada de Laplace de $f(t - \alpha)1(t - a)$ es

$$\mathcal{L}[f(t - \alpha)1(t - a)] = \int_0^\infty f(t - \alpha)1(t - \alpha)e^{-st}\,dt$$

Si cambiamos la variable independiente de t a τ, en donde $\tau = t - a$, obtenemos

$$\int_0^\infty f(t \quad \alpha)1(t - \alpha)e^{-st}\,dt = \int_{-a}^\infty f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)}\,d\tau$$

Dado que en este libro siempre suponemos que $f(t) = 0$ para $t < 0, f(\tau)1(\tau) = 0$ para $\tau < 0$. Por tanto, podemos cambiar el límite inferior de la integración de $-a$ a 0. Así

$$\int_{-a}^\infty f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)}\,d\tau = \int_0^\infty f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)}\,d\tau$$

$$= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}e^{-\alpha s}\,d\tau$$

$$= e^{-\alpha s}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau = e^{-\alpha s}F(s)$$

en donde

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

Yen tal caso

$$\mathcal{L}[f(t - \alpha)1(t - a)] = e^{-\alpha s}F(s), \qquad \text{para } a \geq 0$$

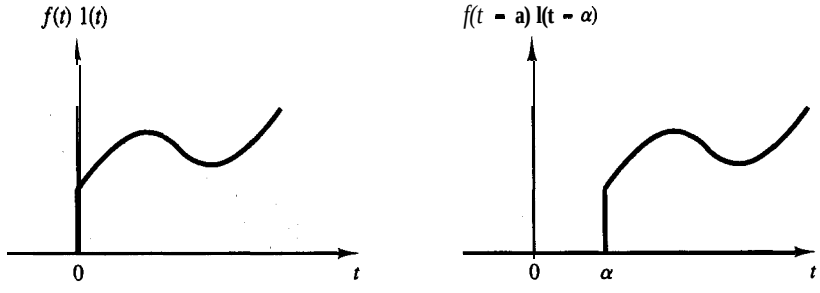


Figura 2-1
Función $f(t)1(t)$ y función desplazada en el tiempo $f(t - \alpha)1(t - a)$.

Tabla 2-1 Pares de transformadas de Laplace

	$f(t)$	$F(s)$
1	Impulso unitario $\delta(t)$	1
2	Escalón unitario 1(t)	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ (n = 1, 2, 3, . . .)	$\frac{1}{s^n}$
5	t^n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{1}{(s+a)}$
9	$t^n e^{-at}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	sen ωt	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
11	cos ωt	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
12	senh ωt	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
13	cosh ωt	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
14	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
15	$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
16	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt}-ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
17	$\frac{1}{ab}\left[1+\frac{1}{a-b}(be^{-at}-ae^{-bt})\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$

Tabla 2-1 (Continuación)

18	$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$
19	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
20	e^{-at} sen ωt	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
21	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
22	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}$ sen $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
23	$-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}$ sen $(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
24	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}$ sen $(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$
25	$1 - \cos\omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$
26	ωt - sen ωt	$\frac{\omega^3}{s^2(s^2+\omega^2)}$
27	sen $\omega t - \omega t\cos\omega t$	$\frac{2\omega^3}{(s^2+\omega^2)^2}$
28	$\frac{1}{2\omega} t$ sen ωt	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$
29	$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
30	$\frac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) \quad (\omega_1^2 \neq \omega_2^2)$	$\frac{s}{(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_2^2)}$
31	$\frac{1}{2\omega}$ (sen $\omega t + \omega t\cos\omega t$)	$\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

Esta última ecuación plantea que el desplazamiento en el tiempo de la función de tiempo $f(t)1(t)$ mediante a (en donde $a \geq 0$) corresponde a la multiplicación de la transformada F(s) por e^{-as}.

Función pulso. Considere la función pulso

$$f(t) = \frac{A}{t_0}, \quad \text{para } 0 < t < t_0$$
$$= 0, \quad \text{para } t < 0,\ t_0 < t$$

en donde A y t_0 son constantes.

Esta función pulso puede considerarse una función escalón de altura ***Alto*** que empieza en $t = 0$ y que está sobreimpuesta mediante una función escalón negativo de altura ***Alto*** que empieza en $t = t_0$; esto es,

$$f(t) = \frac{A}{t_0} 1(t) - \frac{A}{t_0} 1(t - t_0)$$

En tal caso, la tránsformada de Laplace de $f(t)$ se obtiene como

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{A}{t_0} 1(t)\right] - \mathcal{L}\left[\frac{A}{t_0} 1(t - t_0)\right]$$
$$= \frac{A}{t_0 s} - \frac{A}{t_0 s} e^{-st_0}$$
$$= \frac{A}{t_0 s}(1 - e^{-st_0}) \qquad (2\text{–}5)$$

Función impulso. La función impulso es un caso limitado especial de la función pulso. Considere la función impulso

$$g(t) = \lim_{t_0 \to 0} \frac{A}{t_0}, \quad \text{para } 0 < t < t_0$$
$$= 0, \quad \text{para } t < 0,\ t_0 < t$$

Dado que la altura de la función impulso es A/t_0 y la duración es t_0, el área bajo el impulso es igual a A. Conforme la duración t_0 tiende a cero, la altura ***Alto*** tiende a infinito, pero el área bajo el impulso sigue siendo igual a A. Observe que la magnitud del impulso se mide por su Brea.

Remitiéndonos a la ecuación (2–5), se aprecia que la transformada de Laplace de esta función impulso es

$$\mathcal{L}[g(t)] = \lim_{t_0 \to 0} \left[\frac{A}{t_0 s}(1 - e^{-st_0})\right]$$
$$= \lim_{t_0 \to 0} \frac{\dfrac{d}{dt_0}[A(1 - e^{-st_0})]}{\dfrac{d}{dt_0}(t_0 s)} = \frac{As}{s} = A$$

Por tanto, la transformada de Laplace de la función impulso es igual al área bajo el impulso.

La función impulso cuya área es igual a una unidad se denomina ***función impulso unitario o función delta de Dirac.*** La función impulso unitario que ocurre en $t = t_0$ por lo general se representa mediante $\delta(t - t_0)$. $\delta(t - t_0)$ satisface lo siguiente:

$$\delta(t - t_0) = 0, \qquad \text{para } t \neq t_0$$
$$\delta(t - t_0) = \infty, \qquad \text{para } t = t_0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = 1$$

Debe mencionarse que un impulso que tiene una magnitud infinita y una duración de cero es una ficción matemática y no ocurre en los sistemas físicos. Sin embargo, si la magnitud del pulso de entrada a un sistema y su duración es muy corta en comparación con las constantes de tiempo del sistema es muy grande, podemos aproximar la entrada pulso mediante una función impulso. Por ejemplo, si se aplica una entrada de fuerza o de par $f(t)$ a un sistema durante un tiempo muy breve, $0 < t < t_0$, en donde la magnitud de $f(t)$ es suficientemente grande para que la integral $\int_0^{t_0} f(t)\,dt$ no sea insignificante, esta entrada se considera una entrada impulso. (Observe que, cuando describimos la entrada impulso, el área o magnitud del impulso es lo más importante, pero la forma exacta del impulso por lo general es insustancial.) La entrada impulso proporciona energía suficiente al sistema en un tiempo infinitesimal.

El concepto de la función impulso es muy útil para diferenciar funciones discontinuas. La función impulso unitario $\delta(t - t_0)$ se considera la derivada de la función escalón unitario $1(t-t_0)$ en el punto de discontinuidad $t = t_0$ o

$$\delta(t - t_0) = \frac{d}{dt} 1(t - t_0)$$

Por el contrario, si se integra la función impulso unitario $\delta(t - t_0)$, el resultado es la función escalón unitario $1(t - t_0)$. Con el concepto de la función impulso podemos diferenciar una función que contenga discontinuidades, proporcionando los impulsos cuyas magnitudes son iguales a la magnitud de cada discontinuidad correspondiente.

Multiplicación de $f(t)$ por e^{-at}. Si $f(t)$ puede transformarse por el método de Laplace, y su transformada de Laplace es F(s), la transformada de Laplace de $e^{-at} f(t)$ se obtiene como

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-at}f(t)e^{-st}\,dt = F(s + \alpha) \qquad (2\text{–}6)$$

Observamos que la multiplicación de $f(t)$ por e^{-at} tiene el efecto de sustituir s por (s + a) en la transformada de Laplace. Por el contrario, cambiar s a $(s + \alpha)$ es equivalente a multiplicar $f(t)$ por e^{-at}. (Observe que α puede ser real o compleja.)

La relación proporcionada por la ecuación (2-6) es útil para obtener las transformadas de Laplace de funciones tales como e^{-at} sen ωt y e^{-at} cos ωt. Por ejemplo, dado que

$$\mathcal{L}[\text{sen } \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = F(s), \qquad \mathcal{L}[\cos \omega] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} = G(s)$$

se infiere que, a partir de la ecuación (2–6), las transformadas de Laplace de e^{-at} sen ωt y e^{-at} cos ωt se obtienen, respectivamente, mediante

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}\operatorname{sen}\ \omega t] = F(s+\alpha) = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}\cos\ wt] = G(s+a) = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

Cambio de la escala de tiempo. Al analizar sistemas físicos, es, en ocasiones, conveniente modificar la escala de tiempo o normalizar una función del tiempo determinada. El resultado obtenido en términos del tiempo normalizado es útil debido a que se aplica directamente a sistemas diferentes que tienen ecuaciones matemáticas similares.

Si t se cambia a t/α, en donde a es una 'constante positiva, la función $f(t)$ se transforma en $f(t/\alpha)$. Si denotamos la transformada de Laplace de $f(t)$ mediante F(s), la transformada de Laplace de $f(t/\alpha)$ se obtiene del modo siguiente:

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] = \int_0^\infty f\left(\frac{t}{\alpha}\right)e^{-st}\,dt$$

Suponiendo que $t/\alpha = t_1$ y que $\alpha s = s_1$, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] &= \int_0^\infty f(t_1)e^{-s_1t_1}\,d(\alpha t_1)\\ &= a\int_0^\infty f(t_1)e^{-s_1t_1}\,dt_1\\ &= \alpha F(s_1)\end{aligned}$$

o bien

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] = \alpha F(\alpha s)$$

Como ejemplo, considere $f(t)$ = e-t y $f(t/5)$ = e $^{-0.2t}$. Obtenemos

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[e^{-t}] = F(s) = \frac{1}{s+1}$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{5}\right)\right] = \mathcal{L}[e^{-0.2t}] = 5F(5s) = \frac{5}{5s+1}$$

Este resultado se comprueba con facilidad tomando la transformada de Laplace de $e^{-0.2t}$ directamente,como sigue:

$$\mathcal{L}[e^{-0.2t}] = \frac{1}{s+0.2} = \frac{5}{5s+1}$$

Comentarios acerca del límite inferior de la integral de Laplace. En algunos ca*sos&)* posee una función impulso en $t = 0$. Por tanto, debe especificarse con claridad si el límite inferior de la integral de Laplace es 0- o 0+, dado que las transformadas de Laplace

de f(t) difieren para estos dos límites inferiores. Si es necesaria tal distinción del límite inferior de la integral de Laplace, usamos las notaciones

$$\mathcal{L}_+[f(t)] = \int_{0+}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

$$\mathcal{L}_-[f(t)] = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \mathcal{L}_+[f(t)] + \int_{0-}^{0+} f(t)e^{-st}\,dt$$

Si $f(t)$ implica una función impulso en $t = 0$, entonces

$$\mathcal{L}_+[f(t)] \neq \mathcal{L}_-[f(t)]$$

dado que,

$$\int_{0-}^{0+} f(t)e^{-st}\,dt \neq 0$$

para tal caso. Obviamente, si $f(t)$ no posee una función impulso en $t = 0$ (esto es, si la función que se va a transformar es finita entre $t = 0-$ y $t = 0+$), entonces

$$\mathcal{L}_+[f(t)] = \mathcal{L}_-[f(t)]$$

2-4 TEOREMAS DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Esta sección presenta varios teoremas de la transformada de Laplace importantes en la ingenierfa de control.

Teorema de diferenciación real. La transformada de Laplace de la derivada de una función $f(t)$ se obtiene mediante

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0) \tag{2–7}$$

en donde $f(0)$ es el valor inicial de $f(t)$ evaluado en $t = 0$.

Para una función $f(t)$ determinada, los valores de $f(0+)$ y $f(0-)$ pueden ser iguales o diferentes, tal como se ilustra en la figura 2-2. La diferencia entre $f(0+)$ y $f(0-)$ es importante cuando $f(t)$ tiene una discontinuidad en $t = 0$, debido a que, en tal caso, $df(t)/dt$ implicará una función impulso en $t = 0$. Si $f(0+) \neq f(0-)$, la ecuación (2-7) debe modificarse a

$$\mathcal{L}_+\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0+)$$

$$\mathcal{L}_-\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0-)$$

Para comprobar el teorema de diferenciación real de la ecuación (2−7), procedemos del modo siguiente. Si se hace la integral de Laplace por partes, obtenemos

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = f(t)\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]\frac{e^{-st}}{-s}\,dt$$

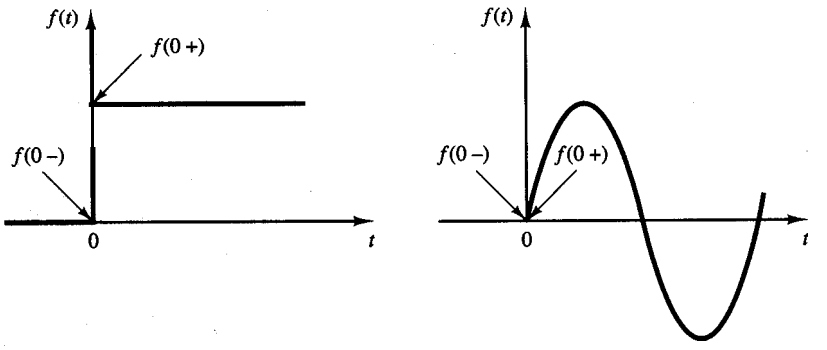


Figura 2 2
Función escalón y función seno con los valores iniciales en $t = 0-$ y $t = 0+$.

Por tanto.

$$F(s) = \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s}\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]$$

con lo que se concluye que

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

Del mismo modo, obtenemos la relación siguiente para la segunda derivada de $f(t)$:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

en donde $\dot{f}(0)$ es el valor de $df(t)/dt$ evaluada en $t = 0$. Para derivar esta ecuación, definimos

$$\frac{d}{dt}f(t) = g(t)$$

A continuación,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}g(t)\right] = s\mathcal{L}[g(t)] - g(0)\\ &= s\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] - \dot{f}(0)\\ &= s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)\end{aligned}$$

De la misma manera, para la n-ésima derivada de $f(t)$, obtenemos

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\dot{f}(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

en donde $f(0), \dot{f}(0), \ldots, f^{(n-1)}(0)$ representa los valores de $f(t), df(t)/dt, \ldots, d^{n-1}f(t)/dt^{n-1}$, respectivamente, evaluadas en $t = 0$. Si es necesaria la diferencia entre $\mathcal{L}_+$ y Ce-, sustituimos $t = 0+$ o $t = 0-$ en $f(t), df(t)/dt, \ldots, d^{n-1}f(t)/dt^{n-1}$, dependiendo de si tomamos $\mathcal{L}_+$ o $\mathcal{L}_-$.

Observe que, para que existan las transformadas de Laplace de las derivadas de f(t), $d^nf(t)/dt^n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) debe ser transformable mediante el método de Laplace.

También observe que si todos los valores iniciales de $f(t)$ y sus derivadas son iguales a cero, la transformada de Laplace de la n-ésima derivada de $f(t)$ se obtiene mediante $s^nF(s)$.

EJEMPLO 2-1 Considere la función coseno.

$$g(t) = 0, \qquad \text{para } t < 0$$

$$= \cos \omega t, \qquad \text{para } t \geq 0$$

La transformada de Laplace de esta función coseno se obtiene directamente como en el caso de la función senoidal considerada antes. Sin embargo, el uso del teorema de diferenciación real se comprobará aquí derivando la transformada de Laplace de la función coseno a partir de la transformada de Laplace de la función seno. Si definimos

$$f(t) = 0, \qquad \text{para } t < 0$$

$$= \text{sen } \omega t, \qquad \text{para } t \geq 0$$

entonces

$$\mathcal{L}[\text{sen } \omega t] = F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

La transformada de Laplace de la función coseno se obtiene como

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega}\left(\frac{d}{dt} \text{sen } \omega t\right)\right] = \frac{1}{\omega}[sF(s) - f(0)]$$

$$= \frac{1}{\omega}\left[\frac{s\omega}{s^2 + \omega^2} - 0\right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Teorema del valor final. El teorema del valor final relaciona el comportamiento en estado estable de $f(t)$ con el comportamiento de $sF(s)$ en la vecindad de $s = 0$. Sin embargo, este teorema se aplica si y sólo si existe $\lim_{t\to\infty} f(t)$ [lo que significa que $f(t)$ se asienta en un valor definido para $t \to \infty$]. Si todos los polos de $sF(s)$ se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s, existe $\lim_{t\to\infty} f(t)$. Pero si $sF(s)$ tiene polos en el eje imaginario 0 en el semiplano derecho del plano s, $f(t)$ contendrá funciones de tiempo oscilantes o exponencialmente crecientes, respectivamente, y $\lim_{t\to\infty} f(t)$ no existirá. El teorema de valor fina1 no se aplica en tales casos. Por ejemplo, si $f(t)$ es la función senoidal sen ωt, $sF(s)$ tiene polos en $s = \pm j\omega$ y $\lim_{t\to\infty} f(t)$ no existe. Por tanto, este teorema no es aplicable a tal función.

El teorema de valor final se plantea del modo siguiente. Si $f(t)$ y $df(t)/dt$ se pueden transformar por el método de Laplace, si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$, y si existe $\lim_{t\to\infty} f(t)$, entonces

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Para comprobar el teorema, suponemos que s tiende a cero en la ecuación para la transformada de Laplace de la derivada de f(t), o bien,

$$\lim_{s\to 0} \int_0^\infty \left[\frac{d}{dt} f(t)\right] e^{-st}\, dt = \lim_{s\to 0} [sF(s) - f(0)]$$

Dado que $\lim_{s\to 0} e^{-st} = 1$, obtenemos

$$\int_0^\infty \left[\frac{d}{dt} f(t)\right] dt = f(t)\Big|_0^\infty = f(\infty) - f(0)$$

$$= \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0)$$

a partir de lo cual

$$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(f) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

El teorema de valor final plantea que el comportamiento en estado estable de $f(t)$ es igual que el comportamiento de $sF(s)$ alrededor de s = 0. Por tanto, es posible obtener f(t) en t = CO directamente de F(s).

EJEMPLO 2-2 Dado

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

¿cuál es $\lim_{t\to\infty} f(t)$?

Debido a que el polo de $sF(s) = 1/(s + 1)$ se encuentra en el semiplano izquierdo del plano s, existe $\lim_{t\to\infty} f(t)$. Por tanto, en este caso es aplicable el teorema de valor final.

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s(s+1)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+1} = 1$$

De hecho, este resultado se verifica con facilidad, dado que

$$f(t) = 1 - e^{-t}, \qquad \text{para } t \geq 0$$

Teorema de valor inicial. El teorema de valor inicial es la contraparte del teorema de valor final. Este teorema nos permite encontrar el valor de $f(t)$ en t = 0+ directamente, a partir de la transformada de Laplace de $f(t)$. El teorema de valor inicial no proporciona el valor de f(t) en exactamente t = 0, sino en un tiempo ligeramente mayor que cero.

El teorema de valor inicial se plantea del modo siguiente: si $f(t)$ y $df(t)/dt$ se pueden transformar por el método de Laplace y si existe $\lim_{s\to\infty} sF(s)$, entonces,

$$f(0+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Para comprobar este teorema, usamos la ecuación para la transformada $\mathcal{L}_+$ de $df(t)/dt$:

$$\mathcal{L}_+\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0+)$$

Para el intervalo de tiempo $0+ \leq t \leq \infty$, conforme s se aproxima a infinito, e^{-st} se aproxima a cero. (Observe que debemos usar $\mathcal{L}_+$ en lugar de $\mathcal{L}_-$ para esta condición.) Y, por tanto,

$$\lim_{s\to\infty} \int_{0+}^{\infty} \left[\frac{d}{dt} f(t)\right] e^{-st}\, dt = \lim_{s\to\infty} [sF(s) - f(0+)] = 0$$

o bien,

$$f(0+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Al aplicar el teorema de valor inicial, no estamos limitados a las posiciones de los polos de $sF(s)$. Por tanto, el teorema de valor inicial es válido para la función senoidal.

Debe señalarse que el teorema de valor inicial y el teorema de valor final proporcionan una verificación conveniente en la solución, dado que nos permiten predecir el comportamiento del sistema en el dominio de tiempo sin transformar en realidad las funciones en s de regreso a las funciones de tiempo.

Teorema de integración real. Si $f(t)$ es de orden exponencial, existe la transformada de Laplace de $\int f(t)dt$ y se obtiene mediante

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s} \tag{2-8}$$

en donde $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ y f-l(O) = $\int f(t)\,dt$, evaluados en $t = 0$.

Observe que si $f(t)$ implica una función impulso en $t = 0$, entonces $f^{-1}(0+) \neq f^{-1}(0-)$. Por tanto, si $f(t)$ implica una función impulso en $t = 0$, debemos modificar la ecuación (2-8) del modo siguieqte:

$$\mathcal{L}_+\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0+)}{s}$$

$$\mathcal{L}_-\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0-)}{s}$$

El teorema de integración real ofrecido en la ecuación (2-8) se demuestra del modo siguiente. La integración por partes lleva a

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)\,dt\right] = \int_0^\infty \left[\int f(t)\,dt\right] e^{-st}\,dt$$

$$= \left[\int f(t)\,dt\right]\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^\infty \quad \int_0^\infty f(t)\,\frac{e^{-st}}{-s}\,dt$$

$$= \frac{1}{s}\int f(t)\,dt\Big|_{t=0} + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

$$\frac{f^{-1}(0)}{s} \quad \frac{F(s)}{s}$$

y el teorema se comprueba.

Vemos que la integración en el dominio del tiempo se convierte en una división en el dominio s. Si el valor inicial de la integral es cero, la transformada de Laplace de la integral de $f(t)$ se obtiene mediante $F(s)/s$.

El teorema de integración real anterior presentado en la ecuación (2-8) se modifica ligeramente para obtener la integral definida de $f(t)$. Si $f(t)$ es de orden exponencial, la transformada de Laplace de la integral definida $\int_0^t f(t)\,dt$ se obtiene mediante

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s} \tag{2-9}$$

en donde $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$. Esto tambitn se denomina teorema de integración real. Observe que si $f(t)$ implica una función impulso en $t = 0$, entonces $\int_{0+}^t f(t)dt \neq \int_{0-}^t f(t)dt$, y debe observarse la siguiente distinción:

$$\mathcal{L}_+\left[\int_{0+}^t f(t)\,dt\right] = \frac{\mathcal{L}_+[f(t)]}{s}$$

$$\mathcal{L}_-\left[\int_{0-}^t f(t)\,dt\right] = \frac{\mathcal{L}_-[f(t)]}{s}$$

Para comprobar la ecuación (2−9), primero observe que

$$\int_0^t f(t)\,dt = \int f(t)\,dt - f^{-1}(0)$$

en donde f-l(O) es igual a $\int f(t)dt$ evaluada en $t = 0$ y es una constante. Por tanto,

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \mathcal{L}\left[\int f(t)\,dt\right] - \mathcal{L}[f^{-1}(0)]$$

Considerando que $f^{-1}(0)$ es una constante, de modo que

$$\mathcal{L}[f^{-1}(0)] = \frac{f\text{-}lo}{s}$$

obtenemos

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s} - \frac{f^{-1}(0)}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

Teorema de diferenciación compleja. Si $f(t)$ se puede transformar mediante el método de Laplace, entonces, excepto en los polos de F(s),

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s)$$

en donde $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$. Esto se conoce como teorema de diferenciación compleja. Asimismo,

$$\mathcal{L}[t^2 f(t)] = \frac{d^2}{ds^2}F(s)$$

En general,

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s), \qquad \text{paran} = 1, 2, 3, \ldots$$

Para comprobar el teorema de diferenciación compleja, procedemos del modo siguiente:

$$\mathcal{L}[tf(t)] = \int_0^\infty tf(t)e^{-st}\,dt = -\int_0^\infty f(t)\frac{d}{ds}(e^{-st})\,dt$$

$$= -\frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = -\frac{d}{ds}F(s)$$

De aquí el teorema. Asimismo, definiendo $tf(t)$ = g(t), el resultado es

$$\mathcal{L}[t^2 f(t)] = \mathcal{L}[tg(t)] = -\frac{d}{ds}G(s) = -\frac{d}{ds}\left[-\frac{d}{ds}F(s)\right]_1$$

$$= (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}F(s) = \frac{d^2}{ds^2}F(s)$$

Si repetimos el mismo proceso, obtenemos

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)\frac{d^n}{ds^n}F(s), \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Integral de convolución. Considere la transformada de Laplace de

$$\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau$$

Con frecuencia, esta integral se escribe como

$$f_1(t) * f_2(t)$$

La operación matemática $f_1(t)*f_2(t)$ se denomina ***convolución.*** Observe que si ponemos $t - \tau = \xi$, entonces

$$\begin{aligned}\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau &= -\int_t^0 f_1(\xi)f_2(t-\xi)\,d\xi \\ &= \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}f_1(t)*f_2(t) &= \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau \\ &= \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau \\ &= f_2(t)*f_1(t)\end{aligned}$$

Si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ ocupan posiciones continuas y son de orden exponencial, la transformada de Laplace de

$$\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau$$

se obtiene del modo siguiente:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau\right] = F_1(s)F_2(s) \tag{2-10}$$

en donde

$$F_1(s) = \int_0^\infty f_1(t)e^{-st}\,dt = \mathcal{L}[f_1(t)]$$

$$F_2(s) = \int_0^\infty f_2(t)e^{-st}\,dt = \mathcal{L}[f_2(t)]$$

Para comprobar la ecuación (2-10) observe que $f_1(t-\tau)1(t-\tau) = 0$ para $\tau > t$. Por tanto,

$$\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau = \int_0^\infty f_1(t-\tau)1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau$$

Así,

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau\right] = \mathcal{L}\left[\int_0^\infty f_1(t-\tau)1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau\right]$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^\infty f_1(t-\tau)1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau\right] dt$$

Si sustituimos $t - \tau = \lambda$ en esta última ecuación y modificamos el orden de integración, que en este caso es válido debido a que $f_1(t)$ y $f_2(t)$ se transforman mediante el sistema de Laplace, obtenemos:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau\right] = \int_0^\infty f_1(t-\tau)1(t-\tau)e^{-st}\,dt \int_0^\infty f_2(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^\infty f_1(\lambda)e^{-s(\lambda+\tau)}\,d\lambda \int_0^\infty f_2(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^\infty f_1(\lambda)e^{-s\lambda}\,d\lambda \int_0^\infty f_2(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau$$

$$= F_1(s)F_2(s)$$

Esta última ecuación obtiene la transformada de Laplace de la integral de convolución. A la inversa,si la transformada de Laplace de una función se determina mediante un producto de dos funciones de transformadas de Laplace, $F_1(s)F_2(s)$, la función de tiempo correspondiente (la transformada inversa de Laplace) se obtiene mediante la integral de convolución $f_1(t)*f_2(t)$.

La transformada de Laplace del producto de dos funciones del tiempo. La transformada de Laplace del producto de dos funciones que se pueden transformar mediante el método de Laplace $f(t)$ y $g(t)$ se obtiene mediante

$$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)G(s-p)\,dp \qquad (2\text{-}11)$$

Para demostrar esto, procedemos del modo siguiente: La transformada de Laplace del producto de $f(t)$ y $g(t)$ se escribe como

$$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \int_0^\infty f(t)g(t)e^{-st}\,dt \qquad (2\text{-}12)$$

Observe que la integral de inversión es

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}\,ds, \qquad \text{para } t > 0$$

en donde c es la abscisa de convergencia para F(s). Por tanto,

$$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_0^\infty \int_{cc-j\infty}^{c+j\infty} F(p)e^{pt}\,dp\; g(t)e^{-st}\,dt$$

Debido a la convergencia uniforme de las integrales consideradas, es posible invertir el orden de integración:

$$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)\,dp \int_{0}^{\infty} g(t)e^{-(s-p)t}\,dt$$

Si observamos que

$$\int_0^\infty g(t)e^{-(s-p)t}\,dt = G(s-p)$$

obtenemos

$$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)G(s-p)\,dp \qquad (2\text{-}13)$$

Resumen. La tabla 2-2 resume las propiedades y teoremas de la transformada de Laplace. Casi todas ellas se han derivado o comprobado en esta sección.

2-5 TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Como se señalo antes, la transformada inversa de Laplace se obtiene mediante la integral de inversión ofrecida en la ecuación (2-4). Sin embargo, la integral de inversión es complicada y, por tanto, no se recomienda su uso para encontrar transformadas inversas de Laplace de funciones que se encuentran con regularidad en la ingenierfa de control.

Un método conveniente de obtener las transformadas de Laplace es usar una tabla de transformadas de Laplace. En este caso, la transformada de Laplace debe tener una forma que se reconozca de inmediato en tal tabla. Con mucha frecuencia, es posible que la función en cuestión no aparezca en las tablas de transformadas de Laplace que posee el ingeniero. Si una transformada específica $F(s)$ no se encuentra en la tabla, puede expandirse en fracciones parciales y escribirse en términos de funciones simples de s para las cuales ya se conocen las transformadas inversas de Laplace.

Observe que estos métodos más sencillos para encontrar las transformadas inversas de Laplace se basan en que en la correspondencia única de una función de tiempo y su transformada inversa de Laplace prevalecen para cualquier función continua del tiempo.

Método de expansión en fracciones parciales para encontrar las transformadas inversas de Laplace. Para problemas de análisis de sistemas de control, F(s), la transformada de Laplace de f(t) ocurre con frecuencia en la forma:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

en donde $A(s)$ y B(s) son polinomios en s. En la expansión de $F(s) = B(s)/A(s)$ en fracciones parciales, es importante que la potencia más alta de s en $A(s)$ sea mayor que la potencia más alta de s en B(s). Si tal no es el caso, el numerador $B(s)$ debe dividirse entre el denominador $A(s)$ para producir un polinomio en s además de un residuo (una cociente de polinomios en s, cuyo numerador sea de un grado menor que el denominador).

Tabla 2-2 Propiedades de la transformada de Laplace

1	$\mathcal{L}[Af(t)] = AF(s)$
2	$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
3	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0\pm)$
4	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0\pm) - \dot{f}(0\pm)$
5	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0\pm)$ en donde $f^{(k-1)}(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(t)$
6	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\left[\int f(t)\,dt\right]_{t=0\pm}$
7	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\int \cdots \int f(t)(dt)^n\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s^{n-k+1}}\left[\int \cdots \int f(t)(dt)^k\right]_{t=0\pm}$
8	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s}$
9	$\int_0^\infty f(t)\,dt = \lim_{s\to 0} F(s)$ si $\int_0^\infty f(t)\,dt$ existe
10	$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s + a)$
11	$\mathcal{L}[f(t - \alpha)1(t - \alpha)] = e^{-\alpha s}F(s) \quad \alpha \geq 0$
12	$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$
13	$\mathcal{L}[t^2f(t)] = \frac{d^2}{ds^2} F(s)$
14	$\mathcal{L}[t^nf(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad n = 1, 2, 3, \ldots$
15	$\mathcal{L}\left[\frac{1}{t} f(t)\right] = \int_s^\infty F(s)\,ds$ si $\lim_{s\to 0} \frac{1}{t} f(t)$ existe
16	$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(as)$
17	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau)\,d\tau\right] = F_1(s)F_2(s)$
18	$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)G(s - p)\,dp$

Si $F(s)$ se separa en componentes,

$$F(s) = F_1(s) + F^*(s) + \cdots + F_n(s)$$

y si se pueden obtener con facilidad transformadas inversas de Laplace de $F_1(s), F_2(s), \ldots,$ F,(s), entonces

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] + \cdots + \mathcal{L}^{-1}[F_n(s)]$$
$$= f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t)$$

en donde $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ son las transformadas inversas de Laplace de $F_1(s), F_2(s), \ldots,$ $F_n(s)$, respectivamente. La transformada inversa de Laplace de $F(s)$ obtenida de tal modo es única, excepto, tal vez, en los puntos en los que es discontinua la función de tiempo. Cuando la función del tiempo es continua, la función del tiempo f(t) y su transformada de Laplace $F(s)$ tienen una correspondencia uno a uno.

La ventaja del enfoque de expansión en fracciones parciales es que los términos individuales de F(s), provenientes de la expansión en una forma de fracciones parciales, son funciones muy simples de s; en consecuencia, no es necesario consultar una tabla de transformadas de Laplace si memorizarnos varios pares simples de transformadas de Laplace. Sin embargo, debe señalarse que, al aplicar la técnica de expansión en fracciones parciales en la búsqueda de la transformada inversa de Laplace de $F(s) = B(s)/A(s)$, deben obtenerse con anticipación las raíces del polinomio del denominador $A(s)$. Es decir, este método no se aplica hasta que se ha factorizado el polinomio del denominador.

Expansión en fracciones parciales cuando $F(s)$ sólo involucra polos distintos. Considere $F(s)$ escrita en la forma factorizada

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)\cdots(s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2)\ldots(s + p_n)}, \qquad \text{para } m < n$$

en donde $p_1, p_2, \ldots, p_n$ y $z_1, z_2, \ldots, z_m$ son cantidades reales o complejas, pero para cada p_i o z_i complejo se tendrá el complejo conjugado de p_i o z_i, respectivamente. Si $F(s)$ sólo involucra polos distintos, puede expandirse en una suma de fracciones parciales simples del modo siguiente:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{a_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n} \tag{2-14}$$

en donde a_k (k = 1, 2, . . . , n) son constantes. El coeficiente a_k se denomina ***residuo*** del polo en $s = -p_k$. El valor de a_k se encuentra multiplicando ambos miembros de la ecuación (2-14) por $(s + p_k)$ y suponiendo que $s = -p_k$, esto nos lleva a

$$\left[(s + p_k)\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-p_k} = \left[\frac{a_1}{s + p_1}(s + p_k) + \frac{a_2}{s + p_2}(s + p_k) + \cdots + \frac{a_k}{s + p_k}(s + p_k) + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n}(s + p_k)\right]_{s=-p_k}$$
$$= a_k$$

Observamos que todos los términos expandidos se cancelan con excepción de a_k. Por tanto, el residuo a_k se encuentra a partir de

$$a_k = \left[(s + p_k)\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-p_k} \tag{2-15}$$

Observe que, debido a que $f(t)$ es una función real del tiempo, si p_1 y p_2 son complejos conjugados, en tal caso los residuos a_1 y a_2 también son complejos conjugados. Sólo necesita evaluarse uno de los conjugados, a_1 o a_2, porque el otro se conoce automáticamente.

Debido a que,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a_k}{s + p_k}\right] = a_k e^{-p_k t}$$

$f(t)$ se obtiene como

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \ldots + a_n e^{-p_n t} \qquad \text{para } t \geq 0$$

EJEMPLO 2-3 Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}$$

La expansión en fracciones parciales de $F(s)$ es

$$F(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{a_1}{s + 1} + \frac{a_2}{s + 2}$$

en donde a_1 y a_2 se encuentran mediante la ecuación (2-15):

$$a_1 = \left[(s + 1)\frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}\right]_{s=-1} = \left[\frac{s + 3}{s + 2}\right]_{s=-1} = 2$$

$$a_2 = \left[(s + 2)\frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}\right]_{s=-2} = \left[\frac{s + 3}{s + 1}\right]_{s=-2} = -1$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s + 1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s + 2}\right] \\ &= 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2-4 Obtenga la transformada inversa de Laplace de

$$G(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s + 1)(s + 2)}$$

Aquí, dado que el grado del polinomio del numerador es mayor que el polinomio del denominador, debemos dividir el numerador entre el denominador.

$$G(s) = s + 2 + \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}$$

Observe que la transformada de Laplace de la función impulso unitario S(t) es 1 y que la transformada de Laplace de $d\delta(t)/dt$ es s. El tercer término del segundo miembro de esta última ecuación es $F(s)$ en el ejemplo 2-3. Por tanto, la transformada inversa de Laplace de G(s) se obtiene como

$$g(f) = \frac{d}{dt} S(t) + 2\delta(t) + 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad \text{para } t \geq 0 -$$

EJEMPLO 2-5 Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5}$$

Observe que el polinomio del denominador se factoriza como

$$s^2 + 2s + 5 = (s + 1 + j2)(s + 1 - j2)$$

Si la función $F(s)$ contiene un par de polos complejos conjugados, es conveniente no expandir $F(s)$ en las fracciones parciales acostumbradas, sino expandirlas en la suma de una función seno amortiguada y una función coseno amortiguada.

Si observamos que $s^2 + 2s + 5 = (s + 1)^2 + 2^2$ y nos remitimos a las transformadas de Laplace de $e^{-\alpha t}$ sen ωt y $e^{-\alpha t}$ cos ωt, rescritas por tanto,

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega t] = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cos \omega t] = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

la $F(s)$ dada se escribe como una suma de una función seno amortiguada y una función coseno amortiguada.

$$F(s) = \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5} = \frac{10 + 2(s + 1)}{(s + 1)^2 + 2^2}$$

$$= 5\frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2} + 2\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2}$$

De aquí se sigue que

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

$$= 5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2}\right] + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2}\right]$$

$$= 5e^{-t} \operatorname{sen} 2t + 2e^{-t} \cos 2t, \quad \text{para } t \geq 0$$

Expansión en fracciones parciales cuando $F(s)$ involucra polos múltiples. En lugar de analizar el caso general, usaremos un ejemplo para mostrar cómo obtener la expansión en fracciones parciales de $F(s)$. (Véase también el problema A-2-16.)

Considere la siguiente F(s):

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3}$$

La expansión en fracciones parciales de esta $F(s)$ involucra tres términos,

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_1}{s + 1} + \frac{b_2}{(s + 1)^2} + \frac{b_3}{(s + 1)^3}$$

en donde b_3, b_2 y b_1 se determinan del modo siguiente. Si multiplicamos ambos miembros de esta última ecuación por $(s + 1)^3$, tenemos que

$$(s + 1)^3 \frac{B(s)}{A(s)} = b_1(s + 1)^2 + b_2(s + 1) + b_3 \qquad (2\text{-}16)$$

Por tanto, suponiendo que s = -1, la ecuación (2-16) produce

$$\left[(s + 1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1} = b_3$$

Asimismo, la diferenciación de ambos miembros de la ecuación (2-16) con respecto a s produce

$$\frac{d}{ds}\left[(s + 1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right] = b_2 + 2b_1(s + 1) \qquad (2\text{-}17)$$

Si suponemos que $s = -1$ en la ecuación (2-17), entonces,

$$\frac{d}{ds}\left[(s + 1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1} = b_2$$

Diferenciando ambos miembros de la ecuación (2-17) con respecto a s, el resultado es

$$\frac{d^2}{ds^2}\left[(s + 1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right] = 2b_1$$

A partir del análisis precedente, se observa que los valores de b_3, b_2 y b_1 se encuentran sistemáticamente del modo siguiente:

$$\begin{aligned} b_3 &= \left[(s + 1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1} \\ &= (s^2 + 2s + 3)_{s=-1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \left\{\frac{d}{ds}\left[(s + 1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right]\right\}_{s=-1} \\ &= \left[\frac{d}{ds}(s^2 + 2s + 3)\right]_{s=-1} \\ &= (2s + 2)_{s=-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{2!}\left\{\frac{d^2}{ds^2}\left[(s + 1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right]\right\}_{s=-1} \\ &= \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{ds^2}(s^2 + 2s + 3)\right]_{s=-1} \\ &= \frac{1}{2}(2) = 1 \end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0}{(s+1)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^3}\right] \\ &= e^{-t} + 0 + t^2 e^{-t} \\ &= (1 + t^2)e^{-t}, \qquad \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

Comentarios. Para funciones complicadas con denominadores que involucran polinomios de orden superior, una expansión en fracciones parciales puede tomarnos mucho tiempo. En tal caso, se recomienda el uso de MATLAB. (Véase sección 2-6.)

2-6 EXPANSIÓN EN FRACCIONES PARCIALES CON MATLAB

MATLAB tiene un comando para obtener la expansión en fracciones parciales de $B(s)/A(s)$.

Considere la función de transferencia

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

en donde algunos de los a_i y b_j pueden ser cero. En MATLAB, los vectores renglón num y den especifican los coeficientes del numerador y del denominador en la función de transferencia. Es decir,

```
num = [bo b1 . . . bn]
den = [1  a1 . . . an]
```

El comando

```
[r,p,k] = residue(num,den)
```

encuentra los residuos, los polos y los términos directamente de una expansión en fracciones parciales del cociente de dos polinomios *B(s) y A(s).*

La expansión en fracciones parciales de $B(s)/A(s)$ se obtiene mediante

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{r(1)}{s - p(1)} + \frac{r(2)}{s - p(2)} + \cdots + \frac{r(n)}{s - p(n)} + k(s) \tag{2-18}$$

Comparando las ecuaciones (2-14) y (2−18), observamos que $p(1) = -p_1, p(2) = -p_2, \ldots, p(n) = -p_n$; r(l) = a_1, r(2) = $a_2, \ldots, r(n) = a_n$. *[k(s)* es un término directo.]

EJEMPLO 2-6 Considere la siguiente función de transferencia:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Para esta función,

```
num = [2 5 3 61
den = [1 6 ll 6]
```

El comando

```
[r,p,k] = residue(num,den)
```

Proporciona el resultado siguiente:

```
[r,p,k] = residue(num,den)

r =

    -6.0000
    -4.0000
     3.0000


p =

    -3.0000
    -2.0000
    -1.0000


k =
```

(Observe que los residuos que se regresan en el vector columna r, las posiciones de polos en el vector columna p y el término directo en el vector renglón k.) Ésta es la representación en MATLAB de la siguiente expansión en fracciones parciales de $B(s)/A(s)$;

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$= \frac{-6}{s+3} + \frac{-4}{s+2} + \frac{3}{s+1} + 2$$

El comando

```
[num,den] = residue(r,p,k)
```

en donde r, p y k, están como se obtienen en el resultado de MATLAB anterior, convierte la expansión en fracciones parciales de regreso a la razón de polinomio $B(s)/A(s)$ del modo siguiente:

```
[num,den] = residue(r,p,k)

num =

    2.0000    5.0000    3.0000    6.0000

den =

    1.0000    6.0000   11.0000    6.0000
```

Observe que si $p(j) = p(j + 1) = \ldots = p(j + m - 1)$[esto es, $p_j = p_{j+1} = \ldots = p_{j+m-1}$], el polo $p(j)$ es un polo de multiplicidad m. En este caso, la expansión incluye términos en la forma

$$\frac{r(j)}{s - p(j)} + \frac{r(j+1)}{[s - p(j)]^2} + \cdots + \frac{r(j + m - 1)}{[s - p(j)]^m}$$

Consulte los detalles en el ejemplo 2-7.

EJEMPLO 2-7 Expanda la $B(s)/A(s)$ siguiente en fracciones parciales con MATLAB.

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3} = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

Para esta función, tenemos

```
num = [0  1  2  3]
den = [1  3  3  1]
```

El comando

```
[r,p,k] = residue(num,den)
```

proporciona el resultado que aparece en la página siguiente. Es la representación en MATLAB de la expansión en fracciones parciales siguiente de $B(s)/A(s)$:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{s + 1} + \frac{0}{(s + 1)^2} + \frac{2}{(s + 1)^3}$$

Observe que el término k directo es cero.

```
num = [0 1 2 31;
den = [1 3 3 ll;
[r,p,k] = residue(num,den)

r =

    1 .0000
   0.0000
   2.0000

p =

  -1 .0000
  -1 .0000
  -1 .0000

k =

    []
```

2-7 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES E INVARIANTES CON EL TIEMPO

En esta sección nos concentraremos en el uso del método de transformada de Laplace para solucionar ecuaciones diferenciales lineales e invariantes con el tiempo.

El método de la transformada de Laplace produce la solución completa (la solución complementaria y la solución particular) de las ecuaciones diferenciales lineales e invariantes con el tiempo. Los métodos clásicos para encontrar la solución completa de una ecuación diferencial requieren de la evaluación de las constantes de integración a partir de las condiciones iniciales. Sin embargo, en el caso del método de la transformada de Laplace, no existe este requerimiento, porque las condiciones iniciales se incluyen automáticamente en la transformada de Laplace de la ecuación diferencial.

Si todas las condiciones iniciales son cero, entonces la transformada de Laplace de la ecuación diferencial se obtiene simplemente sustituyendo d/dt por s, d^2/dt^2 por s^2, y así sucesivamente.

La solución a las ecuaciones diferenciales lineales e invariantes con el tiempo mediante el método de transformada de Laplace implica dos pasos.

1. Se toma la transformada de Laplace de cada término de la ecuación diferencial determinada, se convierte la ecuación diferencial en una ecuación algebraica en s y se obtiene

la expresión para la transformada de Laplace de la variable dependiente reordenando la ecuación algebraica.

2. La solución en el tiempo de la ecuación diferencial se obtiene encontrando la transformada inversa de Laplace de la variable dependiente.

En el análisis siguiente, se usan dos ejemplos para comprobar la solución a ecuaciones diferenciales lineales e invariantes con el tiempo mediante el método de transformada de Laplace.

EJEMPLO 2-8 Encuentre la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0, \qquad x(0) = a, \qquad \dot{x}(0) = b$$

en donde a y b son constantes.

Escribiendo la transformada de Laplace de x(t) como X(s), o bien,

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$$

obtenemos

$$\mathcal{L}[\dot{x}] = sX(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}[\ddot{x}] = s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

Y, por tanto, la ecuación diferencial determinada se convierte en

$$[s^2X(s) - sx(0) - i(O)] + 3[sX(s) - x(O)] + 2X(s) = 0$$

Sustituyendo las condiciones iniciales dadas en esta última ecuación, obtenemos

$$[s^2X(s) \quad as - b] + 3[sX(s) \quad a] + 2X(s) = 0$$

o bien

$$(s^2 + 3s + 2)X(s) = as + b + 3a$$

Despejando para X(s), tenemos que,

$$\text{X(s)} = \frac{as + b + 3a \qquad as + b + 3a}{s^2 + 3s + 2 = (\text{s} + \text{l})(\text{s} + 2)} = \frac{2a + b}{\text{s} + 1} \; \underline{a} \; \frac{+ \; b}{s + 2}$$

La transformada inversa de Laplace de X(s) nos da

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2a + b}{s + 1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a + b}{s + 2}\right]$$

$$= (2a + b)e^{-t} - (a + b)e^{-2t}, \qquad \text{para } t \geq 0$$

lo cual es la solución de la ecuación diferencial determinada. Observe que las condiciones iniciales a y b aparecen en la solución. Por tanto, x(t) no tiene constantes indeterminadas.

EJEMPLO 2-9 Encuentre la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 3, \qquad x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 0$$

Si observamos que $\mathcal{L}[3] = 3/s$, $\dot{x}(0) = 0$, y que $\dot{x}(0) = 0$, la transformada de Laplace de la ecuación diferencial se convierte en

$$s^2X(s) + 2sX(s) + 5X(s) = \frac{3}{s}$$

Despejando para $X(s)$ obtenemos

$$X(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{3}{5}\frac{1}{s} - \frac{3}{5}\frac{s + 2}{s^2 + 2s + 5}$$

$$= \frac{3}{5}\frac{1}{s} - \frac{3}{10}\frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2} - \frac{3}{5}\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2}$$

De ahí que la transformada inversa de Laplace se convierta en

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$

$$= \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{3}{10}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2}\right] - \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2}\right]$$

$$= \frac{3}{5} - \frac{3}{10}e^{-t}\operatorname{sen} 2t - \frac{3}{5}e^{-t}\cos 2t \qquad \text{para } t \geq 0$$

lo cual es la solución a la ecuación diferencial determinada.

EJEMPLO DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

A-2-1. Encuentre los polos de la siguiente F(s):

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-s}}$$

Solución. Los polos se encuentran a partir de

$$e^{-s} = 1$$

o bien

$$e^{-(\sigma + j\omega)} = e^{-\sigma}(\cos \omega - j \operatorname{sen} \omega) = 1$$

A partir de esto se concluye que $\sigma = 0$, $\omega = \pm 2n\pi (n = 0, 1, 2, \ldots)$. Por tanto, los polos se localizan en

$$s = \pm j2n\pi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

A-2-2. Encuentre la transformada de Laplace de $f(t)$ definida mediante

$$f(t) = 0, \qquad \text{para } t < 0$$

$$= te^{-3t}, \qquad \text{para } t \geq 0$$

Solución. Dado que,

$$\mathcal{L}[t] = G(s) = \frac{1}{s^2}$$

remitiéndonos a la ecuación (2-6) obtenemos

$$F(s) = \mathcal{L}[te^{-3t}] = G(s + 3) = \frac{1}{(s + 3)^2}$$

A-2-3. ¿Cuál es la transformada de Laplace de

$$f(t) = 0, \qquad \text{para } t < 0$$

$$= \operatorname{sen}(\omega t + \theta), \text{ para } t \geq 0$$

en donde θ es una constante?

Solución. Si observamos que

$$\text{sen}\,(\omega t + \theta) = \text{sen}\,\omega t \cos\theta + \cos\omega t \,\text{sen}\,\theta$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\,[\text{sen}\,(\omega t + \theta)] &= \cos\theta\,\mathcal{L}\,[\text{sen}\,\omega t] + \text{sen}\,\theta\,\mathcal{L}\,[\cos\omega t] \\ &= \cos\theta\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2} + \text{sen}\,\theta\,\frac{s}{s^2+\omega^2} \\ &= \frac{\omega\cos\theta + s\,\text{sen}\,\theta}{s^2+\omega^2}\end{aligned}$$

A-2-4. Encuentre la transformada de Laplace $F(s)$ de la función $f(t)$ que se muestra en la figura 2-3. También encuentre el límite de $F(s)$ conforme a tiende a cero.

Solución. La función $f(t)$ se puede escribir como:

$$f(t) = \frac{1}{a^2}\,\text{l(t)} - \frac{2}{a^2}\,1(t-a) + \frac{1}{a^2}\,1(t-2a)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] \\ &= \frac{1}{a^2}\,\mathcal{L}[1(t)] - \frac{2}{a^2}\,\mathcal{L}[1(t-a)] + \frac{1}{a^2}\,\mathcal{L}[1(t-2a)] \\ &= \frac{1}{a^2 s} - \frac{2}{a^2 s}e^{-as} + \frac{1}{a^2 s}e^{-2as} \\ &= \frac{1}{a^2 s}\,(1 - 2e^{-as} + e^{-2as})\end{aligned}$$

Conforme a tiende a cero, obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 0} F(s) &= \lim_{a\to 0}\frac{1-2e^{-as}+e^{-2as}}{a^2 s} = \lim_{a\to 0}\frac{\dfrac{d}{da}\,(1-2e^{-as}+e^{-2as})}{\dfrac{d}{da}\,(a^2 s)} \\ &= \lim_{a\to 0}\frac{2se^{-as}-2se^{-2as}}{2as} = \lim_{a\to 0}\frac{e^{-as}-e^{-2as}}{a} \\ &= \lim_{a\to 0}\frac{\dfrac{d}{da}\,(e^{-as}-e^{-2as})}{\dfrac{d}{da}\,(a)} = \lim_{a\to 0}\frac{-se^{-as}+2se^{-2as}}{1} \\ &= -s + 2s = s\end{aligned}$$

A-2-5. Encuentre el valor inicial de $df(t)/dt$ cuando la transformada de Laplace de $f(t)$ se obtiene mediante

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{2s+1}{s^2+s+1}$$

Solución. Usando el teorema de valor inicial,

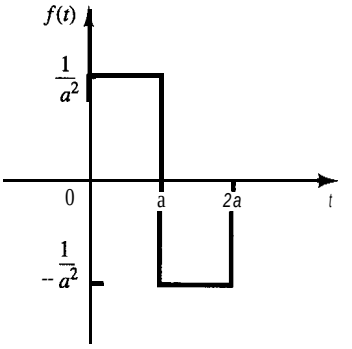


Figura 2-3
Función $f(t)$.

$$\lim_{t\to 0+} f(t) = f(0+) = \lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s(2s+1)}{s^2+s+1} = 2$$

Dado que la transformada $\mathcal{L}_+$ de $df(t)/dt = g(t)$ se obtiene mediante

$$\mathcal{L}_+[g(t)] = sF(s) - f(0+)$$
$$= \frac{s(2s+1)}{s^2+s+1} - 2 = \frac{-s-2}{s^2+s+1}$$

el valor inicial de $df(t)/dt$ se obtiene como

$$\lim_{t\to 0+} \frac{df(t)}{dt} = g(0+) = \lim_{s\to\infty} s[sF(s) - f(0+)]$$
$$= \lim_{s\to\infty} \frac{-s^2-2s}{s^2+s+1} = -1$$

A-2-6. La derivada de la función impulso unitario $\delta(t)$ se denomina función *doblete unitario.* (Por tanto, la integral de la función doblete unitario es la función impulso unitario.) Matemáticamente, es posible obtener un ejemplo de la función doblete unitario, que por lo general se representa mediante $u_2(t)$, mediante

$$u_2(t) = \lim_{t_0\to 0} \frac{1(t) - 2[1(t-t_0)] + 1(t-2t_0)}{t_0^2}$$

Obtenga la transformada de **Laplace** de $u_2(t)$.

Solución. La transformada de Laplace de $u_2(t)$ se obtiene mediante

$$\mathcal{L}[u_2(t)] = \lim_{t_0\to 0} \frac{1}{t_0^2}\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-t_0 s} + \frac{1}{s}e^{-2t_0 s}\right)$$
$$= \lim_{t_0\to 0} \frac{1}{t_0^2 s}\left[1 - 2\left(1 - t_0 s + \frac{t_0^2 s^2}{2} + \cdots\right) + \left(1 - 2t_0 s + \frac{4t_0^2 s^2}{2} + \cdots\right)\right]$$
$$= \lim_{t_0\to 0} \frac{1}{t_0^2}\left[t_0^2 s^2 + (\text{términos de orden superior en } t_0 s)\right] = s$$

A-2-7. Encuentre la transformada de **Laplace** de $f(t)$ definida mediante

$$f(t) = 0, \quad \text{para } t < 0$$
$$= t^2 \operatorname{sen} \omega t, \text{ para } t \geq 0$$

Solución. Dado que

$$\mathcal{L}[\text{sen } \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Si aplicamos a este problema el teorema de diferenciación compleja

$$\mathcal{L}[t^2 f(t)] = \frac{d^2}{ds^2} F(s)$$

obtenemos

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[t^2 \text{ sen } \omega t] = \frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right] = \frac{-2\omega^3 + 6\omega s^2}{(s^2 + \omega^2)^3}$$

A-2-8. Demuestre que si f(t) es de orden exponencial y que si existe $\int_0^\infty$ f(t) *dt* [lo que significa que $\int_0^\infty$ f(t) *dt* supone un valor definido], entonces,

$$\int_0^\infty f(t)\, dt = \lim_{s \to 0} F(s)$$

en donde $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$.

Solución. Observe que

$$\int_0^\infty f(t)\, dt = \lim_{t \to \infty} \int_0^t f(t)\, dt$$

Remitiéndonos a la ecuación (2−9),

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\, dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

Dado que $\int_0^\infty$ f(t) *dt* existe, aplicando el teorema de valor final a este caso,

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t f(t)\, dt = \lim_{s \to 0} s \frac{F(s)}{s}$$

o bien

$$\int_0^\infty f(t)\, dt = \lim F(s)$$

A-2-9. Determine la transformada de Laplace de la integral de convolución:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t \tau[1 - e^{-(t-\tau)}]\, d\tau = \int_0^t (t - \tau)(1 - e^{-\tau})\, d\tau$$

en donde

$$f_1(t) = f_2(t)\, 0, \quad \text{para } t < 0$$
$$f_1(t) = t, \quad \text{para } t \geq 0$$
$$f_2(t) = 1 - e^{-t}, \quad \text{para } t \geq 0$$

Solución. Observe que

$$\mathcal{L}[t] = F_1(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}[1 - e^{-t}] = F_2(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

La transformada de Laplace de la integral de convolución se obtiene mediante

$$\mathcal{L}[f_1(t)*f_2(t)] = F_1(s)F_2(s) = \frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)$$

$$= \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

Para verificar que ésta es en realidad la transformada de Laplace de la integral de convolución, primero se hace la integral de convolución y después tomemos la transformada de Laplace.

$$f_1(t)*f_2(t) = \int_0^t \tau[1 - e^{-(t-\tau)}]\,d\tau = \int_0^t (t-\tau)(1 - e^{-\tau})\,d\tau$$

$$= \frac{t^2}{2} - t + 1 - e^{-t}$$

Y, por tanto,

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^2}{2} - t + 1 - e^{-t}\right] = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

A-2-10. Demuestre que si $f(t)$ es una función periódica con un periodo T, entonces,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}\,dt}{1 - e^{-Ts}}$$

Solución.

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-st}\,dt$$

Si cambiamos la variable independiente de t a τ, en donde $\tau = t - nT$, tenemos que

$$\mathcal{L}[f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} \int_0^T f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau$$

Considerando que,

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} = 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \cdots$$

$$= 1 + e^{-Ts}(1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \cdots)$$

$$= 1 + e^{-Ts}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs}\right)$$

obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}$$

De aquí se concluye que

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}\,dt}{1 - e^{-Ts}}$$

A-2-11. ¿Cuál es la transformada de Laplace de la función periódica que aparece en la figura 2−4?

Solución. Observe que

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t)e^{-st}\,dt &= \int_0^{T/2} e^{-st}\,dt + \int_{T/2}^{T} (-1)e^{-st}\,dt \\ &= \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^{T/2} - \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_{T/2}^{T} \\ &= \frac{e^{-(1/2)Ts} - 1}{-s} + \frac{e^{-Ts} - e^{-(1/2)Ts}}{s} \\ &= \frac{1}{s}\left[e^{-Ts} - 2e^{-(1/2)Ts} + 1\right] \\ &= \frac{1}{s}\left[1 - e^{-(1/2)Ts}\right]^2\end{aligned}$$

Remitiéndonos al problema A-2-10, tenemos que

$$\begin{aligned}F(s) &= \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}\,dt}{1 - e^{-Ts}} = \frac{(1/s)[1 - e^{-(1/2)Ts}]^2}{1 - e^{-Ts}} \\ &= \frac{1 - e^{-(1/2)Ts}}{s[1 + e^{-(1/2)Ts}]} = \frac{1}{s}\tanh\frac{Ts}{4}\end{aligned}$$

A-2-12. Encuentre la transformada inversa de Laplace de F(s), en donde

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

Solución. Dado que

$$s^2 + 2s + 2 = (s + 1 + j1)(s + 1 - j1)$$

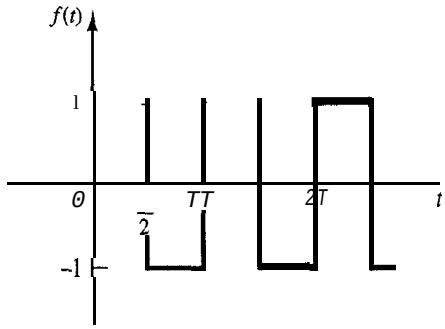


Figura 2–4
Función periódica (onda cuadrada).

observamos que $F(s)$ involucra un par de polos complejos conjugados y, por tanto, se expande $F(s)$ a la forma:

$$F(s) \quad \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2 s + a_3}{s^2 + 2s + 2}$$

en donde a_1, a_2 y a_3 se determinan a partir de

$$1 = a_1(s^2 + 2s + 2) + (a_2 s + a_3)s$$

Si comparamos los coefientes de s^2, s y s^0, términos de ambos miembros de esta última ecuación, obtenemos

$$a_1 + a_2 = 0, \qquad 2a_1 + a_3 = 0, \qquad 2a_1 = 1$$

a partir de lo cual

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_2 = -\frac{1}{2}, \qquad a_3 = -1$$

Por tanto,

$$F(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s + 2}{s^2 + 2s + 2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s + 1)^2 + 1^2} - \frac{1}{2}\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1^2}$$

La transformada inversa de Laplace de $F(s)$ resulta

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}e^{-t}\cos t, \qquad \text{para } t \geq 0$$

A-2-13. Obtenga la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{5(s + 2)}{s^2(s + 1)(s + 3)}$$

Solución.

$$F(s) = \frac{5(s + 2)}{s^2(s + 1)(s + 3)} = \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{a_1}{s + 1} + \frac{a_2}{s + 3}$$

en donde

$$a_1 = \left.\frac{5(s + 2)}{s^2(s + 3)}\right|_{s=-1} = \frac{5}{2}$$

$$a_2 = \left.\frac{5(s + 2)}{s^2(s + 1)}\right|_{s=-3} = \frac{5}{18}$$

$$b_2 = \left.\frac{5(s + 2)}{(s + 1)(s + 3)}\right|_{s=0} = \frac{10}{3}$$

$$b_1 = \frac{d}{ds}\left[\frac{5(s + 2)}{(s + 1)(s + 3)}\right]_{s=0}$$

$$= \left.\frac{5(s + 1)(s + 3) - 5(s + 2)(2s + 4)}{(s + 1)^2(s + 3)^2}\right|_{s=0} = -\frac{25}{9}$$

Por tanto,

$$F(s) = -\frac{25}{9}\frac{1}{s} + \frac{10}{3}\frac{1}{s^2} + \frac{5}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{5}{18}\frac{1}{s+3}$$

La transformada inversa de Laplace de $F(s)$ es

$$f(t) = -\frac{25}{9} + \frac{10}{3}t + \frac{5}{2}e^{-t} + \frac{5}{18}e^{-3t}, \quad \text{para } t \geq 0$$

A-2-14. Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5}{s(s+1)}$$

Solución. Dado que el polinomio del numerador es de un grado mayor que el polinomio del denominador, dividiendo el numerador entre el denominador, hasta que el residuo es una fracción, obtenemos

$$F(s) = s^2 + s + 2 + \frac{2s+5}{s(s+1)} = s^2 + s + 2 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s+1}$$

en donde,

$$a_1 = \left.\frac{2s+5}{s+1}\right|_{s=0} = 5$$

$$a_2 = \left.\frac{2s+5}{s}\right|_{s=-1} = -3$$

con lo que se concluye que

$$F(s) = s^2 + s + 2 + \frac{5}{s} - \frac{3}{s+1}$$

La transformada inversa de Laplace de $F(s)$ es

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{d^2}{dt^2}\delta(t) + \frac{d}{dt}\delta(t) + 2\delta(t) + 5 - 3e^{-t}, \quad \text{para } t \geq 0-$$

A-2-15. Obtenga la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) \quad \frac{1}{s(s^2+\omega^2)}$$

Solución.

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2+\omega^2)} = \frac{1}{\omega^2}\frac{1}{s} - \frac{1}{\omega^2}\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Por tanto, la transformada inversa de Laplace de $F(s)$ se obtiene como

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{\omega^2}(1 - \cos \omega t), \quad \text{para } t \geq 0$$

A-2-16. Obtenga la transformada inversa de Laplace de la $F(s)$ siguiente:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{(s+p_1)^r(s+p_{r+1})(s+p_{r+2})\cdots(s+p_n)}$$

en donde el grado de la $B(s)$ polinomial es menor que la $A(s)$ polinomial.

Solución. La expansión en fracciones parciales de $F(s)$ es:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_1}{s + p_1} + \frac{b_2}{(s + p_1)^2} + \cdots + \frac{b_{r-1}}{(s + p_1)^{r-1}} + \frac{b_r}{(s + p_1)^r} + \frac{a_{r+1}}{s + p_{r+1}} + \frac{a_{r+2}}{s + p_{r+2}} + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n} \tag{2-19}$$

en donde $b_r, b_{r-1}, \ldots, b_1$ se obtienen mediante:

$$b_r = \left[(s + p_1)^r \frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-p_1}$$

$$b_{r-1} = \left\{\frac{d}{ds}\left[(s + p_1)^r \frac{B(s)}{A(s)}\right]\right\}_{s=-p_1}$$

$$b_{r-j} = \frac{1}{j!}\left\{\frac{d^j}{ds^j}\left[(s + p_1)^r \frac{B(s)}{A(s)}\right]\right\}_{s=-p_1}$$

$$b_1 = \frac{1}{(r-1)!}\left\{\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}\left[(s + p_1)^r \frac{B(s)}{A(s)}\right]\right\}_{s=-p_1}$$

Las relaciones anteriores para las b se obtienen del modo siguiente. Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación (2-19) por $(s + p_1)^r$ y suponemos que s tiende a $-p_1$, obtenemos

$$b_r = \left[(s + p_1)^r \frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-p_1}$$

Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación (2− 19) por $(s + p_1)^r$ y después diferenciamos con respecto a s,

$$\frac{d}{ds}\left[(s + p_1)^r \frac{B(s)}{A(s)}\right] = b_r \frac{d}{ds}\left[\frac{(s + p_1)^r}{(s + p_1)^r}\right] + b_{r-1}\frac{d}{ds}\left[\frac{(s + p_1)^r}{(s + p_1)^{r-1}}\right] + \cdots + b_1 \frac{d}{ds}\left[\frac{(s + p_1)^r}{s + p_1}\right] + a_{r+1}\frac{d}{ds}\left[\frac{(s + p_1)^r}{s + p_{r+1}}\right] + \cdots + a_n \frac{d}{ds}\left[\frac{(s + p_1)^r}{s + p_n}\right]$$

El primer término del segundo miembro de esta ecuación desaparece. El segundo término se convierte en b_{r-1}. Cada uno de los otros términos contiene alguna potencia de $(s + p_1)$ como factor, con el resultado de que se eliminan estos términos cuando se hace que s tienda a $-p_1$. Por tanto,

$$b_{r-1} = \lim_{s \to -p_1} \frac{d}{ds}\left[(s + p_1)^r \frac{B(s)}{A(s)}\right] = \left\{\frac{d}{ds}\left[(s + p_1)^r \frac{B(s)}{A(s)}\right]\right\}_{s=-p_1}$$

Del mismo modo, mediante diferenciaciones sucesivas con respecto as, y suponiendo que s tienda a $-p_1$, obtenemos ecuaciones para la b_{r-j}, en donde $j = 2, 3, \ldots, r - 1$.

Observe que la transformada inversa de Laplace de $1/(s + p_1)^n$ se obtiene mediante

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+p_1)^n}\right] = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-p_1 t}$$

Las constantes $a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_n$ en la ecuación (2-19) se determinan a partir de

$$a_k = \left[(s+p_k)\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-p_k}, \qquad \text{para } k = r+1, r+2, \ldots, n$$

A continuación se obtiene la transformada inversa de Laplace de $F(s)$ del modo siguiente:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \left[b_1 + b_2 t + \cdots + \frac{b_{r-1}}{(r-2)!}t^{r-2} + \frac{b_r}{(r-1)!}t^{r-1}\right]e^{-p_1 t} + a_{r+1}e^{-p_{r+1}t} + a_{r+2}e^{-p_{r+2}t} + \cdots + a_n e^{-p_n t}, \qquad \text{para } t \geq 0$$

A-2-17. Encuentre la transformada de Laplace de la ecuación diferencial siguiente:

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 6x = 0, \qquad x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 3$$

Si tomamos la transformada inversa de Laplace de X(s), obtenemos la solución del tiempo *x(t)*.

Solución. La transformada de Laplace de la ecuación diferencial es

$$s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 3sX(s) - 3x(0) + 6X(s) = 0$$

Si sustituimos las condiciones iniciales y despejamos X(s),

$$X(s) \quad \frac{3}{s^2+3s+6} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\frac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{(s+1.5)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}$$

La transformada inversa de Laplace de X(s) es

$$x(t) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}e^{-1.5t}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)$$

PROBLEMAS

B-2-1. Encuentre las transformadas de Laplace de las funciones siguientes:

(a) $f_1(t) = 0$, para $t < 0$
$= e^{-0.4t}\cos 12t$, para $t \geq 0$

(b) $f_2(t) = 0$, para $t < 0$
$= \operatorname{sen}\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$ para $t \geq 0$

B-2-2. Encuentre las transformadas de Laplace de las funciones siguientes:

(a) $f_1(t) = 0$, para $t < 0$
$= 3\operatorname{sen}(5t + 45°)$ para $t \geq 0$

(b) $f_2(t) = 0$, para $t < 0$
$= 0.03(1 - \cos 2t)$ para $t \geq 0$

B-2-3. Obtenga la transformada de Laplace de la función definida mediante

$f(t) = 0$, para $t < 0$
$= t^2e^{-at}$ para $t \geq 0$

B-2-4. Obtenga la transformada de Laplace de la función definida mediante

$$f(t) = 0, \qquad \text{para } t < 0$$
$$= \cos 2wt \cos 3\omega t, \text{ para } t \geq 0$$

B-2-5. ¿Cuál es la transformada de Laplace de la función $f(t)$ que se muestra en la figura 2−5?

B-2-6. Obtenga la transformada de Laplace de la función $f(t)$ que se muestra en la figura 2-6.

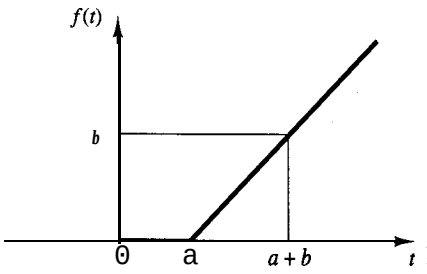


Figura 2–5 Función $f(t)$.

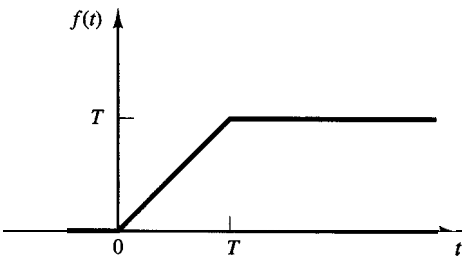


Figura 2–6 Función f(t).

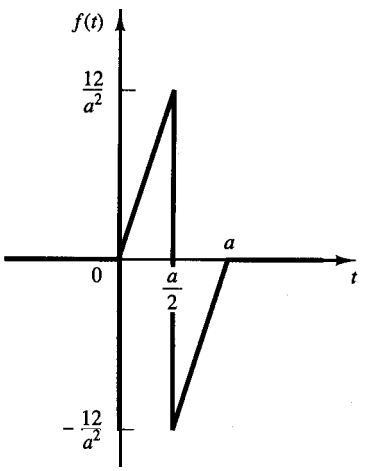


Figura27 Función $f(t)$.

B-2-7. Encuentre la transformada de Laplace de la función $f(t)$ que aparece en la figura 2-7. Asimismo, encuentre el límite de $\mathcal{L}[f(t)]$ conforme a tiende a cero.

B-2-8. Aplicando el teorema de valor final, encuentre el valor final de $f(t)$ cuya transformada de Laplace se obtiene mediante

$$F(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

Verifique este resultado tomando la transformada inversa de Laplace de $F(s)$ y suponiendo que $t \to \infty$.

B-2-9. Dado

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

determine los valores de $f(0+)$ y $\dot{f}(0+)$. (Use el teorema de valor inicial.)

B-2-10. Encuentre la transformada inversa de Laplace de:

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s^2+s+1)}$$

B-2-11. Encuentre las transformadas inversas de Laplace de las funciones siguientes:

(a) $$F_1(s) = \frac{6s+3}{s^2}$$

(b) $$F_2(s) = \frac{5s+2}{(s+1)(s+2)^2}$$

B-2-12. Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$$

B-2-13. ¿Cuál es la solución de la siguiente ecuación diferencial?

$$2\ddot{x} + 7\dot{x} + 3x = 0, \qquad x(0) = 3, \qquad \dot{x}(0) = 0$$

B-2-14. Resuelva la ecuación diferencial

$$\dot{x} + 2x = \delta(t), \qquad x(0-) = 0$$

B-2-15. Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0, \qquad x(0) = a, \qquad \dot{x}(0) = b$$

en donde a y b son constantes.

B-2-16. Obtenga la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{x} + ax = A \text{ sen } \omega t, \qquad x(0) = b$$

Modelado matemático de sistemas dinámicos

3-1 INTRODUCCIÓN

Al estudiar los sistemas de control, el lector debe ser capaz de modelar sistemas dinámicos y analizar las características dinámicas. Un modelo matemático de un sistema dinámico se define como un conjunto de ecuaciones que representan la dinámica del sistema con precisión o, al menos, bastante bien. Tenga presente que un modelo matemático no es único para un sistema determinado. Un sistema puede representarse en muchas formas diferentes, por lo que puede tener muchos modelos matemáticos, dependiendo de cada perspectiva.

La dinámica de muchos sistemas, ya sean mecánicos, eléctricos, térmicos, económicos, biológicos, etc., se describe en términos de ecuaciones diferenciales. Dichas ecuaciones diferenciales se obtienen a partir de leyes físicas que gobiernan un sistema determinado, como las leyes de Newton para sistemas mecánicos y las leyes de Kirchhoff para sistemas eléctricos. Debemos siempre recordar que obtener un modelo matemático razonable es la parte más importante de todo el análisis.

Modelos matemáticos. Los modelos matemáticos pueden adoptar muchas formas distintas. Dependiendo del sistema del que se trate y de las circunstancias específicas, un modelo matemático puede ser más conveniente que otros. Por ejemplo, en problemas de control óptimo, es provechoso usar representaciones en el espacio de estados. En cambio, para los análisis de la respuesta transitoria o de la respuesta en frecuencia de sistemas lineales con una entrada y una salida invariantes con el tiempo, la representación mediante la función de transferencia puede ser más conveniente que cualquier otra. Una vez obtenido un modelo matemático de un sistema, se usan diversos recursos analíticos, así como computadoras, para estudiarlo y sintetizarlo.

Simplicidad contra precisión. Es posible mejorar la precisión de un modelo matemático si se aumenta su complejidad. En algunos casos, se utilizan cientos de ecuaciones para describir un sistema completo. Sin embargo, en la obtención de un modelo matemático, debemos establecer un equilibrio entre la simplicidad del mismo y la precisión de los resultados del análisis. No obstante, si no se necesita una precisión extrema, es preferible obtener sólo un modelo razonablemente simplificado. De hecho, por lo general basta con obtener un modelo matemático adecuado para el problema que se considera.

Al obtener un modelo matemático razonablemente simplificado, a menudo resulta necesario ignorar ciertas propiedades físicas inherentes al sistema. En particular, si se pretende obtener un modelo matemático de parámetros concentrados lineal (es decir, uno en que se empleen ecuaciones diferenciales), siempre es necesario ignorar ciertas no linealidades y parámetros distribuidos (aquellos que producen ecuaciones en derivadas parciales) que pueden estar presentes en el sistema dinámico. Si los efectos que estas propiedades ignoradas tienen sobre la respuesta son pequeños, se obtendrá un buen acuerdo entre los resultados del análisis de un modelo matemático y los resultados del estudio experimental del sistema físico.

En general, cuando se soluciona un problema nuevo, es conveniente desarrollar primero un modelo simplificado para obtener una idea general de la solución. A continuación se desarrolla un modelo matemático más completo y se usa para un análisis con más pormenores.

Debemos estar conscientes de que un modelo de parámetros concentrados lineal que puede ser válido si opera en baja frecuencia, tal vez no sea válido en frecuencias suficientemente altas, debido a que la propiedad no considerada de los parámetros distribuidos puede convertirse en un factor importante en el comportamiento dinámico del sistema. Por ejemplo, la masa de un resorte puede pasarse por alto en operación en baja frecuencia,pero se convierte en una propiedad importante del sistema en altas frecuencias.

Sistemas lineales. Un sistema se denomina lineal si se aplica el principio de superposición. Este principio establece que la respuesta producida por la aplicación simultánea de dos funciones de entradas diferentes es la suma de las dos respuestas individuales. Por tanto, para el sistema lineal, la respuesta a varias entradas se calcula tratando una entrada a la vez y sumando los resultados. Este principio permite desarrollar soluciones complicadas para la ecuación diferencial lineal a partir de soluciones simples.

Si en una investigación experimental de un sistema dinámico son proporcionales la causa y el efecto, lo cual implica que se aplica el principio de superposición, el sistema se considera lineal.

Sistemas lineales invariantes y variantes con el tiempo. Una ecuación diferencial es lineal si sus coeficientes son constantes o son funciones sólo de la variable independiente. Los sistemas dinámicos formados por componentes de parámetros concentrados lineales invariantes con el tiempo se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes con el tiempo (de coeficientes constantes). Tales sistemas se denominan ***sistemas lineales invariantes con el tiempo (o lineales de coeficientes constantes).*** Los sistemas que se representan mediante ecuaciones diferenciales cuyos coeficientes son funciones del tiempo, se denominan ***sistemas lineales variantes con el tiempo.*** Un ejemplo de un sistema de control variantes con el tiempo es un sistema de control de naves espaciales. (La masa de una nave espacial cambia debido al consumo de combustible.)

Sistemas no lineales. Un sistema es no lineal si no se aplica el principio de superposición. Por tanto, para un sistema no lineal la respuesta a dos entradas no puede calcularse tratando cada una a la vez y sumando los resultados. Los siguientes son ejemplos de ecuaciones diferenciales no lineales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x = A \operatorname{sen} \omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x + x^3 = 0$$

Aunque muchas relaciones físicas se representan a menudo mediante ecuaciones lineales, en la mayor parte de los casos las relaciones reales no son verdaderamente lineales. De hecho, un estudio cuidadoso de los sistemas físicos revela que incluso los llamados "sistemas lineales" sólo lo son en rangos de operación limitados. En la práctica, muchos sistemas electromecánicos, hidráulicos, neumáticos, etc., involucran relaciones no lineales entre las variables. Por ejemplo, la salida de un componente puede saturarse para señales de entrada grandes. Puede haber una zona muerta que afecte las señales pequeñas. (La zona muerta de un componente es un rango pequeño de variaciones de entrada ante las cuales el componente es insensible.) Puede ocurrir una no linealidad de la ley cuadrática en algunos componentes. Por ejemplo, los amortiguadores que se utilizan en los sistemas físicos pueden ser lineales para operaciones a baja velocidad, pero pueden volverse no lineales a altas velocidades, y la fuerza de amortiguamiento puede hacerse proporcional al cuadrado de la velocidad de operación. Algunos ejemplos de las curvas características para estas no linealidades aparecen en la figura 3 -1.

Observe que algunos sistemas de control importantes son no lineales para señales de cualquier tamaño. Por ejemplo, en los sistemas de control de encendido y apagado, la acción de control está activada o no activada, y no hay una relación lineal entre la entrada y la salida del controlador.

En general, los procedimientos para encontrar las soluciones a problemas que involucran tales sistemas no lineales son muy complicados. Debido a la dificultad matemática aunada a los sistemas no lineales, resulta necesario introducir los sistemas lineales "equivalentes" en lugar de los no lineales. Tales sistemas lineales equivalentes sólo son válidos para un rango limitado de operación. Una vez que se aproxima un sistema no lineal mediante un modelo matemático lineal, pueden aplicarse varias herramientas lineales para análisis y diseño.

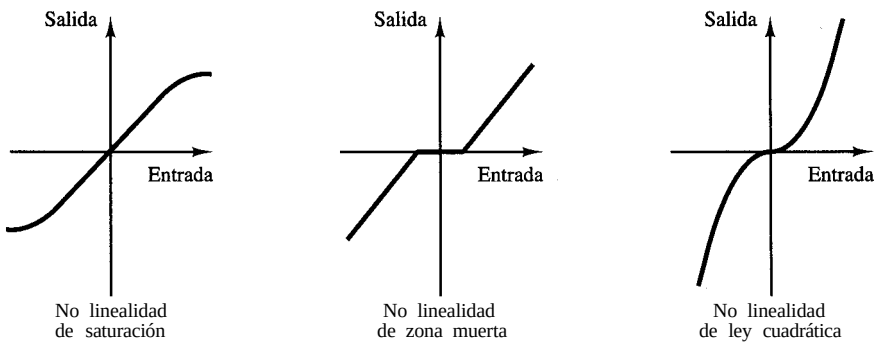


Figura 3-1
Curvas características para diversas no linealidades.

Linealización de sistemas no lineales. En la ingeniería de control, una operación normal del sistema puede ocurrir alrededor de un punto de equilibrio, y las señales pueden considerarse señales pequeñas alrededor del equilibrio. (Debe señalarse que hay muchas excepciones a tal caso.) Sin embargo, si el sistema opera alrededor de un punto de equilibrio y si las señales involucradas son pequeñas, es posible aproximar el sistema no lineal mediante un sistema lineal. Tal sistema lineal es equivalente al sistema no lineal, considerado dentro de un rango de operación limitado. Tal modelo linealizado (lineal e invariante con el tiempo) es muy importante en la ingeniería de control. Analizaremos una técnica de linealización en la sección 3-10.

Panorama del capítulo. La sección 3-1 presentó una introducción al modelado matemático de sistemas dinámicos, que incluyó un análisis de sistemas lineales y no lineales. La sección 3-2 presenta la función de transferencia y la respuesta-impulso. La sección 3-3 introduce los diagramas de bloques y la sección 3-4 analiza conceptos del modelado en el espacio de estados. La sección 3-5 presenta una representación en el espacio de estados de sistemas dinámicos. La sección 3-6 trata el modelado matemático de sistemas mecánicos; se analiza el enfoque de Newton para modelar sistemas mecánicos. La sección 3-7 aborda el modelado matemático de circuitos eléctricos. La sección 3-8 trata los sistemas de nivel de líquido y la sección 3-9 presenta el modelado matemático de sistemas térmicos. Por último, la sección 3-10 analiza la linealización de modelos matemáticos no lineales. (El modelado matemático de otros tipos de sistemas se trata en los capítulos restantes del libro.)

3-2 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA Y DE RESPUESTA-IMPULSO

En la teoría de control, a menudo se usan las funciones de transferencia para caracterizar las relaciones de entrada-salida de componentes o de sistemas que se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes con el tiempo. Empezaremos por definir la función de transferencia y proseguiremos con una derivación de la función de transferencia de un sistema mecánico. A continuación se analiza la función de respuesta-impulso.

Función de transferencia. La *función de* transferencia de un sistema descrito mediante una ecuación diferencial lineal e invariante con el tiempo se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida (función de respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función de excitación) bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero.

Considere el sistema lineal e invariante con el tiempo descrito mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \cdots + b_{m-1}\dot{x} + b_m x \qquad (n \geq m) \qquad (3\text{–}1)$$

en donde y es la salida del sistema y x es la entrada. La función de transferencia de este sistema se obtiene tomando la transformada de Laplace de ambos miembros de la ecuación (3–1), bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero, o bien,

$$\text{Función de transferencia} = G(s) = \left.\frac{\mathcal{L}\,[\text{salida}]}{\mathcal{L}\,[\text{entrada}]}\right|_{\text{condiciones iniciales cero}}$$

$$= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \qquad (3\text{–}2)$$

A partir del concepto de función de transferencia, es posible representar la dinámica de un sistema mediante ecuaciones algebraicas en s. Si la potencia más alta de s en el denominador de la función de transferencia es igual a n, el sistema se denomina ***sistema de n-ésimo orden.***

Comentarios acerca de la función de transferencia. La aplicación del concepto de función de transferencia está limitada a los sistemas descritos mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes con el tiempo. Sin embargo, el enfoque de la función de transferencia se usa extensamente en el análisis y diseño de dichos sistemas. A continuación se presentan algunos comentarios importantes relacionados con la función de transferencia. (Observe que, en la lista, los sistemas a los que se hace referencia son aquellos que se describen mediante una ecuación diferencial lineal e invariante con el tiempo.)

1. La función de transferencia de un sistema es un modelo matemático porque es un método operacional para expresar la ecuación diferencial que relaciona la variable de salida con la variable de entrada.
2. La función de transferencia es una propiedad de un sistema, independiente de la magnitud y naturaleza de la entrada o función de excitación.
3. La función de transferencia incluye las unidades necesarias para relacionar la entrada con la salida; sin embargo, no proporciona información acerca de la estructura física del sistema. (Las funciones de transferencia de muchos sistemas físicamente diferentes pueden ser idénticas.)
4. Si se conoce la función de transferencia de un sistema, se estudia la salida o respuesta para varias formas de entrada, con la intención de comprender la naturaleza del sistema.
5. Si se desconoce la función de transferencia de un sistema, puede establecerse experimentalmente introduciendo entradas conocidas y estudiando la salida del sistema. Una vez establecida una función de transferencia, proporciona una descripción completa de las características dinámicas del sistema, a diferencia de su descripción física.

Sistema mecánico. Considere el sistema de control de posición del satélite de la figura 3-2. El diagrama sólo muestra el control del ángulo de elevación θ. (En el sistema real existen controles alrededor de tres ejes.) Unos propulsores pequeños aplican fuerzas de reacción para hacer girar el cuerpo del satélite hasta la posición deseada. Los dos propulsores inclinados, simétricamente colocados representados por A o B funcionan en pareja. Suponga que el empuje de cada reactor es $F/2$ y que se aplica al sistema un par $T = Fl$. Los propulsores se aplican por un cierto periodo y, por tanto, el par se escribe como $T(t)$. El momento de inercia alrededor del eje de rotación en el centro de la masa es J.

Obtengamos la función de transferencia de este sistema suponiendo que el par $T(t)$ es la entrada y que el desplazamiento angular $\theta(t)$ del satélite es la salida. (Consideraremos el movimiento sólo en el plano de la página.)

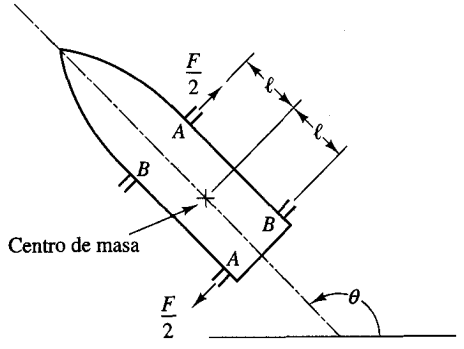


Figura 3-2
Diagrama esquemático de un sistema de control de posición de un satélite.

Para obtener la función de transferencia, procedemos de acuerdo con los pasos siguientes:

1. Escriba la ecuación diferencial para el sistema.
2. Tome la transformada de Laplace de la ecuación diferencial, suponiendo que todas las condiciones iniciales son cero.
3. Tome el cociente entre la salida $\Theta(s)$ y la entrada T(s). Este cociente es la función de transferencia.

Si aplicamos la segunda ley de Newton a este sistema y observamos que no hay fricción en el ambiente del satélite, se obtiene:

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = T$$

tomando la transformada de Laplace de ambos miembros de esta última ecuación y suponemos que todas las condiciones iniciales son cero, llegamos a

$$Js^2\Theta(s) = T(s)$$

en donde $\Theta(s) = \mathcal{L}[\theta(t)]$ y $T(s) = \mathcal{L}[T(t)]$. Por tanto, la función de transferencia del sistema se obtiene como

$$\text{Función de transferencia} = \frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2}$$

Integral de convolución. Para un sistema lineal e invariante con el tiempo, la función de transferencia G(s) es

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

en donde X(s) es la transformada de Laplace de la entrada y Y(s) es la transformada de Laplace de la salida, y suponemos que todas las condiciones iniciales involucradas son cero. De aquí se obtiene que la salida Y(s) se escribe como el producto de G(s) y X(s), o bien,

$$Y(s) = G(s)X(s) \qquad (3\text{–}3)$$

Observe que la multiplicación en el dominio complejo es equivalente a la convolución en el dominio del tiempo, por lo que la transformada inversa de Laplace de la ecuación (3-3) se obtiene mediante la siguiente integral de convolución:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)g(t - \tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^t g(\tau)x(t - \tau)\, d\tau \qquad (3\text{–}4)$$

en donde g(t) = 0 y x(t) = 0 para $t < 0$.

Respuesta-impulso. Considere la salida (respuesta) de un sistema para una entrada impulso unitario cuando las condiciones iniciales son cero. Debido a que la transformada de Laplace de la función impulso unitario es la unidad, la transformada de Laplace de la salida del sistema es

$$Y(s) = G(s) \qquad (3\text{–}5)$$

La transformada inversa de Laplace de la salida obtenida mediante la ecuación (3-5) proporciona la respuesta-impulso del sistema. La transformada inversa de Laplace de $G(s)$, o bien

$$\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$$

se denomina respuesta-impulso. Esta respuesta g(t) también se denomina función de ponderación del sistema.

Por tanto, la respuesta-impulso g(t) es la respuesta de un sistema lineal a una entrada impulso unitario cuando las condiciones iniciales son cero. La transformada de Laplace de esta función proporciona la función de transferencia. Por tanto, la función de transferencia y la respuesta-impulso de un sistema lineal e invariante con el tiempo contienen la misma información acerca de la dinámica del sistema. De esta manera, si se excita el sistema con una entrada impulso y se mide la respuesta, es posible obtener una información completa acerca de sus características dinámicas. (En la práctica, una entrada pulso con una duración muy corta comparada con las constantes de tiempo significativas del sistema se considera un impulso.)

3-3 DIAGRAMAS DE BLOQUES

Un sistema de control puede tener varios componentes. Para mostrar las funciones que lleva a cabo cada componente en la ingeniería de control, por lo general se usa una representación denominada ***diagrama de bloques.*** Esta sección explica qué es un diagrama de bloques, presenta un método para obtener los diagramas de bloques de sistemas físicos y, por último, analiza técnicas para simplificar tales diagramas.

Diagramas de bloques. Un ***diagrama de bloques*** de un sistema es una representación gráfica de las funciones que lleva a cabo cada componente y el flujo de señales. Tal diagrama muestra las relaciones existentes entre los diversos componentes. A diferencia de una representación matemática puramente abstracta, un diagrama de bloques tiene la ventaja de indicar en forma más realista el flujo de las señales del sistema real.

En un diagrama de bloques se enlazan una con otra todas las variables del sistema, mediante bloques funcionales. El ***bloque funcional*** o simplemente ***bloque*** es un símbolo para representar la operación matemática que sobre la señal de entrada hace el bloque para producir la salida. Las funciones de transferencia de los componentes por lo general se introducen en los bloques correspondientes, que se conectan mediante flechas para indicar la

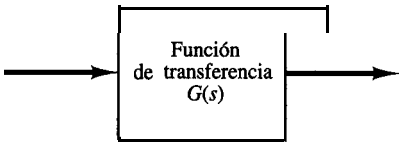


Figura 3 3
Elemento de un diagrama de bloques.

dirección del flujo de señales. Observe que la señal sólo puede pasar en la dirección de las flechas. Por tanto, un diagrama de bloques de un sistema de control muestra explícitamente una propiedad unilateral.

La figura 3-3 muestra un elemento del diagrama de bloques. La punta de flecha que señala el bloque indica la entrada, y la punta de flecha que se aleja del bloque representa la salida. Tales flechas se conocen como señales.

Observe que las dimensiones de la señal de salida del bloque son las dimensiones de la señal de entrada multiplicadas por las dimensiones de la función de transferencia en el bloque.

Las ventajas de la representación mediante diagramas de bloques de un sistema estriban en que es fácil formar el diagrama de bloques general de todo el sistema con sólo conectar los bloques de los componentes de acuerdo con el flujo de señales y en que es posible evaluar la contribución de cada componente al desempeño general del sistema.

En general, la operación funcional del sistema se aprecia con más facilidad si se examina el diagrama de bloques que si se revisa el sistema físico mismo. Un diagrama de bloques contiene información relacionada con el comportamiento dinámico, pero no incluye información de la construcción física del sistema. En consecuencia, muchos sistemas diferentes y no relacionados pueden representarse mediante el mismo diagrama de bloques.

Debe señalarse que, en un diagrama de bloques, la principal fuente de energía no se muestra explícitamente y que el diagrama de bloques de un sistema determinado no es único. Es posible dibujar varios diagramas de bloques diferentes para un sistema, dependiendo del punto de vista del análisis.

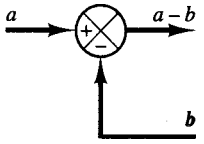


Figura 3-4
Punto suma.

Punto suma. Remitiéndonos a la figura 3-4, un círculo con una cruz es el símbolo que indica una operación de suma. El signo de más o de menos en cada punta de flecha indica si la señal debe sumarse o restarse. Es importante que las cantidades que se sumen o resten tengan las mismas dimensiones y las mismas unidades.

Punto de ramificación. Un punto ***de ramificación*** es aquel a partir del cual la señal de un bloque va de modo concurrente a otros bloques o puntos suma.

Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado. La figura 3-5 muestra un ejemplo de un diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado. La salida $C(s)$ se realimenta al punto suma, en donde se compara con la entrada de referencia R(s). La naturaleza en lazo cerrado del sistema se indica con claridad en la figura. La salida del bloque, $C(s)$ en este caso, se obtiene multiplicando la función de transferencia G(s) por la entrada al bloque, E(s). Cualquier sistema de control lineal puede representarse mediante un diagrama de bloques formado por puntos suma, bloques y puntos de ramificación.

Cuando la salida se realimenta al punto suma para compararse con la entrada, es necesario convertir la forma de la señal de salida en la de la señal de entrada. Por ejemplo, en un sistema de control de temperatura, por lo general la señal de salida es la temperatura controlada. La señal de salida, que tiene la dimensión de la temperatura, debe convertirse

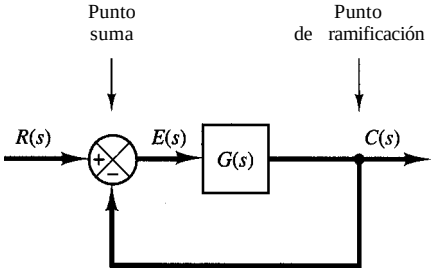


Figura 3–5
Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado.

a una fuerza, posición o voltaje antes de que pueda compararse con la señal de entrada. Esta conversión se consigue mediante el elemento de realimentación, cuya función de transferencia es $H(s)$ como se aprecia en la figura 3-6. La función del elemento de realimentación es modificar la salida antes de compararla con la entrada. (En la mayor parte de los casos, el elemento de realimentación es un sensor que mide la salida de la planta. La salida del sensor se compara con la entrada y se genera la señal de error.) En este ejemplo, la señal de realimentación que retorna al punto suma para compararse con la entrada es B(s) = $H(s)C(s)$.

Función de transferencia en lazo abierto y función de transferencia de la trayectoria directa. Remitámonos a la figura 3-6, en la que el cociente de la señal de realimentación B(s) entre la señal de error E(s) se denomina función ***de transferencia en Zuzo abierto.*** Es decir,

$$\text{Función de transferencia en lazo abierto} = \frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$$

El cociente entre la salida C(s) y la señal de error E(s) se denomina ***función de transferencia de la trayectoria directa,*** por lo que,

$$\text{Función de transferencia de la trayectoria directa} = \frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$$

Si la función de transferencia de la trayectoria de realimentación $H(s)$ es la unidad, la función de transferencia en lazo abierto y la función de transferencia de la trayectoria directa son iguales.

Función de transferencia en lazo cerrado. Para el sistema que aparece en la figura 3-6, la salida C(s) y la entrada $R(s)$ se relacionan del modo siguiente:

$$C(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

$$= R(s) - H(s)C(s)$$

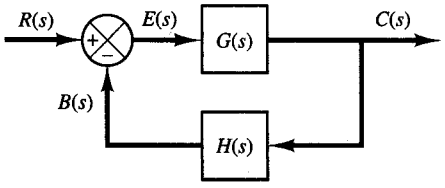


Figura 3–6
Sistema en lazo cerrado.

Si eliminamos E(s) de estas ecuaciones, obtenemos

$$C(s) = G(s)[R(s) - H(s)C(s)]$$

o bien,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{3–6}$$

La función de transferencia que relaciona C(s) con ***R(s)*** se denomina ***función de transferencia en lazo cerrado.*** Esta función de transferencia relaciona la dinámica del sistema en lazo cerrado con la dinámica de los elementos de las trayectorias directa y de realimentación.

A partir de la ecuación (3–6), C(s) se obtiene mediante

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}R(s)$$

Por tanto, la salida del sistema en lazo cerrado depende claramente tanto de la función de transferencia en lazo cerrado como de la naturaleza de la entrada.

Un sistema en lazo cerrado sujeto a una perturbación. La figura 3-7 muestra un sistema en lazo cerrado sujeto a una perturbación. Cuando se presentan dos entradas (la entrada de referencia y la perturbación) en un sistema lineal, cada una de ellas puede tratarse en forma independiente; y las salidas correspondientes a cada entrada pueden sumarse para obtener la salida completa. La forma en que se introduce cada entrada en el sistema se muestra en el punto suma mediante un signo de más o de menos.

Considere el sistema que se muestra en la figura 3-7. Al examinar el efecto de la perturbación D(s), podemos suponer que el sistema está inicialmente relajado, con un error cero; después podemos calcular la respuesta $C_D(s)$ sólo para la perturbación. Esta respuesta se encuentra a partir de

$$\frac{C_D(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

Por otra parte, si consideramos la respuesta a la entrada de referencia ***R(s),*** podemos suponer que la perturbación es cero. Entonces, la respuesta $C_R(s)$ a la entrada de referencia ***R(s)*** se obtiene a partir de

$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

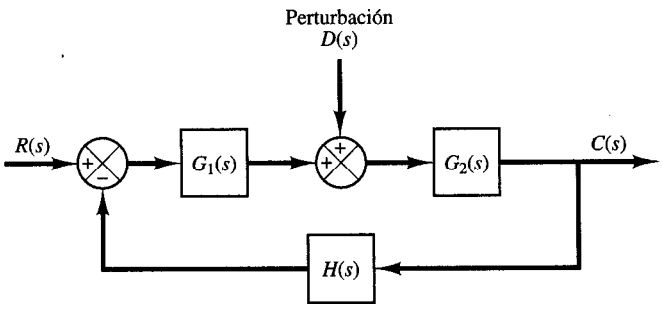


Figura 3-7
Sistema en lazo cerrado sujeto a una perturbación.

La respuesta a la aplicación simultánea de la entrada de referencia y la perturbación se obtiene sumando las dos respuestas individuales. En otras palabras, la respuesta C(s) producida por la aplicación simultánea de la entrada de referencia R(s) y la perturbación $D(s)$ se obtiene mediante

$$C(s) = C_R(s) + C_D(s)$$

$$= \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} [G_1(s)R(s) + D(s)]$$

Considere ahora el caso en el que $|G_1(s)H(s)| \gg 1$ y $|G_1(s)G_2(s)H(s)| \gg 1$. En este caso, la función de transferencia en lazo cerrado $C_D(s)/D(s)$ se hace casi cero, y se suprime el efecto de la perturbación. Ésta es una ventaja del sistema en lazo cerrado.

Por otra parte, la función de transferencia en lazo cerrado $C_R(s)/R(s)$ se aproxima a $1/H(s)$ conforme aumenta la ganancia de $G_1(s)G_2(s)H(s)$. Esto significa que si $|G_1(s)G_2(s)H(s)| \gg 1$ en ocnces la función de transferencia en lazo cerrado $C_R(s)/R(s)$ se vuelve independiente de $G_1(s)$ y $G_2(s)$ y se hace inversamente proporcional a H(s), por lo que las variaciones de $G_1(s)$ y $G_2(s)$ no afectan la función de transferencia en lazo cerrado $C_R(s)/R(s)$. Ésta es otra ventaja del sistema en lazo cerrado. Es fácil observar que cualquier sistema en lazo cerrado con una realimentación unitaria, $H(s) = 1$, tiende a hacer iguales la entrada y la salida.

Procedimientos para **dibujar** un diagrama de bloques. Para dibujar el diagrama de bloques de un sistema, primero escriba las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de cada componente. A continuación tome las transformadas de Laplace de estas ecuaciones, suponiendo que las condiciones iniciales son cero, y represente individualmente en forma de bloques cada ecuación transformada por el método de Laplace. Por último, integre los elementos en un diagrama de bloques completo.

Como ejemplo, considere el circuito *RC* de la figura 3–8(a). Las ecuaciones para el circuito son

$$i = \frac{e_i - e_o}{R} \tag{3–7}$$

$$e_o = \frac{\int i\, dt}{C} \tag{3–8}$$

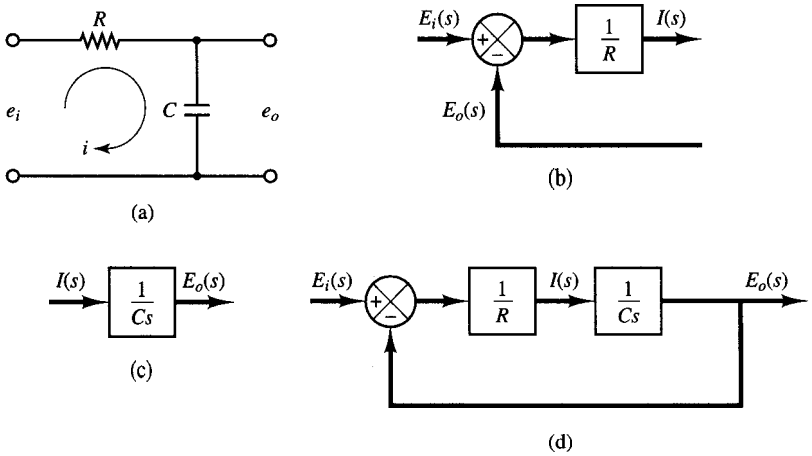


Figura 3–8
(a) Circuito *RC*; (b) diagrama de bloques que representa la ecuación (3-9); (c) diagrama de bloques que representa la ecuación (3-10); (d) diagrama de bloques del circuito *RC*.

La transformada de Laplace de las ecuaciones (3-7) y (3–8), con condiciones iniciales iguales a cero, se vuelven

$$I(s) = \frac{E_i(s) - E_o(s)}{R} \tag{3–9}$$

$$E_o(s) = \frac{I(s)}{Cs} \tag{3–10}$$

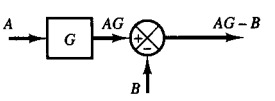
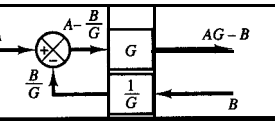
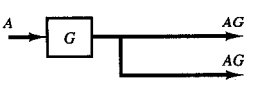
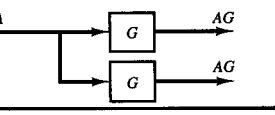
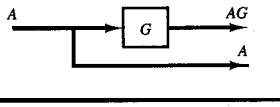
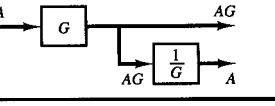
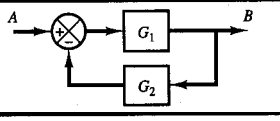
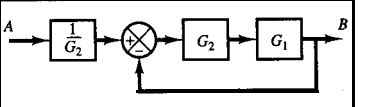
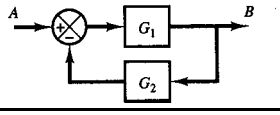
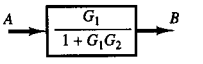
La ecuación (3-9) representa una operación de suma y el diagrama correspondiente aparece en la figura 3–8(b). La ecuación (3-10) representa el bloque de la figura 3–8(c). Si se integran estos dos elementos se obtiene el diagrama de bloques general para el sistema, tal como aparece en la figura 3–8(d).

Reducción de un diagrama de bloques. Es importante señalar que los bloques pueden conectarse en serie, sólo si la entrada de un bloque no se ve afectada por el bloque siguiente. Si hay efectos de carga entre los componentes, es necesario combinarlos en un bloque único.

Cualquier cantidad de bloques en cascada que representen componentes sin carga puede sustituirse con un solo bloque, cuya función de transferencia sea simplemente el producto de las funciones de transferencia individuales.

Un diagrama de bloques complicado que contenga muchos lazos de realimentación se simplifica mediante un reordenamiento paso a paso mediante las reglas del álgebra de los diagramas de bloques. Algunas de estas reglas importantes aparecen en la tabla 3-1 y

Tabla 3-1 Reglas del álgebra de los diagramas de bloques

	Diaeramas de bloaues originales	Diagramas de bloques equivalentes
1		
2		
3		
4		
5		

se obtienen escribiendo la misma ecuación en formas distintas. La simplificación de un diagrama de bloques mediante reordenamientos y sustituciones reduce de manera considerable la labor necesaria para el análisis matemático subsecuente. Sin embargo, debe señalarse que, conforme se simplifica el diagrama de bloques, las funciones de transferencia de los bloques nuevos se vuelven más complejas, debido a que se generan polos y ceros nuevos.

Al simplificar un diagrama de bloques, recuerde lo siguiente:

1. El producto de las funciones de transferencia en la dirección de la trayectoria directa debe ser el mismo.
2. El producto de las funciones de transferencia alrededor del lazo debe ser el mismo.

EJEMPLO 3-1 Considere el sistema que aparece en la figura 3–9(a). Simplifique este diagrama.

Si se mueve el punto suma del lazo de realimentación negativa que contiene H_2 hacia afuera del lazo de realimentación positiva que contiene H_1, obtenemos la figura 3–9(b). Si eliminamos

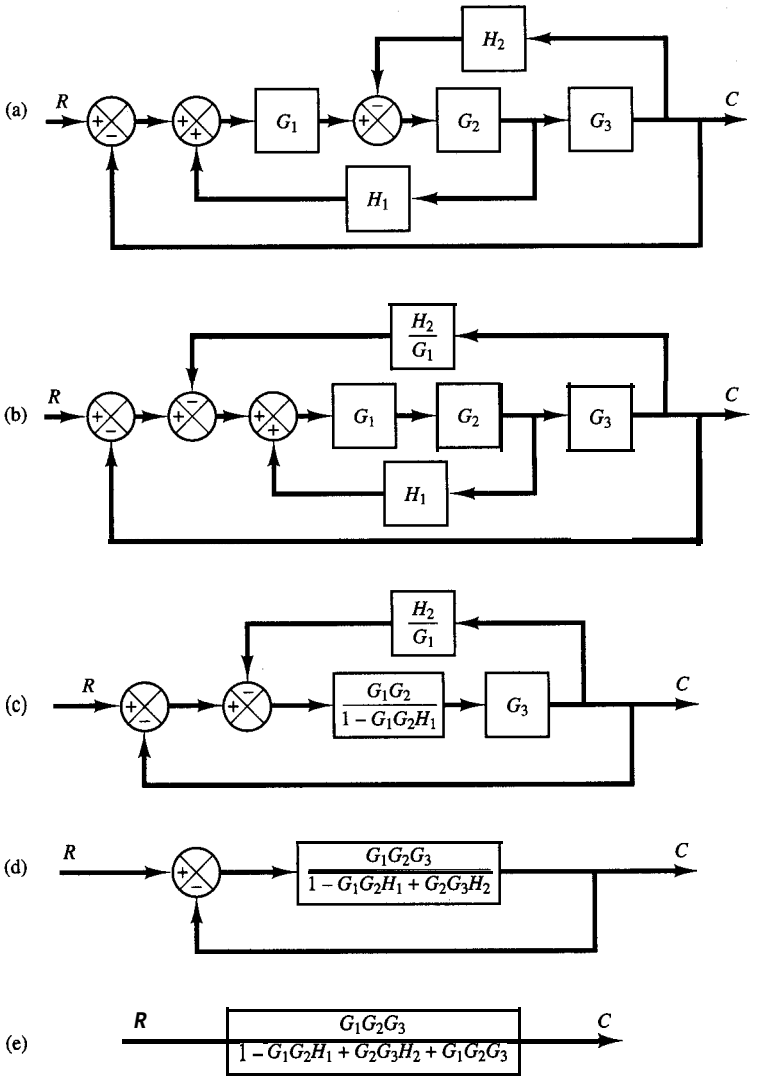


Figura 3-9
(a) Sistema de lazos múltiples; (b)-(e) reducciones sucesivas del diagrama de bloques mostrado en (a).

el lazo de realimentación positiva obtenemos la figura 3–9(c). La eliminación del lazo que contiene H_2/G_1 produce la figura 3–9(d). Por último, la eliminación del lazo de realimentación conduce ala figura 3–9(e).

Observe que el numerador de la función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$ es el producto de las funciones de transferencia de la trayectoria directa. El denominador de $C(s)/R(s)$ es igual a

$$1 - \sum \text{(producto de las funciones de transferencia alrededor de cada lazo)}$$

$$= 1 - (G_1G_2H_1 - G_2G_3H_2 - G_1G_2G_3)$$

$$= 1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3$$

(El lazo de realimentación positiva produce un término negativo en el denominador.)

3-4 MODELADO EN EL ESPACIO DE ESTADOS

En esta sección presentaremos el material introductorio al análisis en el espacio de estados de los sistemas de control.

Teoría de control moderna. La tendencia moderna en los sistemas de ingeniería es hacia una mayor complejidad, debido principalmente a los requerimientos de las tareas complejas y la elevada precisión. Los sistemas complejos pueden tener entradas y salidas múltiples y pueden variar en el tiempo. Debido a la necesidad de alcanzar los requerimientos cada vez más restrictivos en el desempeño de los sistemas de control, al aumento en la complejidad del sistema y a un acceso fácil a las computadoras de gran escala, aproximadamente desde 1960 se ha desarrollado la teoría de control moderna, que es un nuevo enfoque del análisis y diseño de sistemas de control complejos. Este enfoque nuevo se basa en el concepto de estado. El concepto de estado por sí mismo no es nuevo, dado que ha existido durante largo tiempo en el campo de la dinámica clásica y en otros medios.

La teoría de control moderna contra la teoría de control convencional. La teoría de control moderna contrasta con la teoría de control convencional en que la primera se aplica a sistemas con entradas y salidas múltiples, que pueden ser lineales o no lineales, en tanto que la segunda sólo se aplica a sistemas lineales con una entrada y una salida e invariantes con el tiempo. Asimismo, la teoría del control moderna es esencialmente un enfoque en el dominio del tiempo, en tanto que la teoría de control convencional es un enfoque complejo en el dominio de la frecuencia. Antes de continuar, debemos definir estado, variables de estado, vector de estado y espacio de estados.

Estado. El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables (denominadas ***variables de estado)*** de modo que el conocimiento de estas variables en $t = t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determina por completo el comportamiento del sistema para cualquier tiempo $t \geq t_0$.

Observe que el concepto de estado de ningún modo está limitado a los sistemas físicos. Se puede aplicar a sistemas biológicos, económicos, sociales y otros.

Variables de estado. Las variables de estado de un sistema dinámico son las que forman el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado del sistema dinámico.

Si se necesitan al menos n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ para describir por completo el comportamiento de un sistema dinámico (por lo cual una vez que se proporciona la entrada para $t \geq t_0$ y se especifica el estado inicial en $t = t_0$, el estado futuro del sistema se determina por completo), tales n variables son un conjunto de variables de estado.

Observe que las variables de estado no necesitan ser cantidades medibles u observables físicamente. Las variables que no representan cantidades físicas y aquellas que no son medibles ni observables pueden seleccionarse como variables de estado. Tal libertad al elegir las variables de estado es una ventaja de los métodos de espacio de estados. Sin embargo, en la práctica es conveniente elegir cantidades que se midan con facilidad para las variables de estado, si es posible, debido a que las leyes del control óptimo requerirán la realimentación de todas las variables de estado con una ponderación conveniente.

Vector de estado. Si se necesitan n variables de estado para describir por completo el comportamiento de un sistema determinado, estas n variables de estado se consideran los n componentes de un vector x. Tal vector se denomina ***vector de estado.*** Por tanto un vector de estado es aquel que determina de manera única el estado del sistema x(t) para cualquier tiempo $t \geq t_0$, una vez que se obtiene el estado en $t = t_0$ y se especifica la entrada u(t) para $t \geq t_0$.

Espacio de estados. El espacio de n dimensiones cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje XI, el eje $x_2, \ldots,$ el eje x_n, se denomina ***espacio de estados.*** Cualquier estado puede representarse mediante un punto en el espacio de estados.

Ecuaciones en el espacio de estados. En el análisis en el espacio de estados, nos concentramos en tres tipos de variables involucrados en el modelado de sistemas dinámicos: variables de entrada, variables de salida y variables de estado. Como veremos en la sección 3-5, no es única la representación en el espacio de estados para un sistema determinado, excepto en que la cantidad de variables de estado es igual para cualquiera de las diferentes representaciones en el espacio de estados del mismo sistema.

El sistema dinámico debe incorporar elementos que memoricen los valores de la entrada para $t \geq t_1$. Dado que los integradores de un sistema de control en tiempo continuo funcionan como dispositivos de memoria, las salidas de tales integradores se consideran las variables que definen el estado interno del sistema dinámico. Por tanto, las salidas de los integradores funcionan como variables de estado. La cantidad de variables de estado necesarias para definir completamente la dinámica del sistema es igual a la cantidad de integradores que contiene el sistema.

Suponga que un sistema de entradas y salidas múltiples contiene n integradores. También suponga que existen r entradas $u_1, u_2(t), \ldots, u_r(t)$ y m salidas $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)$. Definan salidas de los integradores como variables de estado: $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$. A continuación el sistema se describe mediante

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \end{aligned} \tag{3-11}$$

$$\dot{x}_n(t) = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t)$$

Las salidas $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)$ del sistema se obtienen mediante

$$y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t)$$
$$y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t)$$

(3-12)

$$y_m(t) = g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t)$$

Si definimos

$$\mathbf{x}(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ x_n(t) \end{vmatrix}, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{vmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ \\ \cdot \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \cdot \\ y_m(t) \end{vmatrix}, \qquad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ \\ \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \end{bmatrix}, \qquad u(t) = \begin{vmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \\ u_r(t) \end{vmatrix}$$

las ecuaciones (3-11) y (3-12) se convierten en

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{3-13}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{3-14}$$

en donde la ecuación (3-13) es la ecuación de estado y la ecuación (3-14) es la ecuación de la salida. Si las funciones vectoriales **f y/o** g involucran explícitamente el tiempo *t*, el sistema se denomina sistema variante con el tiempo.

Si se linealizan las ecuaciones (3-13) y (3-14) alrededor del estado de operación, tenemos las siguientes ecuaciones de estado y de salida linealizadas:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \tag{3-15}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \tag{3-16}$$

en donde A(t) se denomina matriz de estado, B(t) matriz de entrada, *C(t)* matriz de salida y D(t) matriz de transmisión directa. (Los detalles de la **linealización** de sistemas no lineales alrededor del estado de operación se analizan en la sección 3-10.) Un diagrama de bloques que representa las ecuaciones (3-15) y (3-16) aparece en la figura 3-10.

Si las funciones vectoriales **f** y g no involucran el tiempo *t* explícitamente, el sistema se denomina sistema invariante con el tiempo. En este caso, las ecuaciones (3-15) y (3-16) se simplifican a

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{3-17}$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{3-18}$$

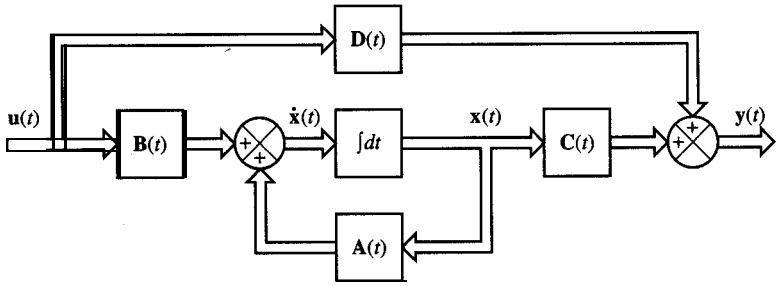


Figura 3–10
Diagrama de bloques del sistema de control lineal en tiempo continuo representado en el espacio de estados.

La ecuación (3-17) es la ecuación de estado del sistema lineal e invariante con el tiempo. La ecuación (3-18) es la ecuación de salida para el mismo sistema. En este libro nos concentraremos en los sistemas descritos mediante las ecuaciones (3-17) y (3-18).

A continuación presentaremos un ejemplo para obtener una ecuación de estado y una ecuación de salida.

EJEMPLO 3-2

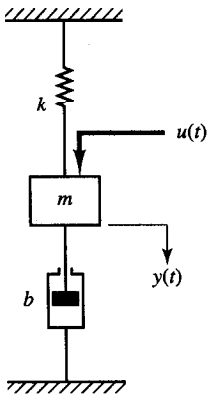


Figura 3–11
Sistema mecánico.

Considere el sistema mecánico que aparece en la figura 3-11. Suponemos que el sistema es lineal. La fuerza externa $u(t)$ es la entrada para el sistema, y el desplazamiento y(t) de la masa es la salida. El desplazamiento y(t) se mide a partir de la posición de equilibrio en ausencia de una fuerza externa. Este sistema tiene una sola entrada y una sola salida.

A partir del diagrama, la ecuación del sistema es

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u \tag{3-19}$$

Este sistema es de segundo orden, lo cual significa que el sistema contiene dos integradores. Definamos las variables de estado $x_1(t)$ y $x_2(t)$ como

$$x_1(t) = y(t)$$
$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

A continuación obtenemos

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}(-ky - b\dot{y}) + \frac{1}{m}u$$

o bien

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{3-20}$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \tag{3-21}$$

La ecuación de salida es

$$Y = x_1 \tag{3-22}$$

En una forma matricial, las ecuaciones (3-20) y (3-21) se escriben como

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}u \tag{3-23}$$

La ecuación de salida, representada por la ecuación (3–22), se escribe como

$$Y = [1 \;\; 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{3-24}$$

La ecuación (3-23) es una ecuación de estado y la ecuación (3-24) es una ecuación de salida para el sistema. Las ecuaciones (3-23) y (3-24) están en la forma estándar:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}\mathbf{x} + Du$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad C=[1 \quad 0], \quad D = 0$$

La figura 3-12 es un diagrama de bloques para el sistema. Observe que las salidas de los integradores son variables de estado.

Correlación entre funciones de transferencia y ecuaciones en el espacio de estados. A continuación mostraremos cómo obtener la función de transferencia de un sistema con una sola entrada y una sola salida a partir de las ecuaciones en el espacio de estados.

Consideremos el sistema cuya función de transferencia se obtiene mediante

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) \tag{3-25}$$

Este sistema se representa en el espacio de estados mediante las ecuaciones siguientes:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{3-26}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}\mathbf{x} + Du \tag{3-27}$$

en donde x es el vector de estado, u es la entrada, y y es la salida. La transformada de Laplace de las ecuaciones (3-26) y (3-27) se obtienen mediante

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{3-28}$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + DU(s) \tag{3-29}$$

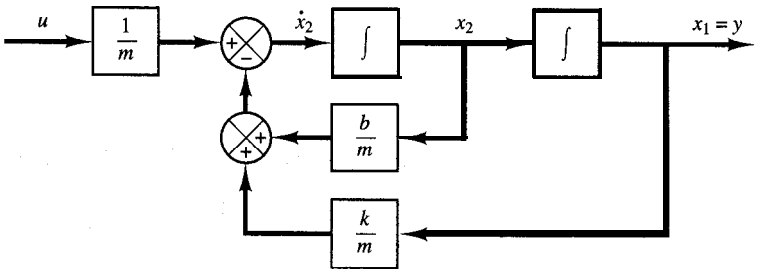


Figura 3-12
Diagrama de bloques del sistema mecánico que aparece en la figura 3-11.

Dado que la función de transferencia se definió antes como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada, cuando las condiciones iniciales son cero, suponemos que x(O) en la ecuación (3-28) es cero. Por tanto, tenemos que

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

o bien

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

Premultiplicando por $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ en ambos miembros de esta última ecuación, obtenemos

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) \qquad \textit{(3-30)}$$

Sustituyendo la ecuación (3-30) en la ecuación (3–29), llegamos a

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D]U(s) \qquad (3\text{-}31)$$

Después de comparar la ecuación (3-31) con la ecuación (3-25) vemos que

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D \qquad \textit{(3-32)}$$

Ésta es la expresión de la función de transferencia en términos de **A, B, C y *D*.**

Observe que el segundo miembro de la ecuación (3-32) contiene $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. Por tanto, G(s) se escribe como

$$G(s) = \frac{Q(s)}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|}$$

en donde Q(s) es un polinomio en s. Por tanto, $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ es igual al polinomio característico de G(s). En otras palabras, los valores específicos de A son idénticos a los polos de G(s).

EJEMPLO 3-3 Vuelva a considerar el sistema mecánico que aparece en la figura 3-11. Las ecuaciones en el espacio de estados para el sistema se obtienen mediante las ecuaciones (3-23) y (3-24). Obtendremos la función de transferencia para este sistema a partir de las ecuaciones en el espacio de estados.

Sustituyendo A, B, C y ***D*** en la ecuación (3–32), obtenemos

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathrm{A})\text{-}'\mathrm{B} + \boldsymbol{D} \\ &= [1 \quad 0]\left\{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} + 0 \\ &= [1 \quad 0]\begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}\begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix}$$

tenemos que

$$G(s) = [1 \quad 0] \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

que es la función de transferencia del sistema. La misma función de transferencia se obtiene de la ecuación (3-19).

Matriz de transferencia. A continuación, considere un sistema con entradas y salidas múltiples. Suponga que hay r entradas $u_1, u_2, \ldots, u_r$ y m salidas $y_1, y_2, \ldots,$ y,. Definamos

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \\ y_m \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \\ u_r \end{bmatrix}$$

La matriz de transferencia G(s) relaciona la salida Y(s) con la entrada U(s), o bien

$$Y(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s) \qquad (3\text{-}33)$$

Dado que el vector de entrada u es de dimensión r y el vector de salida y es de dimensión *m,* la matriz de transferencia es una matriz de m X *r.*

3-5 REPRESENTACIÓN EN EL ESPACIO DE ESTADOS DE SISTEMAS DINÁMICOS

Un sistema dinámico formado por una cantidad finita de elementos de parámetros concentrados se describe mediante una serie de ecuaciones diferenciales, en las cuales el tiempo es la variable independiente. Con la notación matricial, puede expresarse una ecuación diferencial de n-ésimo orden mediante una ecuación diferencial matricial de primer orden. Si n elementos del vector son un conjunto de variables de estado, la ecuación diferencial matricial es una ecuación de estado. En esta sección presentaremos métodos para obtener representaciones en el espacio de estados de sistemas en tiempo continuo.

Representación en el espacio de estados de sistemas de n-ésimo orden representados mediante ecuaciones diferenciales lineales en las cuales no contiene derivadas de la función de excitación. Considere el siguiente sistema de n-ésimo orden:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = u \qquad (3\text{-}34)$$

Si consideramos que el conocimiento de y(O), y(O), $\ldots y^{(n-1)}(0)$, junto con la entrada $u(t)$ para $t \geq 0$, determina totalmente el comportamiento futuro del sistema, podemos tomar y(t), j(t), . . . , $y^{(n-1)}(t)$ como un conjunto de n variables de estado. (Matemáticamente, tal elección

de variables de estado es muy conveniente. Sin embargo, en la práctica, debido a que los términos que contienen las derivadas de orden superior no son exactos, por los efectos de ruido inherentes en cualesquiera situaciones prácticas, tal elección de las variables de estado puede no ser conveniente.)

Definamos

$$x_1 = Y$$
$$x_2 = \dot{y}$$

$$x_n = {}^{(n-1)}Y$$

A continuación, la ecuación (3-34) se escribe como

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$
$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - \cdots - a_1 x_n + u$$

o bien

$$\dot{\mathbf{x}} = Ax + Bu \tag{3-35}$$

en donde

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

La salida se obtiene mediante

$$Y = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \\ x_n \end{vmatrix}$$

o bien

$$y = cx \tag{3-36}$$

en donde

$$C = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

[Observe que D en la ecuación (3-27) es cero.] La ecuación diferencial de primer orden (3-35) es la ecuación de estado, y la ecuación algebraica (3-36) es la ecuación de salida. La figura 3-13 contiene una representación en diagrama de bloques de la ecuación de estado y de la ecuación de salida obtenidas a partir de las ecuaciones (3-35) y (3–36), respectivamente.

Observe que la representación en el espacio de estados para la función de transferencia del sistema

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

también se obtiene mediante las ecuaciones (3-35) y (3-36).

Representación en el espacio de estados de sistemas de n-ésimo orden representadas mediante ecuaciones diferenciales lineales en las cuales contiene derivadas de la función de excitación. Si la ecuación diferencial del sistema involucra derivadas de la función de excitación, tales como

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u \qquad (3\text{–}37)$$

entonces el conjunto de n variables y, $\dot{y}, \ddot{y}, \ldots, \overset{(n-1)}{y}$ no califica como un conjunto de variables de estado y no puede usarse el método directo que se empleó antes. Esto se debe a que n ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1}x_2 - \cdots - a_1 x_n + b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + \cdots + b_n u$$

en donde $x_1 = y$, pueden no conducir a una solución única.

El problema principal al definir las variables de estado para este caso estriba en los términos que están derivados del segundo miembro de la última de las n ecuaciones precedentes. Las variables de estado deben ser de tal modo que eliminen las derivadas de u en la ecuación de estado.

Una forma de obtener una ecuación de estado y una ecuación de salida es definir las siguientes n variables como un conjunto de n variables de estado:

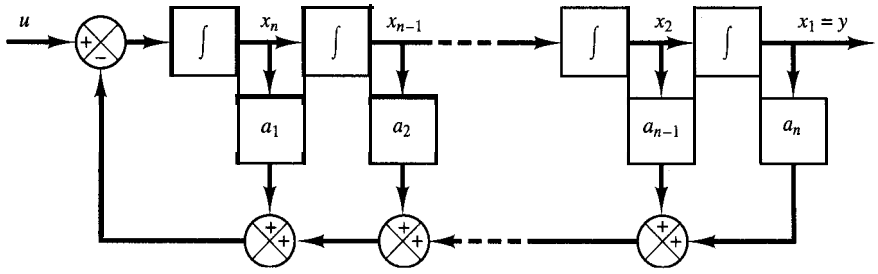


Figura 3-13
Representación en diagrama de bloques de una ecuación de estado y una ecuación de salida obtenidas mediante las ecuaciones (3-35) y (3–36), respectivamente.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y - \beta_0 u \\
x_2 &= \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\
x_3 &= \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\
&\cdot
\end{aligned}
\tag{3-38}
$$

$$
x_n = y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \cdots - \beta_{n-2}\dot{u} - \beta_{n-1} u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u
$$

en donde $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, se determinan a partir de

$$
\begin{aligned}
\beta_0 &= b_0 \\
\beta_1 &= b_1 - a_1\beta_0 \\
\beta_2 &= b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 \\
\beta_3 &= b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0
\end{aligned}
\tag{3-39}
$$

$$
\beta_n = b_n - a_1\beta_{n-1} - \ldots - a_{n-1}\beta_1 - a_n\beta_0
$$

Con esta elección de variables de estado está garantizada la existencia y unicidad de la solución de la ecuación de estado. (Observe que ésta no es la única elección de un conjunto de variables de estado.) Con la elección actual de variables de estado, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1 u \\
\dot{x}_2 &= x_3 + \beta_2 u \\
&\cdot \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n + \beta_{n-1} u \\
\dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \ldots - a_1 x_n + \beta_n u
\end{aligned}
\tag{3-40}
$$

[Para obtener la ecuación (3–40), véase el problema A-3-3.] En términos de las ecuaciones matriciales, la ecuación (3-40) y la ecuación de salida se escriben como

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u
$$

$$
y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u
$$

o bien

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{3-41}$$

$$y = cx + Du \tag{3-42}$$

en donde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix}, \qquad c = [1 \ 0 \ \cdots \ 0], \qquad D = \beta_0 = b_0$$

La condición inicial x(O) puede determinarse a partir de la ecuación (3-38).

En esta representación en el espacio de estados, las matrices Ay C son exactamente las mismas que para el sistema de la ecuación (3-34). Las derivadas del segundo miembro de la ecuación (3-37) sólo afectan los elementos de la matriz B.

Observe que la representación en el espacio de estados para la función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \tag{3-43}$$

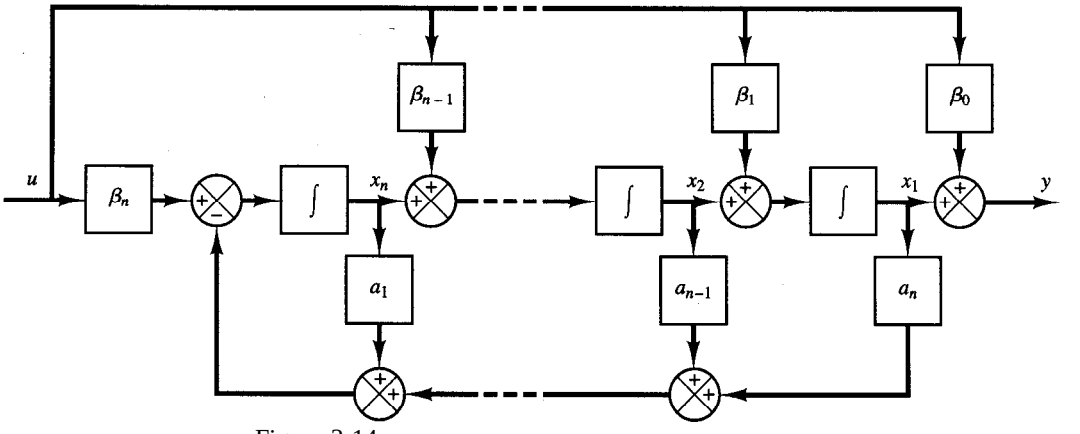


Figura 3-14
Representación en diagrama de bloques de la ecuación de estado y la ecuación de salida obtenidas mediante las ecuaciones (3-41) y (3-42), respectivamente.

se obtiene también a partir de las ecuaciones (3–41) y (3-42). La figura 3-14 es una representación en diagrama de bloques de la ecuación de estado y de la ecuación de salida obtenidas mediante las ecuaciones (3-41) y (3–42), respectivamente.

Existen muchas formas de obtener representaciones en el espacio de estados de los sistemas. Algunas de ellas se presentan en los problemas A-3-4 a A-3-7. El capítulo ll presenta métodos para obtener representaciones canónicas de sistemas en el espacio del estado (tales como una forma canónica controlable, una forma canónica observable, una forma canónica diagonal y una forma canónica de Jordan).

3-6 SISTEMAS MECÁNICOS

En esta sección analizaremos el modelado matemático de los sistemas mecánicos. La ley fundamental que controla los sistemas mecánicos es la segunda ley de Newton, que se aplica a cualquier sistema mecánico. En esta sección, obtendremos modelos matemáticos de dos sistemas mecánicos. (En los capítulos restantes obtendremos y analizaremos modelos matemáticos de sistemas mecánicos adicionales.) Antes de analizar los sistemas mecánicos, repasemos las definiciones de masa, fuerza y sistemas de unidades.

Masa. La ***masa*** de un cuerpo es la cantidad de materia que contiene, misma que se supone constante. Físicamente, la masa es la propiedad de un cuerpo que le da inercia, es decir, resistencia a moverse o detenerse. Un cuerpo es atraído por la Tierra y la magnitud de la fuerza que ejerce la Tierra sobre él se denomina peso.

En situaciones prácticas, conocemos el peso w de un cuerpo pero no su masa m. Calculamos la masa m a partir de

$$m = \frac{w}{g}$$

en donde g es la constante de aceleración gravitacional. El valor de g varía ligeramente de un punto a otro de la superficie terrestre. Como resultado, el peso de un cuerpo varía ligeramente en diferentes puntos de la superficie de la Tierra, pero su masa permanece constante. Para propósitos de ingeniería, g se considera como

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2 = 981 \text{ cm/s}^2 = 32.2 \text{ pies/s}^2 = 386 \text{ plg/s}^2$$

En el espacio exterior, un cuerpo pierde su peso; no obstante, su masa permanece constante y por tal razón el cuerpo posee inercia.

Las unidades para la masa son los kg, los g, las lb, los $\text{kg}_f\text{-s}^2/\text{m}$ y el slug, como se aprecia en la tabla 3-2. Si la masa se expresa en kilogramos (o libras), la llamamos kilogramos masa (o libras masa) para distinguirla de la unidad de fuerza, que se denomina kilogramo fuerza (o libras fuerza). En este libro, se usa kg para representar kilogramos masa y kg_f para kilogramos fuerza. Asimismo, lb representa libras masa y lb_f libras fuerza.

Un slug es una unidad de masa tal que, cuando se le aplica una fuerza de una libra, una masa de un slug se acelera a 1 pie/s^2 (slug = $\text{lb}_f\text{-s}^2/\text{pie}$). En otras palabras, si se aplica una masa de un slug mediante una fuerza de 32.2 libras, acelera a 32.2 pies/s^2(= g). Por tanto, la masa de un cuerpo que pesa 32.2 lb_f en la superficie de la Tierra es de 1 slug o

$$m = \frac{w}{g} = \frac{32.2 \text{ lb}_f}{32.2 \text{ pies/s}^2} = 1 \text{ slug}$$

Tabla 3-2 Sistemas de unidades

Sistemas de unidades / Cantidad	Sistemas absolutos			Sistemas gravitacionales	
	Métrico			Métrico de ingeniería	Británico de ingeniería
	SI	mks	cgs		
Longitud	m	m	cm	m	pie
Masa	kg	kg	g	$\frac{kg_f\text{-}s^2}{m}$	$\text{slug} = \frac{lb_f\text{-}s^2}{pie}$
Tiempo	s	s	s	s	s
Fuerza	$\text{N} = \frac{kg\text{-}m}{s^2}$	$\text{N} = \frac{kg\text{-}m}{s^2}$	$\text{din} = \frac{g\text{-}cm}{s^2}$	kg_f	lb_f
Energía	J = N-m	J = N-m	ergio = din-cm	kgf-m	pie-lb_f o Btu
Corriente eléctrica	$\text{W} = \frac{N\text{-}m}{s}$	$\text{W} = \frac{N\text{-}m}{s}$	din-cm / s	$\frac{kg_f\text{-}m}{s}$	$\frac{\text{pie-}lb_f}{s}$ o hp

Fuerza. La *fuerza* se define como la causa que tiende a producir un cambio en el movimiento de un cuerpo al cual se aplica. Para mover un cuerpo, debe aplicarse una fuerza sobre él. Dos tipos de fuerza pueden actuar sobre un cuerpo: las fuerzas de contacto y las fuerzas de campo. Las fuerzas de contacto son aquellas que tienen un contacto directo con el cuerpo, en tanto que las fuerzas de campo, tales como la fuerza gravitacional y la fuerza magnética, actúan sobre el cuerpo sin entrar en contacto con él.

Las unidades para la fuerza son el newton (N), la dina (din), el kg_f y la lb_f. En unidades del SI (sistema internacional) y del sistema mks (un sistema métrico absoluto) la unidad de fuerza es el newton. El newton es la fuerza que le dará a una masa de un kilogramo una aceleración de 1 m/s^2 o

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg-m/s}^2$$

Esto significa que 9.81 newtons le darán a una masa de un kilogramo una aceleración de 9.81 m/s^2. Dado que la aceleración gravitacional es g = 9.81 m/s^2 (como se mencionó antes, para cálculos en ingeniería el valor de g se considera como de 9.81 m/s^2 o 32.2 $pies/s^2$), una masa de un kilogramo producirá una fuerza en su base de 9.81 newtons.

La unidad para la fuerza en el sistema cgs (un sistema métrico absoluto) es la dina, que le dará a una masa de un gramo una aceleración de 1 cm/s^2 o

$$1 \text{ dina} = 1 \text{ g-cm/s}^2$$

La unidad para la fuerza en el sistema métrico de ingeniería (gravitacional) es el kg_f, que es una dimensión primaria en el sistema. Asimismo, en el sistema británico de ingeniería, la unidad de fuerza es la lb_f. También es una dimensión primaria en este sistema de unidades.

Comentarios. Las unidades del SI para la fuerza, la masa y la longitud son el newton (N), el kilogramo masa (kg) y el metro (m). Las unidades del mks para la fuerza, la masa y la longitud son iguales a las del SI. Asimismo, las unidades cgs para la fuerza, la masa y la longitud son la dina (din), el gramo (g) y el centímetro (cm) y las del sistema británico son la libra fuerza (lb_f), el slug y el pie. Cada uno de los sistemas de unidades es consistente en que la unidad de fuerza acelera la unidad de masa una unidad de longitud por segundo.

En los sistemas de unidades que aparecen en la tabla 3-2, se usa una "s" para el segundo. Sin embargo, en los documentos y libros sobre ingeniería, por lo general se utiliza "seg". Por tanto, en este libro usaremos "seg" y no "s", para el segundo.

Sistema mecánico. Considere el sistema masa-resorte-amortiguador montado en un carro sin masa, que aparece en la figura 3–15. Un amortiguador es un dispositivo que proporciona fricción viscosa o amortiguamiento. Está formado por un pistón y un cilindro lleno de aceite. El aceite resiste cualquier movimiento relativo entre la varilla del pistón y el cilindro, debido a que el aceite debe fluir alrededor del pistón (o a través de orificios en el pistón) de un lado del pistón al otro. El amortiguador esencialmente absorbe energía. Esta energía absorbida se disipa como calor y el amortiguador no almacena energía cinética ni potencial.

Obtengamos un modelo matemático de este sistema de masa-resorte-amortiguador montado en un carro, suponiendo que éste está inmóvil durante un $t < 0$. En este sistema, $u(t)$ es el desplazamiento del carro y la entrada para el sistema. En $t = 0$, el carro se mueve a una velocidad constante, o bien $\dot{u}$ = constante. El desplazamiento $y(t)$ de la masa es la salida. (El desplazamiento en relación con el piso.) En este sistema, m representa la masa, b denota el coeficiente de fricción viscosa y k es la constante del resorte. Suponemos que la fuerza de fricción del amortiguador es proporcional a $\dot{y} - zi$ y que el resorte es lineal; es decir, la fuerza del resorte es proporcional a $y - u$.

Para sistemas traslacionales, la segunda ley de Newton establece que

$$ma = \sum F$$

en donde m es una masa, a es la aceleración de la masa y ΣF es la suma de las fuerzas que actúan sobre la masa. Aplicando la segunda ley de Newton al sistema presente y considerando que el carro no tiene masa, obtenemos

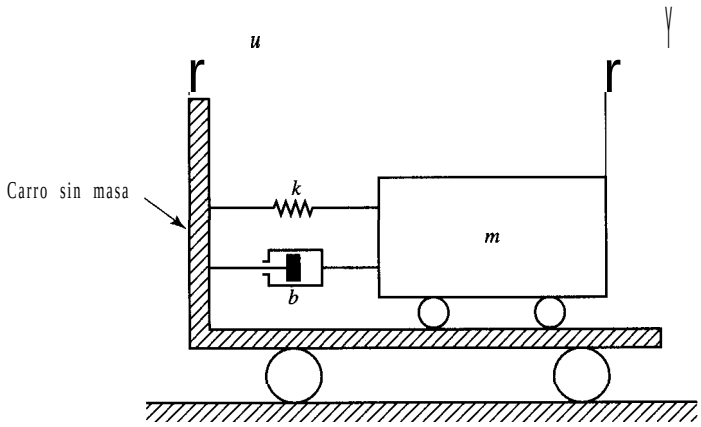


Figura 3-15
Sistema masa–resorte-amortiguador montado en un carro.

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -b\left(\frac{dy}{dt} - \frac{du}{dt}\right) - k(y - u)$$

o bien

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = b\frac{du}{dt} + ku \tag{3-44}$$

La ecuación (3-44) proporciona un modelo matemático del sistema considerado.

Un modelo mediante la función de transferencia es otra forma de representar un modelo matemático de un sistema lineal e invariante con el tiempo. Para el sistema mecánico presente, el modelo mediante función de transferencia se obtiene del modo siguiente. Tomar la transformada de Laplace de cada término de la ecuación (3-44) produce

$$\mathcal{L}\left[m\frac{d^2y}{dt^2}\right] = m[s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)]$$

$$\mathcal{L}\left[b\frac{dy}{dt}\right] = b[sY(s) - y(0)]$$

$$\mathcal{L}[ky] = kY(s)$$

$$\mathcal{L}\left[b\frac{du}{dt}\right] = b[sU(s) - u(0)]$$

$$\mathcal{L}[ku] = kU(s)$$

Si establecemos las condiciones iniciales iguales a cero, o establecemos $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ y $u(0) = 0$, la transformada de Laplace de la ecuación (3-44) se escribe como

$$(ms^2 + bs + k)Y(s) = (bs + k)U(s)$$

Tomando el cociente entre Y(s) y U(s), encontramos que la función de transferencia del sistema es

$$\text{Función de transferencia} = G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

Tal representación mediante la función de transferencia de un modelo matemático se usa con mucha frecuencia en la ingeniería de control. Sin embargo, debe señalarse que los modelos mediante la función de transferencia sólo se aplican a sistemas lineales e invariantes con el tiempo, dado que las funciones de transferencia sólo están definidas para tales sistemas.

A continuación obtendremos un modelo en el espacio de estados de este sistema. Primero compararemos la ecuación diferencial para este sistema

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u$$

con la forma estándar

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2u$$

e identificaremos a_1, a_2, b_0, b_1 y b_2 del modo siguiente:

$$a_1 = \frac{b}{m}, \qquad a_2 = \frac{k}{m}, \qquad b_0 = 0, \qquad b_1 = \frac{b}{m}, \qquad b_2 = \frac{k}{m}$$

Remitiéndonos a la ecuación (3–39), tenemos que

$$\beta_0 = b_0 = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = \frac{b}{m}$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = \frac{k}{m} - \frac{b}{m}^2$$

Por tanto, remitiéndonos a la ecuación (3–38), definimos

$$x_1 = y - \beta_0 u = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \frac{b}{m}u$$

A partir de la ecuación (3–40), tenemos que

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u = x_2 + \frac{b}{m}u$$

$$\dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + \beta_2 u = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2\right]u$$

y la ecuación de salida se convierte en

$$Y = x_1$$

o bien,

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & \frac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{b}{m}\\ \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2\end{bmatrix}u \qquad (3\text{-}45)$$

Y

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \qquad (3\text{-}46)$$

Las ecuaciones (345) y (346) dan una representación en el espacio de estados del sistema. (Observe que ésta no es la única representación en el espacio de estados. Hay infinitamente más representaciones en el espacio de estados para el sistema.)

EJEMPLO 3-4 Un péndulo invertido montado en un carro manejado por un motor aparece en la figura 3–16(a). Éste es un modelo del control de posición de un propulsor primario espacial para despegues. (El objetivo del problema del control de posición es conservar el propulsor primario espacial en una posición vertical.) El péndulo invertido es inestable porque puede girar en cualquier momento y en cualquier dirección, a menos que se le aplique una fuerza de control conveniente. Aquí consideramos sólo un problema en dos dimensiones, en el cual el péndulo sólo se mueve en el plano de la página. Se aplica al carro la fuerza de control u. Suponga que el centro de gravedad de la barra del péndulo está en su centro geométrico. Obtenga un modelo matemático para este sistema. Suponga que la masa m de la barra del péndulo es de 0.1 kg, la masa M del carro es de 2 kg y la longitud $2l$ de la barra del péndulo es de 1 m, o bien,

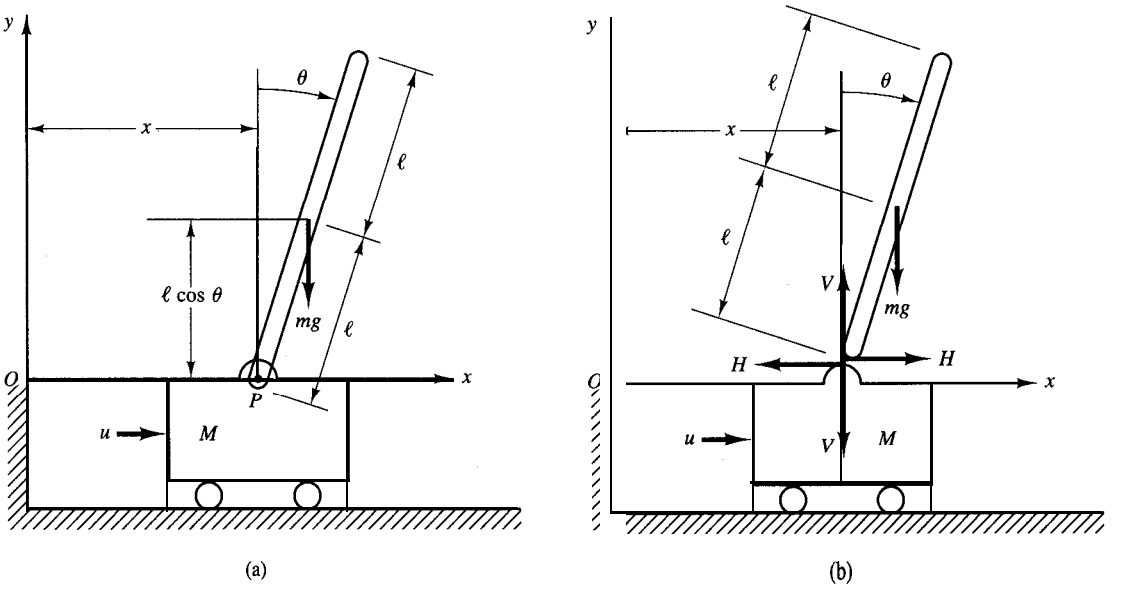


Figura 3-16
(a) Sistema del péndulo invertido; (b) diagrama de cuerpo libre.

$$m = 0.1 \text{ kg}, \qquad M = 2 \text{ kg}, \qquad 2l = 1 \text{ m}$$

Defina el ángulo de la barra respecto de la línea vertical como θ. Defina también las coordenadas (x, y) del centro de gravedad de la barra del péndulo como (x_G, y_G). De este modo

$$x_G = x + l \operatorname{sen} \theta$$
$$y_G = l \cos \theta$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento para el sistema, considere el diagrama de cuerpo libre que aparece en la figura 3–16(b). El movimiento rotacional de la barra del péndulo alrededor de su centro de gravedad se describe mediante

$$I\ddot{\theta} = Vl \operatorname{sen} \theta - Hl \cos \theta \qquad (3\text{-}47)$$

en donde I es el momento de inercia de la barra alrededor de su centro de gravedad.

El movimiento horizontal del centro de gravedad de la barra del péndulo se obtiene mediante

$$m \frac{d^2}{dt^2}(x + l \operatorname{sen} \theta) = H \qquad (3\text{-}48)$$

El movimiento vertical del centro de gravedad de la barra del péndulo es

$$m \frac{d^2}{dt^2}(l \cos \theta) = V - mg \qquad (3\text{-}49)$$

El movimiento horizontal del carro se describe mediante

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = u - H \qquad (3\text{-}50)$$

Las ecuaciones (3-47) a (3-50) describen el movimiento del sistema del péndulo invertido en el carro. Debido a que estas ecuaciones contienen sen θ y cos θ, son no lineales.

Si suponemos que el ángulo θ es pequeño, las ecuaciones (3–47) a (3-50) se linealizan del modo siguiente:

$$I\ddot{\theta} = Vl\theta - Hl \tag{3-51}$$

$$m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) = H \tag{3-52}$$

$$O = V - mg \tag{3-53}$$

$$M\ddot{x} = u - H \tag{3-54}$$

A partir de las ecuaciones (3-52) y (3–54), obtenemos

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \tag{3-55}$$

A partir de las ecuaciones (3-51) y (3–53), obtenemos

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} &= mgl\theta - Hl \\ &= mgl\theta - l(m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}) \end{aligned}$$

o bien

$$(Z + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \tag{3-56}$$

Las ecuaciones (3-55) y (3-56) describen el movimiento del sistema del péndulo invertido en el carro. Constituyen un modelo matemático del sistema. (Más adelante, en los capítulos 12 y 13, diseñaremos controladores para conservar el péndulo vertical en presencia de perturbaciones.)

3-7 SISTEMAS ELÉCTRICOS

En esta sección abordaremos los circuitos eléctricos que involucran los resistores, los capacitores y los inductores.

Las leyes fundamentales que gobiernan los circuitos eléctricos son las leyes de corrientes y voltajes de Kirchhoff. La ley de corrientes de Kirchhoff (la ley de nodos) plantea que la suma algebraica de todas las corrientes que entran y salen de un nodo es cero. (Esta ley también puede plantearse del modo siguiente: la suma de las corrientes que entran a un nodo es igual a la suma de las corrientes que salen del mismo.) La ley de voltajes de Kirchhoff (la ley de mallas) establece que en cualquier instante determinado la suma algebraica de los voltajes alrededor de cualquier malla en un circuito eléctrico es cero. (Esta ley también se plantea del modo siguiente: la suma de las caídas de voltaje es igual a la suma de las elevaciones de voltaje alrededor de un malla.) Un modelo matemático de un circuito eléctrico se obtiene aplicando una o ambas leyes de Kirchhoff.

Esta sección trata de los circuitos eléctricos sencillos. El modelado matemático de sistemas con amplificadores operacionales se presenta en el capítulo 5.

Circuito *LRC*. Considere el circuito eléctrico que aparece en la figura 3-17. El circuito está formado por una inductancia ***L*** (henry), una resistencia ***R*** (ohm), y una capacitancia C (farad). Aplicando la ley de voltaje de Kirchhoff al sistema, obtenemos las ecuaciones siguientes:

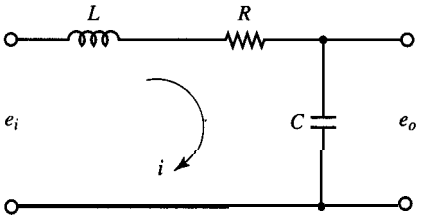


Figura 3–17
Circuito eléctrico.

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = e_i \tag{3–57}$$

$$\frac{1}{C}\int i\,dt = e_o \tag{3–58}$$

Las ecuaciones (3-57) y (3-58) dan un modelo matemático del circuito.

Un modelo mediante la función de transferencia del circuito también se obtiene del modo siguiente. Se toma la transformada de Laplace de las ecuaciones (3-57) y (3-58) y se suponen condiciones iniciales iguales a cero, para obtener

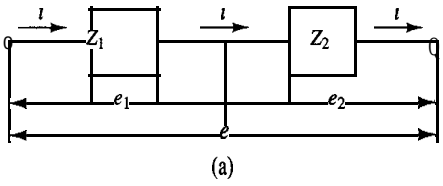
$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{C}\frac{1}{s}Z(s) = E,(s)$$

$$\frac{1}{C}\frac{1}{s}Z(s) = E,(s)$$

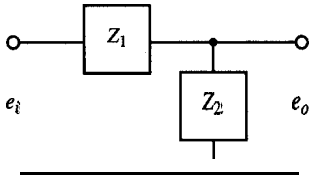
Si se supone que e_i es la entrada y e_o la salida, la función de transferencia de este sistema resulta ser

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \tag{3-59}$$

Impedancias complejas. En las funciones de transferencia para circuitos eléctricos, a menudo encontramos conveniente escribir las ecuaciones transformadas directamente mediante el método de Laplace, sin escribir las ecuaciones diferenciales. Considere el sistema que aparece en la figura 3–18(a). En este sistema, Z_1 y Z_2 representan impedancias complejas. La impedancia compleja Z(s) de un circuito de dos terminales es el cociente entre *E(s),* la transformada de Laplace del voltaje a través de las terminales, e Z(s), la transformada de Laplace de la corriente a través del elemento, bajo la suposición de que las condiciones iniciales son cero; por tanto, Z(s) = $E(s)/I(s)$. Si los elementos de dos terminales son una resistencia *R,* una capacitancia C, o una inductancia *L,* la impedancia compleja se obtiene mediante *R,* $1/Cs$, o Ls, respectivamente. Si se conectan impedancias complejas en serie, la impedancia total es la suma de las impedancias complejas individuales.



(a)



(b)

Figura 3–18
Circuitos eléctricos.

Recuerde que el enfoque de impedancias sólo es válido si todas las condiciones iniciales involucradas son cero. Dado que las funciones de transferencia requieren de condiciones iniciales cero, el enfoque de impedancias se aplica para obtener la función de transferencia del circuito eléctrico. Este enfoque simplifica mucho la obtención de funciones de transferencia de circuitos eléctricos.

Considere el circuito que aparece en la figura 3–18(b). Suponga que los voltajes e_i y e_o son la entrada y la salida del circuito, respectivamente. Por tanto, la función de transferencia de este circuito es

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

Para el sistema que aparece en la figura 3-17,

$$Z_1 = Ls + R, \qquad Z_2 = \frac{1}{Cs}$$

Por tanto, la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ se encuentra del modo siguiente:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

que es, por supuesto, idéntica a la ecuación (3-59).

Representación en el espacio de estados. Un modelo en el espacio de estados del sistema, como el que aparece en la figura 3-17, se obtiene del modo siguiente. Primero, observe que la ecuación diferencial para el sistema se obtiene a partir de la ecuación (3-59) como

$$\ddot{e}_o + \frac{R}{L}\dot{e}_o + \frac{1}{LC}e_o = \frac{1}{LC}e_i$$

Después, definiendo las variables de estado mediante

$$x_1 = e_o$$
$$x_2 = \dot{e}_o$$

y las variables de entrada y salida mediante

$$u = e_i$$
$$y = e_o = x_1$$

obtenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u$$

y

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Estas dos ecuaciones dan un modelo matemático del sistema en el espacio de estados.

Funciones de transferencia de elementos en cascada. Muchos sistemas realimentados tienen componentes que se cargan uno a otro. Considere el sistema de la figura 3-19. Suponga que e_i es la entrada y que e_o es la salida. En este sistema, la segunda etapa del circuito (la parte R_2C_2) produce un efecto de carga en la primera etapa (la parte de R_1C_1). Las ecuaciones para este sistema son

$$\frac{1}{C_1}\int (i_1 - i_2)\,dt + R_1 i_1 = e_i \tag{3-60}$$

Y

$$\frac{1}{C_1}\int (i_1 - i_2)\,dt + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt = 0 \tag{3-61}$$

$$\frac{1}{C_2}\int i_2\,dt = e_o \tag{3-62}$$

Si consideramos la transformada de Laplace de las ecuaciones (3-60) a (3-62 y suponemos condiciones iniciales de cero, obtenemos

$$\frac{1}{C_1 s}[I_1(s) - I_2(s)] + R_1 I_1(s) = E_i(s) \tag{3-63}$$

$$\frac{1}{C_1 s}[I_2(s) - I_1(s)] + R_2 I_2(s) + \frac{1}{C_2 s} I_2(s) = 0 \tag{3-64}$$

$$\frac{1}{C_2 s} I_2(s) = E_o(s) \tag{3-65}$$

Eliminando $I_1(s)$ de las ecuaciones (3-63) y (3-64) y escribiendo $E_i(s)$ en términos de $I_2(s)$, encontramos que la función de transferencia entre $E_o(s)$ y $E_i(s)$ es

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{(R_1C_1 s + 1)(R_2C_2 s + 1) + R_1C_2 s}$$

$$= \frac{1}{R_1C_1R_2C_2 s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)s + 1} \tag{3-66}$$

El término R_1C_2s en el denominador de la función de transferencia representa la interacción de dos circuitos *RC* sencillos. Dado que $(R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)^2 > 4R_1C_1R_2C_2$, las dos raíces del denominador de la ecuación (3-66) son reales.

El análisis presente muestra que, si se conectan dos circuitos *RC* en cascada, de modo que la salida del primer circuito es la entrada del segundo, la función de transferencia gene-

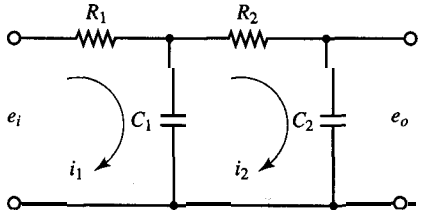


Figura 3–19
Sistema eléctrico

ral no es el producto de $1/(R_1C_1s + 1)$ y $1/(R_2C_2s + 1)$. Esto se debe a que, cuando obtenemos la función de transferencia para un circuito aislado, suponemos implícitamente que la salida no está cargada. En otras palabras, se supone que la impedancia de carga es infinita, lo cual significa que no se entrega potencia en la salida. Sin embargo, cuando se conecta el segundo circuito a la salida del primero, se entrega cierta cantidad de potencia y, por tanto, se viola la suposición de que no hay carga. A su vez, si la función de transferencia de este sistema se obtiene bajo la suposición de que no hay carga, la suposición no es válida. El grado del efecto de carga determina la cantidad de modificación de la función de transferencia.

Funciones de transferencia de elementos en cascada sin carga. La función de transferencia de un sistema formado por elementos en cascada sin carga se obtiene eliminando la entrada y la salida intermedias. Por ejemplo, considere el sistema que aparece en la figura 3–20(a). Las funciones de transferencia de los elementos son

$$G_1(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} \qquad \text{y} \qquad G_2(s) = \frac{X_3(s)}{X_2(s)}$$

Si la impedancia de entrada del segundo elemento es infinita, la salida del primer elemento no se modifica si se conecta al segundo. En este caso, la función de transferencia del sistema completo se convierte en

$$G(s) = \frac{X_3(s)}{X_1(s)} = \frac{X_2(s)X_3(s)}{X_1(s)X_2(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

Por tanto, la función de transferencia del sistema completo es el producto de las funciones de transferencia de los elementos individuales. Esto se aprecia en la figura 3–20(b).

Como ejemplo, considere el sistema que aparece en la figura 3-21. La inserción de un amplificador de aislamiento entre los circuitos para obtener características sin carga se usa a menudo cuando se combinan circuitos. Dado que los amplificadores tienen impendancias de entrada muy altas, un amplificador de aislamiento insertado entre los dos circuitos justifica la suposición de que no hay carga.

Los dos circuitos RC sencillos, aislados mediante un amplificador como el que aparece en la figura 3-21, tienen efectos de carga insignificantes y la función de transferencia de todo el circuito es igual al producto de las funciones de transferencia individuales. Por tanto, en este caso,

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \left(\frac{1}{R_1C_1s + 1}\right)(K)\left(\frac{1}{R_2C_2s + 1}\right)$$
$$= \frac{K}{(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1)}$$

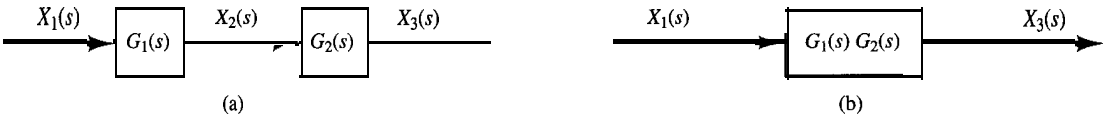


Figura 3-20
(a) Sistema formado por dos elementos en cascada sin carga; (b) un sistema equivalente.

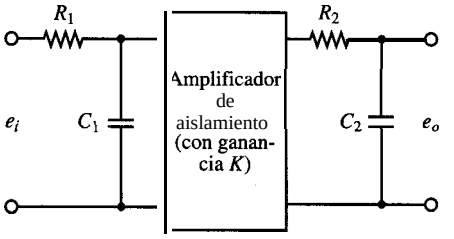


Figura 3–21
Sistema eléctrico.

3-8 SISTEMA DEL NIVEL DE LÍQUIDO

Al analizar sistemas que implican el flujo de líquidos, resulta necesario dividir los regímenes de flujo en laminar y turbulento, de acuerdo con la magnitud del número de Reynolds. Si el número de Reynolds es mayor que entre 3000 y 4000, el flujo es turbulento. El flujo es laminar si el número de Reynolds es menor que unos 2000. En el caso laminar, tiene lugar un flujo estable en las corrientes, sin turbulencia. Los sistemas que contienen un flujo turbulento a menudo deben representarse mediante ecuaciones diferenciales no lineales, en tanto que los sistemas con un flujo laminar pueden representarse mediante ecuaciones diferenciales lineales. (Con frecuencia los procesos industriales implican un flujo de líquidos a través de tubos y tanques conectados. El flujo en tales procesos resulta a menudo turbulento y no laminar.)

En esta sección obtendremos modelos matemáticos de sistemas del nivel de líquido. Si se introduce el concepto de resistencia y capacitancia para tales sistemas del nivel de líquido, es posible describir en formas simples las características dinámicas de tales sistemas.

Resistencia y capacitancia de sistemas del nivel de líquido. Considere el flujo a través de un tubo corto que conecta dos tanques. La resistencia R para el flujo de líquido en tal tubo se define como el cambio en la diferencia de nivel (la diferencia entre el nivel de líquido en los dos tanques) necesaria para producir un cambio de una unidad en la velocidad del flujo; es decir,

$$R = \frac{\text{cambio en la diferencia de nivel, m}}{\text{cambio en la velocidad de flujo, } \mathrm{m^3/seg}}$$

Dado que la relación entre la velocidad del flujo y la diferencia de nivel es distinta para el flujo laminar y el flujo turbulento, en lo sucesivo consideraremos ambos casos.

Considere el sistema del nivel de líquidos que aparece en la figura 3–22(a). En este sistema el líquido sale a chorros a través de la válvula de carga a un lado del tanque. Si el flujo a través de esta restricción es laminar, la relación entre la velocidad del flujo en estado estable y la altura en estado estable en el nivel de la restricción se obtiene mediante

$$Q = KH$$

en donde Q = velocidad del flujo del líquido en estado estable, $\mathrm{m^3/seg}$
K = coeficiente, $\mathrm{m^2/seg}$
H = altura en estado estable, m

Observe que la ley que controla el flujo laminar es análoga a la ley de Coulomb, que plantea que la corriente es directamente proporcional a la diferencia potencial.

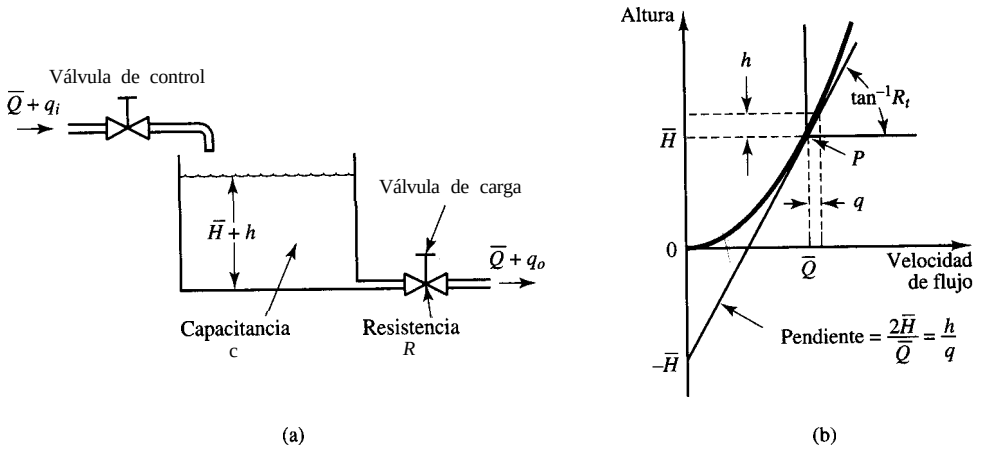


Figura 3-22
(a) Sistema del nivel de líquido; (b) curva de la altura en contra del flujo.

Para el flujo laminar, la resistencia R_1 se obtiene como

$$R_l = \frac{dH}{dQ} = \frac{H}{Q}$$

La resistencia del flujo laminar es constante y análoga a la resistencia eléctrica.

Si el flujo es turbulento a través de la restricción, la velocidad del flujo en estado estable se obtiene mediante

$$Q = K\sqrt{H} \tag{3–67}$$

en donde Q = velocidad de flujo del líquido en estado estable, m^3/seg
K = coeficiente, $m^{2.5}/seg$
H = altura en estado estable, m

La resistencia R_t para el flujo turbulento se obtiene a partir de

$$R_t = \frac{dH}{dQ}$$

Debido a que de la ecuación (3-67) obtenemos

$$dQ = \frac{K}{2\sqrt{H}}\,dH$$

tenemos que

$$\frac{dH}{dQ} = \frac{2\sqrt{H}}{K} = \frac{2\sqrt{H}\sqrt{H}}{Q} = \frac{2H}{Q}$$

Por tanto,

$$R_t = \frac{2H}{Q} \tag{3–68}$$

El valor de la resistencia de flujo turbulento R_t depende del flujo y la altura. Sin embargo, el valor de R_t se considera constante si los cambios en la altura y en el flujo son pequeños.

Usando la resistencia de flujo turbulento, la relación entre Q y H se obtiene mediante

$$Q = \frac{2H}{R_t}$$

Tal linealización es válida, siempre y cuando los cambios en la altura y el flujo, a partir de sus valores respectivos en estado estable, sean pequeños.

En muchos casos prácticos, se desconoce el valor del coeficiente K de la ecuación (3–67), que depende del coeficiente de flujo y del área de restricción. En tales casos, la resistencia se determina mediante una gráfica de la curva de la altura contra el flujo, basada en datos experimentales y midiendo la pendiente de la curva en la condición de operación. Un ejemplo de tal gráfica aparece en la figura 3–22(b). En la figura, el punto P es el punto de operación en estado estable. La línea tangente a la curva en el punto P interseca la ordenada en el punto $(-\bar{H}, 0)$. Por tanto, la pendiente de esta línea tangente es $2\bar{H}/\bar{Q}$. Dado que la resistencia R_t en el punto de operación P se obtiene mediante $2\bar{H}/\bar{Q}$, la resistencia R_t es la pendiente de la curva en el punto de operación.

Considere la condición de operación en la vecindad del punto P. Defina como h una desviación pequeña de la altura a partir del valor en estado estable y como q el pequeño cambio correspondiente del flujo. A continuación, la pendiente de la curva en el punto P se obtiene mediante

$$\text{Pendiente de la curva en el punto } P = \frac{h}{q} = \frac{2\bar{H}}{\bar{Q}} = R_t$$

La aproximación lineal se basa en el hecho de que la curva real no difiere mucho de su línea tangente si la condición de operación no varía mucho.

La capacitancia C de un tanque se define como el cambio necesario en la cantidad de líquido almacenado, para producir un cambio de una unidad en el potencial (altura). (El potencial es la cantidad que indica el nivel de energía del sistema.)

$$\text{C} = \frac{\text{cambio en el líquido almacenado, m}^3}{\text{cambio en la altura, m}}$$

Debe señalarse que la capacidad (m^3) y la capacitancia (m^2) son diferentes. La capacitancia del tanque es igual a su área transversal. Si ésta es constante, la capacitancia es constante para cualquier altura.

Sistemas del nivel de líquido. Considere el sistema que aparece en la figura 3–22(a). Las variables se definen del modo siguiente:

$\bar{Q}$ = velocidad de flujo en estado estable (antes de que haya ocurrido cualquier cambio), m^3/seg

q_i = desviación pequeña de la velocidad de entrada de su valor en estado estable, m^3/seg

q_o = desviación pequeña de la velocidad de salida de su valor en estado estable, m^3/seg

$\bar{H}$ = altura en estado estable (antes de que haya ocurrido un cambio), m

h = desviación pequeña de la altura a partir de su valor en estado estable, m

Como se señaló antes, un sistema se considera lineal si el flujo es laminar. Aunque el flujo sea turbulento, el sistema puede linealizarse si los cambios en las variables se mantienen pequeños. A partir de la suposición de que el sistema es lineal o linealizado, la ecuación diferencial de este sistema se obtiene del modo siguiente. Dado que el flujo de en-

trada menos el flujo de salida durante el pequeño intervalo de tiempo dt es igual a la cantidad adicional almacenada en el tanque, observamos que

$$C dh = (q_i - q_o)\, dt$$

A partir de la definición de resistencia, la relación entre q_o y h se obtiene mediante

$$q_o = \frac{h}{R}$$

La ecuación diferencial para este sistema para un valor constante de R se convierte en

$$RC\frac{dh}{dt} + h = Rq_i \tag{3–69}$$

Observe que RC es la constante de tiempo del sistema. Si tomamos la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (3–69), y suponemos la condición inicial de cero, obtenemos

$$(RCs + 1)H(s) = RQ_i(s)$$

en donde

$$H(s) = \mathcal{L}[h] \qquad \text{Y} \qquad Q_i(s) = \mathcal{L}[q_i]$$

Si q_i se considera la entrada y h la salida, la función de transferencia del sistema es

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$

Si, no obstante, q_o se toma como la salida, y la entrada es la misma, la función de transferencia es

$$\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

en donde hemos usado la relación

$$Q_o(s) = \frac{1}{R}H(s)$$

Sistemas del nivel de liquido con interacción. Considere el sistema que aparece en la figura 3-23. En este sistema interactúan los dos tanques. Por tanto, la función de transferencia del sistema no es el producto de las dos funciones de transferencia de primer orden.

En lo sucesivo, sólo supondremos variaciones pequeñas de las variables a partir de los valores en estado estable. Usando los símbolos definidos en la figura 3-23, obtenemos las ecuaciones siguientes para este sistema:

$$\frac{h_1 - h_2}{R_1} = q_1 \tag{3–70}$$

$$C_1\frac{dh_1}{dt} = q - q_1 \tag{3–71}$$

$$\frac{h_2}{R_2} = q_2 \tag{3–72}$$

$$C_2\frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2 \tag{3-73}$$

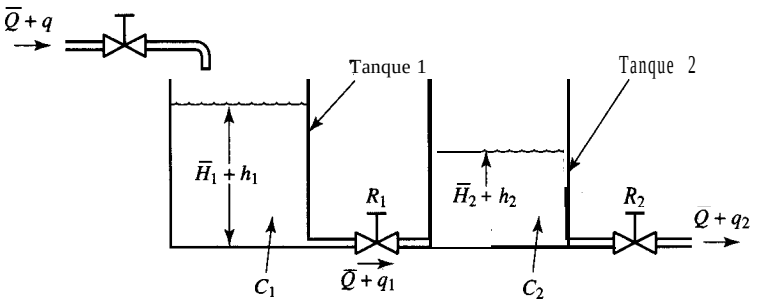


Figura 3-23
Sistema del nivel de líquido con interacción.

$\bar{Q}$: velocidad de flujo en estado estable
$\bar{H}_1$: nivel de líquido en estado estable del tanque 1
$\bar{H}_2$: nivel de líquido en estado estable del tanque 2

Si q se considera la entrada y q_2 la salida, la función de transferencia del sistema es

$$\frac{Q_2(s)}{Q(s)} = \frac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1)s + 1} \qquad (3\text{-}74)$$

Es instructivo obtener la ecuación (3–74), función de transferencia de los sistemas que interactúan, mediante una reducción del diagrama de bloques. A partir de las ecuaciones (3-70) a (3–73), obtenemos los elementos del diagrama de bloques, tal como aparece en la figura 3–24(a). Si conectamos las señales de manera adecuada, podemos construir un diagrama de bloques, como el de la figura 3–24(b). Es posible simplificar este diagrama de bloques, tal como aparece en la figura 3–24(c). Simplificaciones adicionales producen las figuras 3–24(d) y (e). La figura 3–24(e) es equivalente a la ecuación (3-74).

Observe la similitud y la diferencia entre la función de transferencia obtenida mediante la ecuación (3-74) y la que se obtuvo con la ecuación (3-66). El término R_2C_1s que aparece en el denominador de la ecuación (3-74) ejemplifica la interacción entre los dos tanques. Asimismo, el término R_1C_2s en el denominador de la ecuación (3-66) representa la interacción entre los dos circuitos *RC* de la figura 3-19.

3-9 SISTEMASTÉRMICOS

Los sistemas térmicos son aquellos que involucran la transferencia de calor de una sustancia a otra. Estos sistemas se analizan en términos de resistencia y capacitancia, aunque la capacitancia térmica y la resistencia térmica tal vez no se representen con precisión como elementos de parámetros concentrados, dado que, por lo general, están distribuidas en todas las sustancias. Para lograr análisis precisos, deben usarse modelos de parámetros distribuidos. Sin embargo, para simplificar el análisis, aquí supondremos que un sistema térmico se representa mediante un modelo de parámetros concentrados, que las sustancias que se caracterizan mediante una resistencia al flujo de calor tienen una capacitancia térmica insignificante y que las sustancias que se caracterizan por una capacitancia térmica tienen una resistencia insignificante al flujo de calor.

El calor fluye de una sustancia a otra de tres formas diferentes: por conducción, por convección y por radiación. Aquí sólo consideraremos la conducción y la convección. (La transferencia de calor por radiación sólo se aprecia si la temperatura del emisor es muy alta en comparación con la del receptor. La mayor parte de los procesos térmicos en los sistemas de control de procesos no involucran transferencia de calor por radiación.)

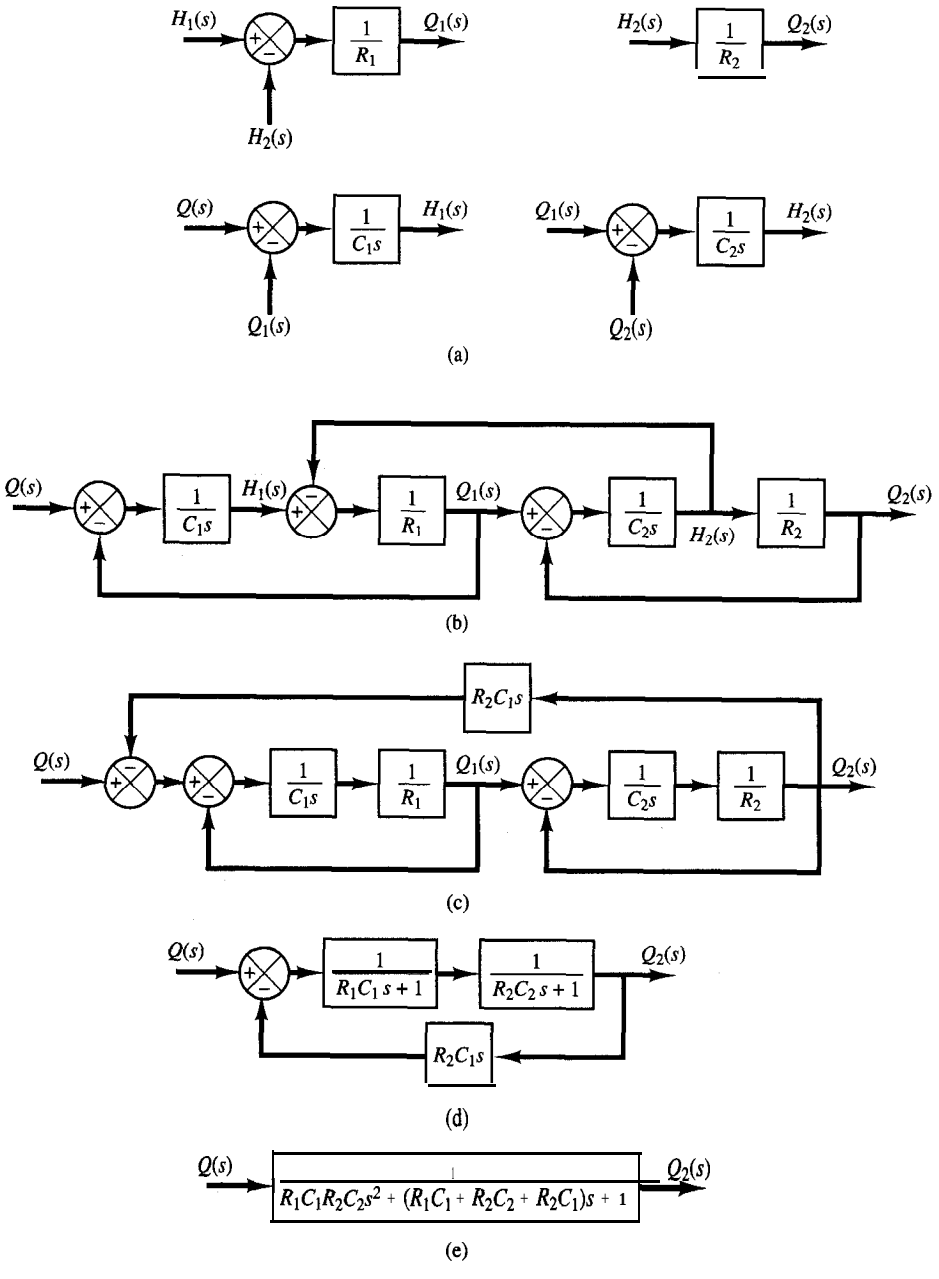


Figura 3-24
(a) Elementos del diagrama de bloques del sistema que aparece en la figura 3-23; (b) diagrama de bloques del sistema; (c)-(e) reducciones sucesivas del diagrama de bloques.

Para la transferencia de calor por conducción o convección,

$$q = K\,\Delta\theta$$

en donde q = flujo de calor, kcal/seg
$\Delta\theta$ = diferencia de temperatura, °C
K = coeficiente, kcal/seg °C

el coeficiente K se obtiene mediante

$$K = \frac{kA}{AX}, \qquad \text{por conducción}$$

$$= HA, \qquad \text{por convección}$$

en donde k = conductividad térmica, kcal/m seg °C
A = área normal para flujo de calor, m^2
AX = espesor del conductor, m
H = coeficiente de convección, kcal/m^2 seg °C

Resistencia y capacitancia térmicas. La resistencia térmica R para la transferencia de calor entre dos sustancias se define del modo siguiente:

$$R = \frac{\text{cambio en la diferencia de temperatura, °C}}{\text{cambio en el flujo de calor, kcal/seg}}$$

La resistencia térmica para una transferencia de calor por conducción o por convección se obtiene mediante

$$R = \frac{d(\Delta\theta)}{dq} = \frac{1}{K}$$

Dado que los coeficientes de conductividad y convección térmica son casi constantes, la resistencia térmica para la conducción o la convección es constante.

La capacitancia térmica C se define mediante

$$c = \frac{\text{cambio en el calor almacenado, kcal}}{\text{cambio en la temperatura, °C}}$$

o bien

$$C = mc$$

en donde m = masa de la sustancia considerada, kg
c = calor específico de la sustancia, kcal/kg °C

Sistemas térmicos. Considere el sistema que aparece en la figura 3–25(a). Se supone que el tanque está aislado para eliminar las pérdidas de calor hacia el aire circundante. También se supone que no hay almacenamiento de calor en el aislamiento y que el lfquido del tanque está perfectamente mezclado, por lo que tiene una temperatura estable. De este modo, se usa una sola temperatura para describir la del líquido en el tanque y la del lfquido que sale.

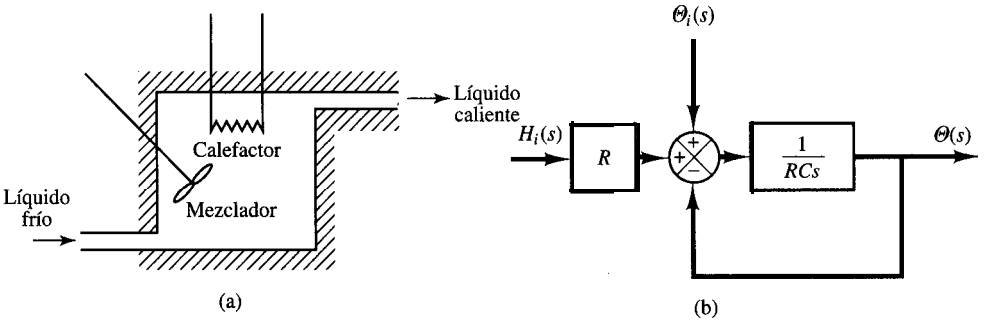


Figura 3-25
(a) Sistema térmico; (b) diagrama de bloques del sistema.

Definamos:

$\bar{\Theta}_i$ = temperatura en estado estable del líquido que entra, °C

$\bar{\Theta}_o$ = temperatura en estado estable del líquido que sale, °C

G = velocidad de flujo del líquido en estado estable, kg/seg

M = masa del líquido en el tanque, kg

c = calor específico del líquido, kcal/kg °C

R = resistencia térmica, °C seg/kcal

C = capacitancia térmica, kcal/°C

$\bar{H}$ = entrada del flujo de calor en estado estable, kcal/seg

Suponga que la temperatura del líquido que entra se mantiene constante y que el flujo de calor de entrada al sistema (el calor que proporciona el calefactor), cambia repentinamente de $\bar{H}$ a $\bar{H} + h_i$, en donde h_i representa un cambio pequeño en el flujo de calor de entrada. El flujo de calor de salida cambiará, entonces, en forma gradual, de $\bar{H}$ a $\bar{H} + h_i$. La temperatura del líquido que sale también cambiará de $\bar{\Theta}_o$ a $\bar{\Theta}_o + \theta$. Para este caso, h_o, C y R se obtienen, respectivamente, como

$$h_o = Gc\theta$$

$$C = Mc$$

$$R = \frac{\theta}{h_o} = \frac{1}{Gc}$$

La ecuación diferencial para este sistema es

$$C\frac{d\theta}{dt} = h_i - h_o$$

que puede reescribirse como

$$RC\frac{d\theta}{dt} + \theta = Rh_i$$

Observe que la constante de tiempo del sistema es igual a RC o MIG en segundos. La función de transferencia que relaciona θ con h_i se obtiene mediante

$$\frac{\Theta(s)}{H_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$

en donde $\Theta(s) = \mathcal{L}[\theta(t)]$ y $H_i(s) = \mathcal{L}[h_i(t)]$.

En la práctica, la temperatura del líquido que entra puede fluctuar y actuar como una perturbación de carga. (Si se pretende mantener una temperatura de salida constante, puede instalarse un controlador automático que ajuste el flujo de calor de entrada, con el propósito de compensar las fluctuaciones en la temperatura del líquido que entra.) Si la temperatura del líquido que entra cambia repentinamente de $\bar{\Theta}_i$ a $\bar{\Theta}_i + \theta_i$, en tanto que el flujo de calor de entrada H y el flujo de líquido G se conservan constantes, el flujo de calor de salida cambiará de $\bar{H}$ a $\bar{H} + h_o$, y la temperatura del líquido que sale cambiará de $\bar{\Theta}_o$ a $\bar{\Theta}_o + \theta$. La ecuación diferencial para este caso es

$$C\frac{d\theta}{dt} = Gc\theta_i - h_o$$

que puede reescribirse como

$$RC\frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_i$$

La función de transferencia que relaciona θ y θ_i se obtiene mediante

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

en donde $\Theta(s) = \mathcal{L}[\theta(t)]$ y $\Theta_i(s) = \mathcal{L}[\theta_i(t)]$.

Si este sistema térmico está sujeto a cambios en la temperatura del líquido que entra y en el flujo de calor de entrada, en tanto que el flujo del líquido se conserva constante, el cambio θ en la temperatura del líquido que sale se obtiene mediante la ecuación siguiente:

$$RC\frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_i + Rh_i$$

La figura 3-25 (b) muestra un diagrama de bloques que corresponde a este caso. Observe que el sistema contiene dos salidas.

3-10 LINEALIZACIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS NO LINEALES

En esta sección presentaremos una técnica de linealización aplicable a muchos sistemas no lineales. El proceso de linealizar sistemas no lineales es importante, porque linealizar ecuaciones no lineales permite aplicar numerosos métodos de análisis lineal que proporcionen información acerca del comportamiento de los sistemas no lineales. El procedimiento de linealización que se presenta aquí se basa en la expansión de la función no lineal en series de Taylor alrededor del punto de operación y la retención sólo del término lineal. Debido

a que no consideramos los términos de orden superior de la expansión en series de Taylor, estos términos no considerados deben ser suficientemente pequeños; es decir, las variables sólo se desvían ligeramente de la condición de operación.

A continuación presentaremos primero los aspectos matemáticos de la técnica de **linealización** y después aplicaremos la técnica a un sistema hidráulico de seguimiento a fin de obtener un modelo lineal para el sistema.

Aproximación lineal de modelos matemáticos no lineales. A fin de obtener un modelo matemático lineal para un sistema no lineal, suponemos que las variables sólo se desvían ligeramente de alguna condición de operación. Considere un sistema cuya entrada es x(t) y cuya salida es y(t). La relación entre y(t) y x(t) se obtiene mediante

$$Y = f(x) \tag{3-75}$$

Si la condición de operación normal corresponde a $\bar{x}, \bar{y}$, la ecuación (3-75) se expande en series de Taylor alrededor de este punto, del modo siguiente:

$$\begin{aligned} Y &= f(x) \\ &= f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}(x - \bar{x})^2 + \cdots \end{aligned} \tag{3-76}$$

en donde las derivadas $df/dx, d^2f/dx^2, \ldots$ se evalúan en $x = \bar{x}$. Si la variación $x - \bar{x}$ es pequeña, es posible no considerar los términos de orden superior en $x - \bar{x}$. A continuación, la ecuación (3-76) se escribe como

$$y = \bar{y} + K(x - \bar{x}) \tag{3-77}$$

en donde

$$\bar{y} = f(\bar{x})$$

$$K = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x}}$$

La ecuación (3-77) puede reescribirse como

$$y - \bar{y} = K(x - \bar{x}) \tag{3-78}$$

lo cual indica que $y - \bar{y}$ es proporcional a $x - \bar{x}$. La ecuación (3-78) da un modelo matemático lineal para el sistema no lineal obtenido mediante la ecuación (3-75) cerca del punto de operación $x = \bar{x}, y = \bar{y}$.

A continuación, considere un sistema no lineal cuya salida y es una función de dos entradas x_1 y x_2, de modo que

$$Y = f(x_1, x_2) \tag{3-79}$$

A fin de obtener una aproximación lineal para este sistema no lineal, es posible expandir la ecuación (3-79) en series de Taylor alrededor del punto de operación normal $\bar{x}_1, \bar{x}_2$. Después, la ecuación (3-79) se convierte en

$$Y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) \right] + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1 - \bar{x}_1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_2 - \bar{x}_2)^2 \right] + \cdots$$

en donde las derivadas parciales se evalúan para $x_1 = \bar{x}_1, x_2 = \bar{x}_2$. Cerca del punto de operación normal, es posible no considerar los términos de orden superior. A continuación, el modelo matemático lineal de este sistema no lineal alrededor de la condición de operación normal se obtiene mediante

$$y - \bar{y} = K_1(x_1 - \bar{x}_1) + K_2(x_2 - \bar{x}_2)$$

en donde

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$$K_1 = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_1=\bar{x}_1, x_2=\bar{x}_2}$$

$$K_2 = \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x_1=\bar{x}_1, x_2=\bar{x}_2}$$

La técnica de linealización presentada aquí es válida alrededor de la condición de operación. Sin embargo, si las condiciones de operación varían ampliamente, tales ecuaciones linealizadas no son adecuadas y deben manejarse ecuaciones no lineales. Es importante recordar que un modelo matemático determinado, que se use en el análisis y el diseño, puede representar con precisión la dinámica de un sistema real para ciertas condiciones de operación, pero puede no ser preciso para otras.

Linealización de un sistema hidráulico de seguimiento. La figura 3–26(a) muestra un servomotor hidráulico. Es esencialmente un amplificador de potencia hidráulico controlado por una válvula piloto y un actuador. La válvula piloto es balanceada, en el sentido de que las fuerzas de presión que actúan sobre ella están balanceadas. Una salida de potencia muy grande se controla mediante una válvula piloto, que se posiciona con muy poca potencia.

En la práctica, los puertos que aparecen en la figura 3–26(a) suelen fabricarse más anchos que las válvulas correspondientes. En este caso, siempre hay un escape a través de las válvulas. Tal escape mejora tanto la sensibilidad como la linealidad del servomotor hidráulico. En el análisis siguiente haremos la suposición de que los puertos se han hecho más anchos que las válvulas, es decir, que las válvulas están subajustadas. [Observe que, en ocasiones, una señal intermitente, señal de alta frecuencia de amplitud muy pequeña (con respecto al desplazamiento máximo de la válvula), está sobreimpuesta al movimiento de la válvula piloto. Esto también mejora la sensibilidad y la linealidad. Asimismo, en este caso hay un escape a través de la válvula.]

Aplicaremos la técnica de linealización que se acaba de presentar para obtener un modelo matemático linealizado del servomotor hidráulico. Suponemos que la válvula está subajustada, que es simétrica y que admite un fluido hidráulico sometido a una presión alta dentro de un cilindro de potencia que contiene un pistón grande, a fin de que se establezca

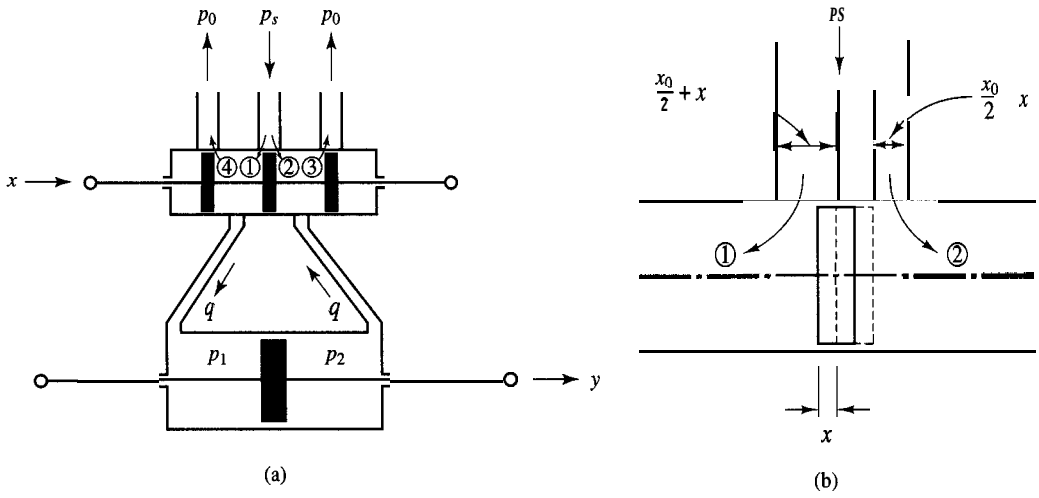


Figura 3-26
(a) Sistema hidráulico de seguimiento; (b) diagrama ampliado del área del orificio de la válvula.

una fuerza hidráulica grande con el propósito de mover una carga. Suponemos que la inercia y la fricción de la carga son pequeñas en comparación con la fuerza hidráulica grande. En este análisis, se supone que el fluido hidráulico es incomprimible y que la fuerza de inercia del pistón de energía es insignificante. También suponemos que, como suele ocurrir, el área del orificio (el ancho de la ranura en la manga de la válvula) de cada puerto es proporcional al desplazamiento x de la válvula.

En la figura 3–26(b) tenemos un diagrama ampliado del área del orificio de la válvula. Definamos las áreas de los orificios de la válvula en los puertos 1, 2, 3, 4, como A_1, A_2, A_3, A_4, respectivamente. Asimismo, definamos los flujos a través de los puertos 1, 2, 3, 4, como q_1, q_2, q_3, q_4, respectivamente. Observe que, dado que la válvula es simétrica, $A_1 = A_3$ y $A_2 = A_4$. Suponiendo que el desplazamiento x es pequeño, obtenemos

$$A_1 = A_3 = k\left(\frac{x_0}{2} + x\right)$$

$$A_2 = A_4 = k\left(\frac{x_0}{2} - x\right)$$

en donde k es una constante.

Además, supondremos que la presión de retorno p_0 en la línea de retorno es pequeña y, por tanto, que puede ignorarse. Después, remitiéndonos a la figura 3–26(a), los flujos a través de los orificios de la válvula son

$$q_1 = c_1 A_1 \sqrt{\frac{2g}{\gamma}(p_s - p_1)} = C_1 \sqrt{p_s - p_1}\left(\frac{x_0}{2} + x\right)$$

$$q_2 = c_2 A_2 \sqrt{\frac{2g}{\gamma}(p_s - p_2)} = C_2 \sqrt{p_s - p_2}\left(\frac{x_0}{2} - x\right)$$

$$q_3 = c_1 A_3 \sqrt{\frac{2g}{\gamma}(p_2 - p_0)} = C_1 \sqrt{p_2 - p_0}\left(\frac{x_0}{2} + x\right) = C_1 \sqrt{p_2}\left(\frac{x_0}{2} + x\right)$$

$$q_4 = c_2 A_4 \sqrt{\frac{2g}{\gamma}(p_1 - p_0)} = C_2 \sqrt{p_1 - p_0}\left(\frac{x_0}{2} - x\right) = C_2 \sqrt{p_1}\left(\frac{x_0}{2} - x\right)$$

en donde $C_1 = c_1 k\sqrt{2g/\gamma}$ y $C_2 = c_2 k\sqrt{2g/\gamma}$, y γ es el peso específico, que se obtiene mediante $\gamma = \varrho g$, en donde ϱ es la densidad de la masa y g es la aceleración de la gravedad. El flujo q para el lado izquierdo del pistón de potencia es

$$q = q_1 - q_4 = C_1\sqrt{p_s - p_1}\left(\frac{x_0}{2} + x\right) - C_2\sqrt{p_1}\left(\frac{x_0}{2} - x\right) \tag{3-80}$$

El flujo del lado derecho del pistón de potencia al drenaje es igual a esta q y se obtiene mediante

$$q_4 = q_3 - q_2 = C_1\sqrt{p_2}\left(\frac{x_0}{2} + x\right) - C_2\sqrt{p_s - p_2}\left(\frac{x_0}{2} - x\right)$$

Observe que el fluido es incomprimible y que la válvula es simétrica. Por tanto, tenemos que $q_1 = q_3$ y $q_2 = q_4$. Igualando q_1 y q_3, obtenemos

$$p_s - p_1 = p_2$$

o bien

$$p_s = p_1 + p_2$$

Si definimos la diferencia de presión a través del pistón de potencia como Ap o

$$\Delta p = p_1 - p_2$$

entonces

$$p_1 = \frac{p_s + \Delta p}{2}, \qquad p_2 = \frac{p_s - \Delta p}{2}$$

Para la válvula simétrica de la figura 3–26(a), la presión en cada lado del pistón de potencia es $\frac{1}{2}p_s$ cuando no se aplica una carga, o Ap = 0. Conforme la válvula de carrete se desplaza, la presión en una línea aumenta, conforme la presión en la otra línea disminuye en la misma cantidad.

En términos de p_s y Ap, volvemos a escribir el flujo q obtenida mediante la ecuación (3-SO), como

$$q = q_1 - q_4 = C_1\sqrt{\frac{p_s - \Delta p}{2}}\left(\frac{x_0}{2} + x\right) - C_2\sqrt{\frac{p_s + \Delta p}{2}}\left(\frac{x_0}{2} - x\right)$$

Considerando que la presión de suministro p_s es constante, el flujo q se vuelve a escribir como una función del desplazamiento de la válvula x y la diferencia de presión Ap, o bien

$$q = C_1\sqrt{\frac{p_s - \Delta p}{2}}\left(\frac{x_0}{2} + x\right) - C_2\sqrt{\frac{p_s + \Delta p}{2}}\left(\frac{x_0}{2} - x\right) = f(x, \Delta p)$$

Aplicando la técnica de linealización para este caso, presentada antes en esta sección, la ecuación linealizada alrededor del punto $x = \bar{x}$, Ap = $\Delta\bar{p}$, $q = \bar{q}$ es

$$q - \bar{q} = a(x - \bar{x}) + b(\Delta p - \Delta\bar{p}) \tag{3-81}$$

en donde

$$a = f(\bar{x}, \Delta\bar{p})$$

$$a = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x},\ \Delta p = \Delta\bar{p}} = C_1\sqrt{\frac{p_s - \Delta\bar{p}}{2}} + C_2\sqrt{\frac{p_s + \Delta\bar{p}}{2}}$$

$$b = \frac{\partial f}{\partial \Delta p}\bigg|_{x=\bar{x},\ \Delta p=\Delta\bar{p}} = -\left[\frac{C_1}{2\sqrt{2}\sqrt{p_s - \Delta\bar{p}}}\left(\frac{x_0}{2} + \bar{x}\right) + \frac{C_2}{2\sqrt{2}\sqrt{p_s + \Delta\bar{p}}}\left(\frac{x_0}{2} - \bar{x}\right)\right] < 0$$

Los coeficientes ***a*** y ***b*** se denominan ***coeficientes de válvula.*** La ecuación (3-81) es un modelo matemático linealizado de la válvula de carrete cerca de un punto de operación $x = \bar{x}$, $\Delta p = \Delta\bar{p}$, $q = \bar{q}$. Los valores de los coeficientes de válvula ***a*** y ***b*** varían con el punto de operación. Observe que $\partial f/\partial \Delta p$ es negativo y, por tanto, ***b*** es negativo.

Dado que el punto de operación normal es aquel en el que $\bar{x} = 0$, $\Delta\bar{p} = 0$, $\bar{q} = 0$, cerca del punto de operación normal, la ecuación (3-81) se convierte en

$$q = K_1 x - K_2 \Delta p \tag{3-82}$$

en donde

$$K_1 = (C_1 + C_2)\sqrt{\frac{p_s}{2}} > 0$$

$$K_2 = (C_1 + C_2)\frac{x_0}{4\sqrt{2}\sqrt{p_s}} > 0$$

La ecuación (3-82) es un modelo matemático linealizado de la válvula de carrete cerca del origen ($\bar{x} = 0$, $\Delta\bar{p} = 0$, $\bar{q} = 0$). Observe que, en este tipo de sistema, es más importante la región cercana al origen porque la operación del sistema, por lo general, ocurre cerca de este punto. (Para obtener un modelo matemático de un sistema hidráulico de seguimiento cuando no son insignificantes las fuerzas reactivas de carga, véase el problema A-3-20.)

EJEMPLO DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

A-3-1. Simplifique el diagrama de bloques de la figura 3-27.

Solución. Primero, mueva el punto de ramificación de la trayectoria que contiene H_1 fuera del lazo que contiene H_2, como se aprecia en la figura 3–28(a). Luego, eliminar dos lazos produce la figura 3–28(b). Al combinar dos bloques en uno se obtiene la figura 3–28(c).

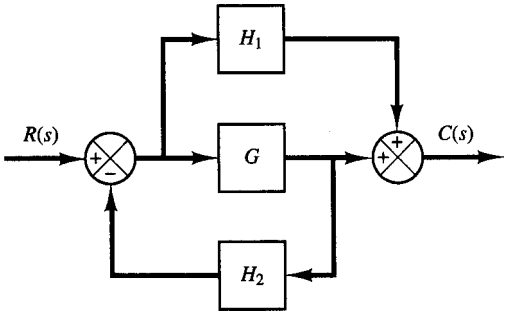


Figura 3-27
Diagrama de bloques de un sistema.

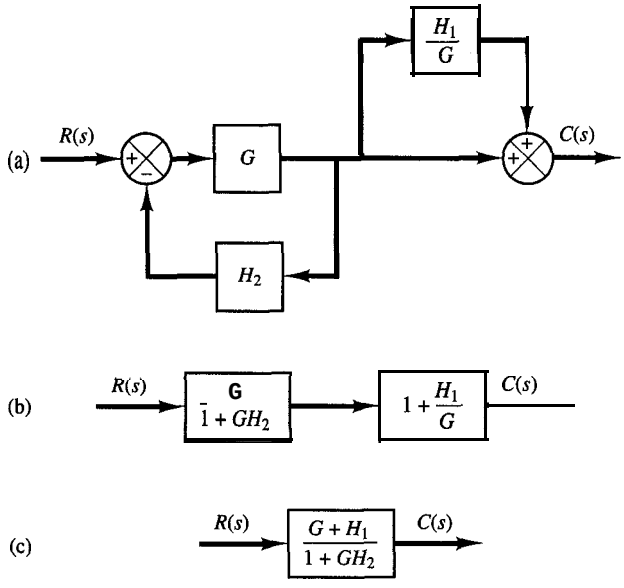


Figura 3-28
Diagramas de bloques simplificados para el sistema que aparece en la figura 3-27.

A-3-2. Simplifique el diagrama de bloques de la figura 3-29. Obtenga la función de transferencia que relaciona $C(s)$ con R(s).

Solución. El diagrama de bloques de la figura 3-29 se modifica para obtener el que se muestra en la figura 3–30(a). Eliminando la trayectoria directa menor, obtenemos la figura 3–30(b), que se simplifica a la que se muestra en la figura 3–30(c). Así, la función de transferencia $C(s)/R(s)$ se consigue mediante

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1G_2 + G_2 + 1$$

También se obtiene el mismo resultado procediendo del modo siguiente. Dado que la séñal $X(s)$ es la suma de dos señales $G_1R(s)$ y R(s), tenemos que

$$X(s) = G_1R(s) + R(s)$$

La señal de salida $C(s)$ es la suma de $G_2X(s)$ y R(s). Por tanto

$$C(s) = G_2X(s) + R(s) = G_2[G_1R(s) + R(s)] + R(s)$$

Así obtenemos el mismo resultado que antes:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1G_2 + G_2 + 1$$

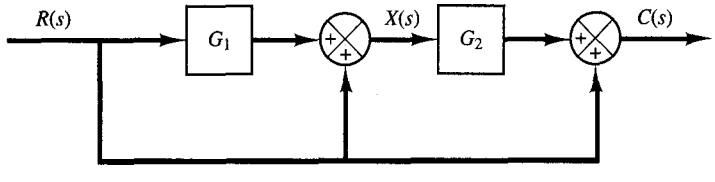


Figura 3-29
Diagrama de bloques de un sistema.

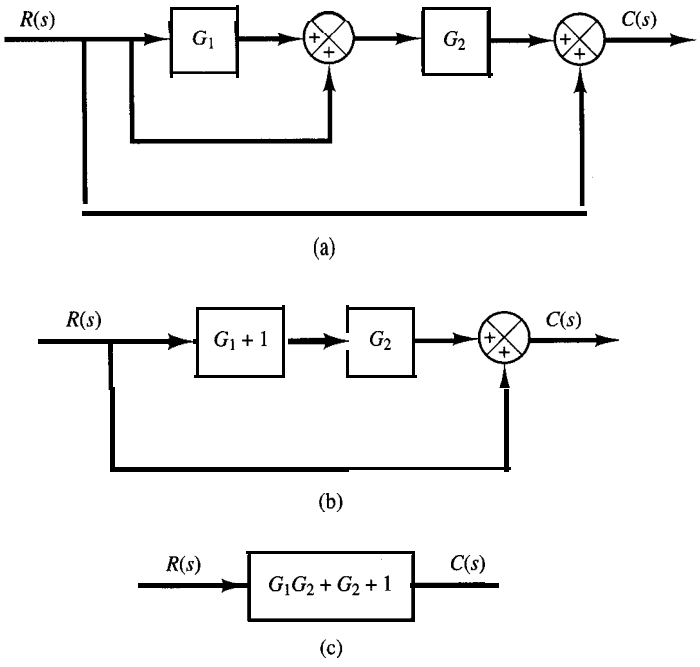


Figura 3-30
Reducción del diagrama de bloques que aparece en la figura 3-29.

A-3-3. Demuestre que, para el sistema descrito por la ecuación diferencial

$$\dddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3 y = b_0\dddot{u} + b_1\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_3 u \qquad \textbf{(3-83)}$$

las ecuaciones de estado y de salida se obtienen, respectivamente, mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} u \qquad \textbf{(3-84)}$$

Y

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \beta_0 u \qquad (3\text{–}85)$$

en donde las variables de estado se definen mediante

$$x_1 = y - \beta_0 u$$
$$x_2 = \dot{y} - \beta_0\dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u$$
$$x_3 = \ddot{y} - \beta_0\ddot{u} - \beta_1\dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u$$

Y

$$\beta_0 = b_0$$
$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0$$
$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0$$
$$\beta_3 = b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0$$

Solución. A partir de la definición de las variables de estado x_2 y x_3, tenemos

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u \tag{3-86}$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u \tag{3-87}$$

A fin de obtener la ecuación para $\dot{x}_3$, primero consideramos, de la ecuación (3–83), que

$$\dddot{y} = -a_1\ddot{y} - a_2\dot{y} - a_3 y + b_0\dddot{u} + b_1\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_3 u$$

Dado que

$$x_3 = \ddot{y} - \beta_0\ddot{u} - \beta_1\dot{u} - \beta_2 u$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\dot{x}_3 &= \dddot{y} - \beta_0\dddot{u} - \beta_1\ddot{u} - \beta_2\dot{u} \\
&= (-a_1\ddot{y} - a_2\dot{y} \quad a_3 y) + b_0\dddot{u} + b_1\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_3 u - \beta_0\dddot{u} - \beta_1\ddot{u} - \beta_2\dot{u} \\
&= -a_1(\ddot{y} - \beta_0\ddot{u} - \beta_1\dot{u} - \beta_2 u) - a_1\beta_0\ddot{u} - a_1\beta_1\dot{u} - a_1\beta_2 u \\
&\quad -a_2(\dot{y} - \beta_0\dot{u} - \beta_1 u) - a_2\beta_0\dot{u} - a_2\beta_1 u - a_3(y - \beta_0 u) - a_3\beta_0 u \\
&\quad + b_0\dddot{u} + b_1\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_3 u - \beta_0\dddot{u} - \beta_1\ddot{u} - \beta_2\dot{u} \\
&= -a_1 x_3 - a_2 x_2 - a_3 x_1 + (b_0 - \beta_0)\dddot{u} + (b_1 - \beta_1 - a_1\beta_0)\ddot{u} \\
&\quad + (b_2 - \beta_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0)\dot{u} + (b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0)u \\
&= -a_1 x_3 \quad a_2 x_2 - a_3 x_1 + (b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 \quad a_3\beta_0)u \\
&= -a_1 x_3 - a_2 x_2 - a_3 x_1 + \beta_3 u
\end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos

$$\dot{x}_3 = -a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3 + \beta_3 u \tag{3-88}$$

Combinando las ecuaciones (3–86), (3-87) y (3–88) en una ecuación diferencial matricial, obtenemos la ecuación (3-84). Asimismo, a partir de la definición de la variable de estado XI, obtenemos la ecuación de salida producida por la ecuación (3-85).

A-3-4. Obtenga el modelo en el espacio de estados del sistema que aparece en la figura 3-31.

Solución. El sistema contiene un integrador y dos con retraso. La salida de cada integrador o con retraso puede ser una variable de estado. Definamos la salida de la planta como x_1, la salida del controlador como x_2 y la salida del sensor como x_3. Asf, obtenemos

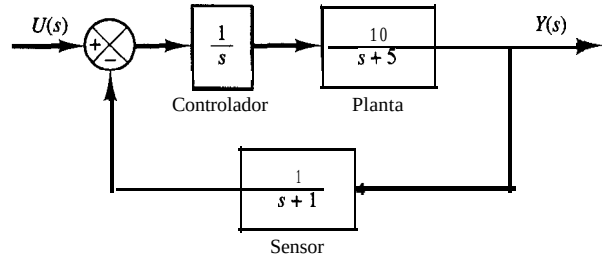


Figura331
Sistema de control.

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{10}{s+5}$$

$$\frac{X_2(s)}{U(s) - X_3(s)} = \frac{1}{s}$$

$$\frac{X_3(s)}{X_1(s)} = \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s) = X_1(s)$$

que puede reescribirse como

$$sX_1(s) = -5X_1(s) + 10X_2(s)$$

$$sX_2(s) = -X_3(s) + U(s)$$

$$sX_3(s) = X_1(s) - X_3(s)$$

$$Y(s) = X_1(s)$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de las cuatro ecuaciones precedentes, obtenemos

$$\dot{x}_1 = -5x_1 + 10x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_3 + u$$

$$\dot{x}_3 = x_1 - x_3$$

$$Y = x_1$$

Por tanto, un modelo en el espacio de estados del sistema en la forma estándar se obtiene mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

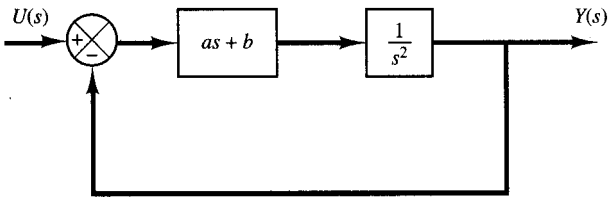
Es importante observar que ésta no es la única representación en el espacio de estados del sistema. Son posibles muchas otras representaciones en el espacio de estados. Sin embargo, la cantidad de variables de estado es igual en cualquier representación en el espacio de estados del mismo sistema. En este sistema, las variables de estado son tres, sin considerar cuáles se elijan como variables de estado.

A-3-5. Obtenga un modelo en el espacio de estados para el sistema que aparece en la figura 3–32(a).

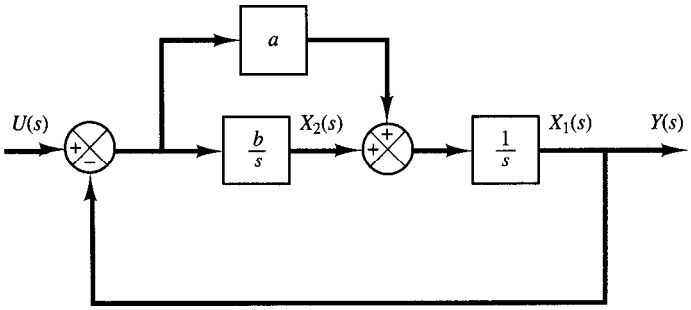
Solución. Primero, considere que $(as + b)/s^2$ involucra una derivada.Tal derivada se evita si modificamos $(as + b)/s^2$ como

$$\frac{as+b}{s^2} = \left(a + \frac{b}{s}\right)\frac{1}{s}$$

Usando esta modificación, el diagrama de bloques de la figura 3–32(a) se convierte en el que se muestra la figura 3–32(b).



(a)



(b)

Figura 3-32
(a) Sistema de control; (b) diagrama de bloques modificado.

Defina las salidas de los integradores como variables de estado, tal como se aprecia en la figura 3–32(b). Después, a partir de la figura 3–32(b) obtenemos

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s) + a[U(s) - X_1(s)]} = \frac{1}{s}$$

$$\frac{X_2(s)}{U(s) - X_1(s)} = \frac{b}{s}$$

$$Y(s) = X_1(s)$$

que puede modificarse como

$$sX_1(s) = X_2(s) + a[U(s) - X_1(s)]$$

$$sX_2(s) = -bX_1(s) + bU(s)$$

$$Y(s) = X_1(s)$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de las tres ecuaciones anteriores, obtenemos

$$\dot{x}_1 = -ax_1 + x_2 + au$$

$$\dot{x}_2 = -bx_1 + bu$$

$$Y = x_1$$

'Si reescribimos las ecuaciones de estado y de salida en la forma matricial estándar, obtenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ -b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} u$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

A-3-6. Obtenga una representación en el espacio de estados del sistema que aparece en la figura 3–33(a).

Solución. En este problema, primero expanda $(s + z)/(s + p)$ en fracciones parciales.

$$\frac{s+z}{s+p} = 1 + \frac{z-p}{s+p}$$

A continuación, convierta $K/[s(s + a)]$ en el producto de K/s y $1/(s + a)$. Después, vuelva a dibujar el diagrama de bloques como aparece en la figura 3–33(b). Definiendo un conjunto de variables de estado, según se aprecia en la figura 3–33(b), obtenemos las ecuaciones siguientes:

$$\dot{x}_1 = -ax_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -Kx_1 + Kx, + Ku$$

$$\dot{x}_3 = -(z - p)x_1 - px_3 + (z - p)u$$

$$\mathbf{Y} = x_1$$

Reescribiendo la ecuación, nos da

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ -K & 0 & K \\ -(z-p) & 0 & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K \\ z-p \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Observe que la salida del integrador y la salida de los integradores con retraso de primer orden $[1/(s + a)$ y $(z - p)/(s + p)]$ se eligen como variables de estado. Es importante recordar que la salida del bloque $(s + z)/(s + p)$ de la figura 3–33(a) no puede ser una variable de estado, porque este bloque contiene una derivada, $s + z$.

A-3-7. Por lo regular se emplean giroscopios para detectar el movimiento angular en sistemas de guiado inercial, autodirigidos y similares. La figura 3–34(a) muestra un giroscopio de un solo grado de

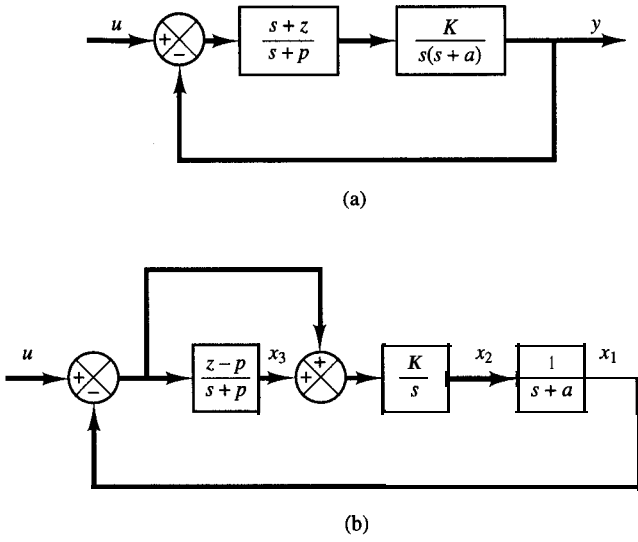


Figura 3-33
(a) sistema de control; (b) diagrama de bloques que define las variables de estado para el sistema.

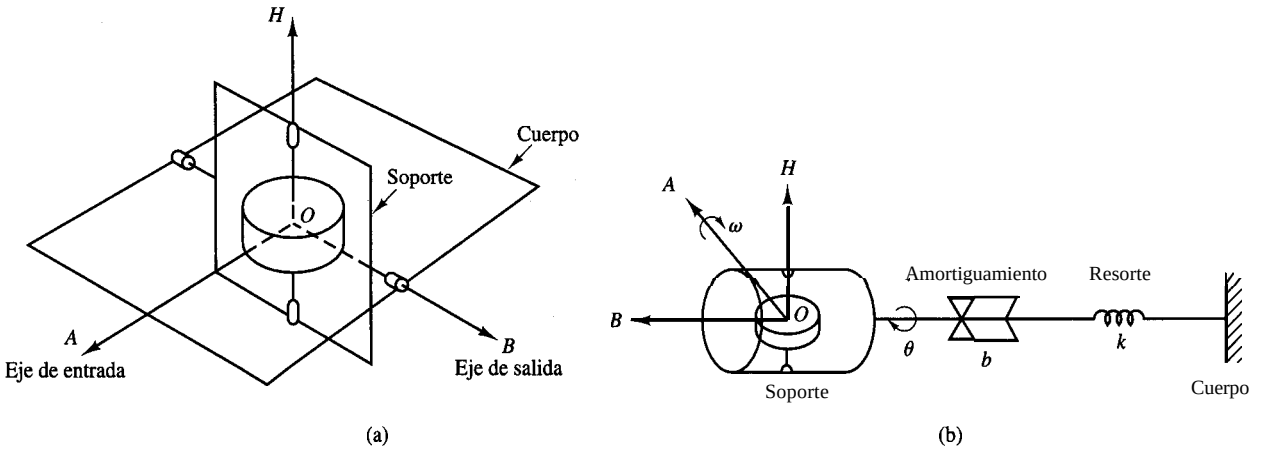


Figura 3-34
(a) Diagrama esquemático de un giroscopio de un solo grado de libertad; (b) diagrama funcional de un giroscopio mostrado en la parte (a).

libertad. El volante giratorio se monta en un soporte móvil que, a su vez, se monta en el cuerpo del giroscopio. El soporte tiene libertad para moverse en relación con el cuerpo alrededor del eje de salida ***OB***. Observe que el eje de salida es perpendicular al eje del volante giratorio. El eje de entrada alrededor del cual se mide una tasa de cambio, o ángulo, es perpendicular tanto al eje de salida como al eje de giro. La información de la señal de la entrada (la razón de cambio o ángulo alrededor del eje de entrada) se obtiene del movimiento resultante del soporte en relación con el eje de salida, respecto del cuerpo.

La figura 3–34(b) muestra un diagrama funcional del sistema de giroscopio. La ecuación de movimiento respecto del eje de salida se obtiene igualando la razón de cambio del momento angular con la suma de los pares externos.

El cambio en el momento angular con respecto al eje ***OB*** tiene dos partes: $I\ddot{\theta}$, cambio debido a la aceleración del soporte alrededor del eje ***OB***, y $-H\omega \cos \theta$, cambio debido al giro del vector del momento angular del volante alrededor del eje ***OA***. El par externo está formado por $-b\dot{\theta}$, el par de amortiguamiento, y $-k\theta$, el par del resorte. Por tanto, la ecuación del sistema del giroscopio es

$$I\ddot{\theta} - H\omega \cos \theta = -b\dot{\theta} - k\theta$$

o bien

$$I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta = H\omega \cos \theta \tag{3–89}$$

En la práctica, θ es un ángulo muy pequeño, por lo general no mayor que ± 2.5 grados.

Obtenga una representación en el espacio de estado del sistema del giroscopio.

Solución. En este sistema, θ and $\dot{\theta}$ se eligen como variables de estado. La variable de entrada es ω y la variable de salida es θ. Definamos

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \qquad u = \omega, \qquad y = \theta$$

A continuación, la ecuación (3–89) se escribe del modo siguiente:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{I}x_1 - \frac{b}{I}x_2 + \frac{H}{I}u \cos x_1$$

o bien

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$$

en donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, u) \\ f_2(\mathbf{x}, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{I}x_1 - \frac{b}{I}x_2 + \frac{H}{I}u\cos x_1 \end{bmatrix}$$

Es evidente que $f_2(\mathbf{x}, u)$ involucra un término no lineal en x_1 y u. Expandiendo $\cos x_1$ en su representación en series,

$$\cos x_1 = 1 - \frac{1}{2}x_1^2 + \cdots$$

y considerando que x_1 es un ángulo muy pequeño, aproximamos $\cos x_1$ a uno para obtener la siguiente ecuación de estado linealizada:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{I} & -\frac{b}{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{H}{I} \end{bmatrix} u$$

La ecuación de salida es

$$y = [1 \;\; 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

A-3-8. Considere un sistema definido por las siguientes ecuaciones en el espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Obtenga la función de transferencia G(s) del sistema.

Solución. Remitiéndonos a la ecuación (3–32), la función de transferencia del sistema se obtiene del modo siguiente (observe que en este caso $D = 0$):

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= [1 \quad 2]\begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -3 & s+1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= [1 \quad 2]\begin{bmatrix} \frac{s+1}{(s+2)(s+4)} & \frac{-1}{(s+2)(s+4)} \\ \frac{3}{(s+2)(s+4)} & \frac{s+5}{(s+2)(s+4)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{12s + 59}{(s+2)(s+4)} \end{aligned}$$

A-3-9. La figura 3–35(a) muestra un diagrama esquemático de un sistema de suspensión de un automóvil. Conforme el automóvil avanza por un camino, los desplazamientos verticales de las llantas funcionan como una excitación de movimiento para el sistema de suspensión del automóvil. El movimiento de este sistema consiste en un desplazamiento traslacional del centro de la masa y un desplazamiento de rotación alrededor del centro de la masa. El modelado matemático del sistema completo es muy complicado.

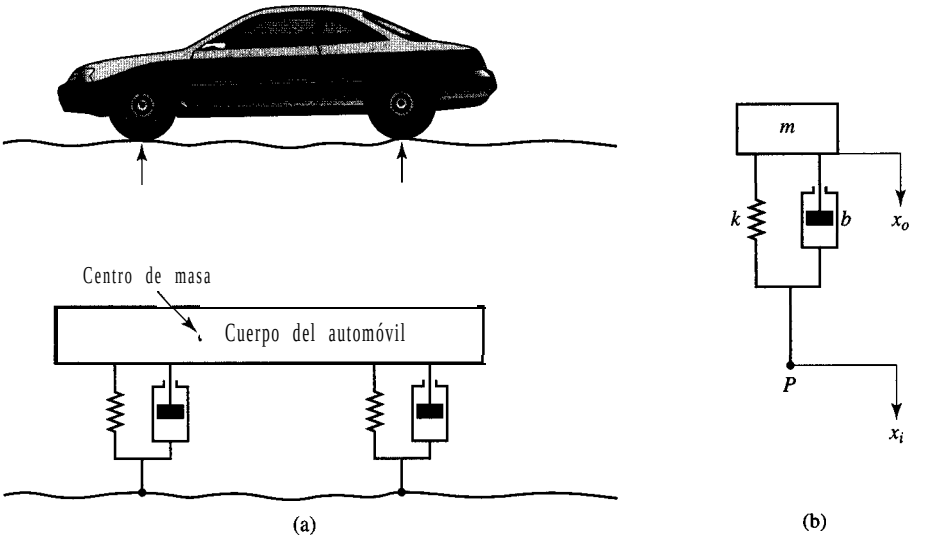


Figura 335
(a) Sistema de suspensión de un automóvil; (b) sistema de suspensión simplificado.

Una versión muy simplificada del sistema de suspensión aparece en la figura 3–35(b). Suponiendo que el movimiento x_i en el punto P es la entrada al sistema y el movimiento vertical x_o del cuerpo es la salida, obtenga la función de transferencia $X_o(s)/X_i(s)$. (Considere el movimiento del cuerpo sólo en la dirección vertical.) El desplazamiento x_o se mide a partir de la posición de equilibrio en ausencia de la entrada x_i.

Solución. La ecuación de movimiento para el sistema de la figura 3–35(b) es

$$m\ddot{x}_o + b(\dot{x}_o - \dot{x}_i) + k(x_o - x_i) = 0$$

o bien

$$m\ddot{x}_o + b\dot{x}_o + kx_o = b\dot{x}_i + kx_i$$

Tomando la transformada de Laplace de esta última ecuación, y suponiendo condiciones iniciales de cero, obtenemos

$$(ms^2 + bs + k)X_o(s) = (bs + k)X_i(s)$$

Por tanto, la función de transferencia $X_o(s)/X_i(s)$ se obtiene mediante

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

A-3-10. Obtenga la función de transferencia $Y(s)/U(s)$ del sistema de la figura 3-36. (Al igual que el sistema del problema A-3-9, ésta es una versión simplificada de un sistema de suspensión de un automóvil 0 una motocicleta.)

Solución. Aplicando la segunda ley de Newton al sistema, obtenemos

$$m_1\ddot{x} = k_2(y - x) + b(\dot{y} - \dot{x}) + k_1(u - x)$$
$$m_2\ddot{y} = -k_2(y - x) - b(\dot{y} - \dot{x})$$

Por tanto, tenemos que

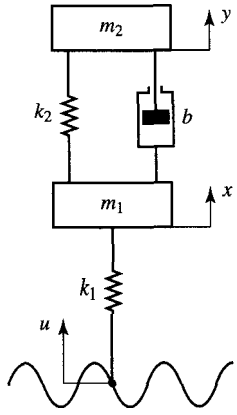


Figura 3–36
Sistema de suspensión.

$$m_1\ddot{x} + b\dot{x} + (k_1 + k_2)x = b\dot{y} + k_2y + k_1u$$

$$m_2\ddot{y} + b\dot{y} + k_2y = b\dot{x} + k_2x$$

Tomando la transformada de Laplace de estas dos ecuaciones y suponiendo condiciones iniciales de cero, obtenemos

$$[m_1s^2 + bs + (k_1 + k_2)]X(s) = (bs + k_2)Y(s) + k_1U(s)$$

$$[m_2s^2 + bs + k_2]Y(s) = (bs + k_2)X(s)$$

Eliminando $X(s)$ de las dos últimas ecuaciones, tenemos

$$(m_1s^2 + bs + k_1 + k_2)\frac{m_2s^2 + bs + k_2}{bs + k_2}Y(s) = (bs + k_2)Y(s) + k_1U(s)$$

lo cual produce

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_1(bs + k_2)}{m_1m_2s^4 + (m_1 + m_2)bs^3 + [k_1m_2 + (m_1 + m_2)k_2]s^2 + k_1bs + k_1k_2}$$

A-3-11. Considere el circuito eléctrico que aparece en la figura 3-37. Obtenga la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ usando el enfoque de diagrama de bloques.

Solución. Las ecuaciones para los circuitos son

$$\frac{1}{C_1}\int (i_1 - i_2)\,dt + R_1i_1 = e_i \qquad (3\text{-}90)$$

$$\frac{1}{C_1}\int (i_2 - i_1)\,dt + R_2i_2 + \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt = 0 \qquad (3\text{-}91)$$

$$\frac{1}{C_2}\int i_2\,dt = e_o \qquad (3\text{-}92)$$

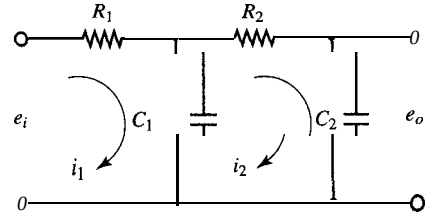


Figura 3-37
Circuito eléctrico.

La transformada de Laplace de las ecuaciones (3–90), (3-91) y (3–92), con condiciones iniciales de cero, producen

$$\frac{1}{C_1 s}[I_1(s) - I_2(s)] + R_1 I_1(s) = E_i(s) \tag{3–93}$$

$$\frac{1}{C_1 s}[I_2(s) - I_1(s)] + R_2 I_2(s) + \frac{1}{C_2 s} I_2(s) = 0 \tag{3–94}$$

$$\frac{1}{C_2 s} I_2(s) = E_o(s) \tag{3–95}$$

La ecuación (3-93) se puede reescribir como

$$C_1 s[E_i(s) - R_1 I_1(s)] = I_1(s) - I_2(s) \tag{3-96}$$

La ecuación (3-96) da el diagrama de bloques que aparece en la figura 3–38(a). La ecuación (3-94) se modifica a

$$I_2(s) = \frac{C_2 s}{R_2 C_2 s + 1} \frac{1}{C_1 s}[I_1(s) - I_2(s)] \tag{3-97}$$

La ecuación (3-97) da el diagrama de bloques que se muestra en la figura 3–38(b). Asimismo, la ecuación (3-95) nos da el diagrama de bloques que se muestra en la figura 3–38(c). Combinando los diagramas de bloques de las figuras 3–38(a), (b) y (c), obtenemos la figura 3–39(a). Este diagrama de bloques se modifica sucesivamente tal como se aprecia en las figuras de la 3–39(b) a (f). Por tanto, obtuvimos la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ del sistema. [Ésta es igual a la que se obtuvo antes para el mismo circuito eléctrico. Véase ecuación (3–66).]

A-3-12. Obtenga la función de transferencia del sistema mecánico que aparece en la figura 3–40(a). Asimismo, calcule la función de transferencia del circuito eléctrico de la figura W(b). Demuestre que las funciones de transferencia de los dos sistemas tienen una forma idéntica y, por tanto, son sistemas análogos.

Solución. Las ecuaciones de movimiento para el sistema mecánico de la figura 3–40(a) son

$$b_1(\dot{x}_i - \dot{x}_o) + k_1(x_i - x_o) = b_2(\dot{x}_o - \dot{y})$$

$$b_2(\dot{x}_o - \dot{y}) = k_2 y$$

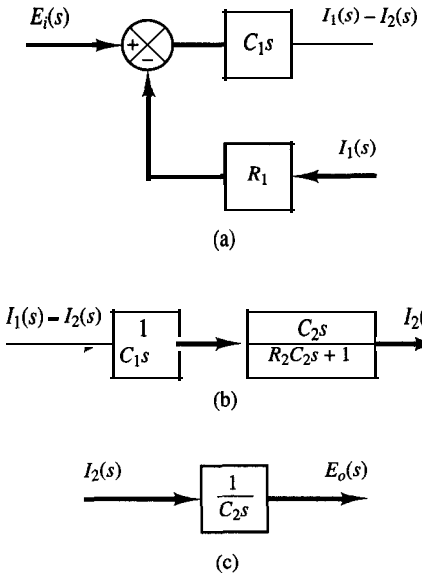


Figura 338
Diagrama de bloque:
(a) correspondiente a la ecuación (3-96);
(b) correspondiente a la ecuación (3-97);
(c) correspondiente a la ecuación (3-95).

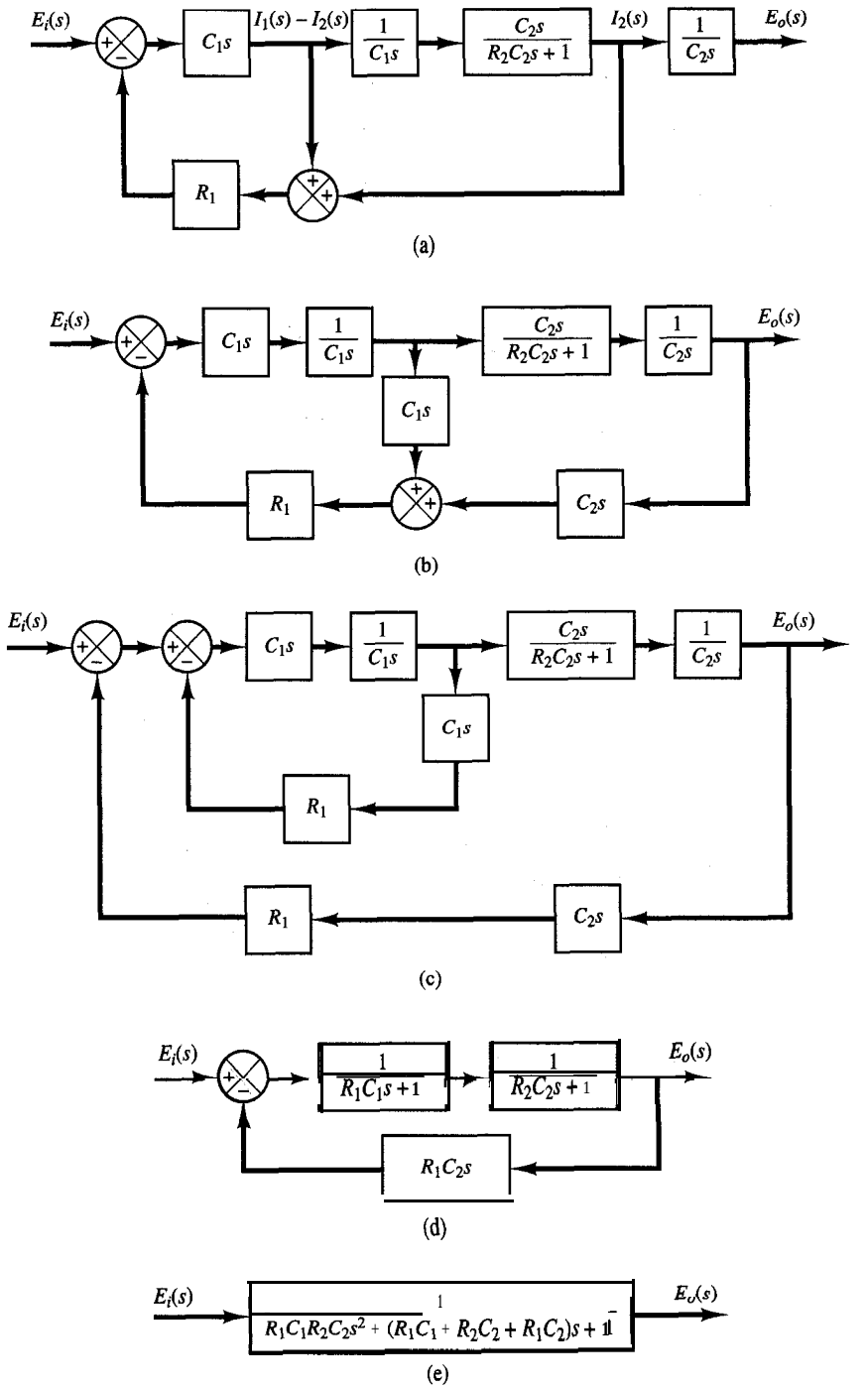


Figura 3-39
Diagramas de bloques para el sistema de la figura 3-37. Las secciones (a) a (e) muestran las simplificaciones sucesivas de los diagramas de bloques.

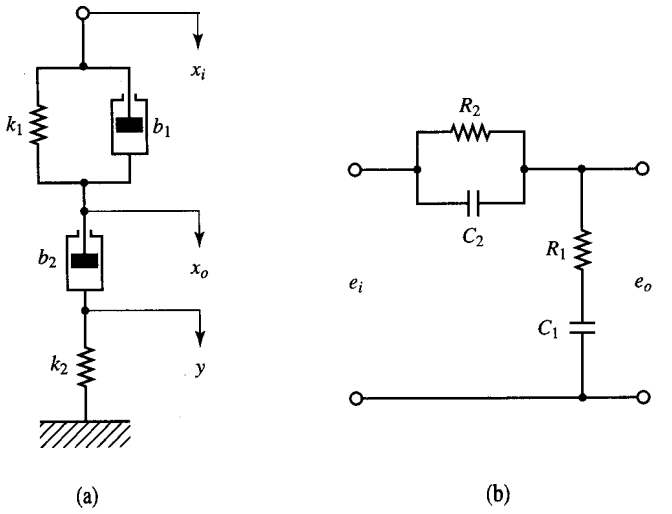


Figura 3–40
(a) Sistema mecánico; (b) sistema eléctrico análogo.

Tomando la transformada de Laplace de estas dos ecuaciones y suponiendo condiciones iniciales de cero, tenemos

$$b_1[sX_i(s) - sX_o(s)] + k_1[X_i(s) - X_o(s)] = b_2[sX_o(s) - sY(s)]$$
$$b_2[sX_o(s) - sY(s)] = k_2Y(s)$$

Si eliminamos Y(s) de las dos últimas ecuaciones, obtenemos

$$b_1[sX_i(s) - sX_o(s)] + k_1[X_i(s) - X_o(s)] = b_2sX_o(s) - b_2s\frac{b_2sX_o(s)}{b_2s + k_2}$$

o bien

$$(b_1s + k_1)X_i(s) = \left(b_1s + k_1 + b_2s - b_2s\frac{b_2s}{b_2s + k_2}\right)X_o(s)$$

Por tanto, la función de transferencia $X_o(s)/X_i(s)$ se obtiene como

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{\left(\frac{b_1}{k_1}s + 1\right)\left(\frac{b_2}{k_2}s + 1\right)}{\left(\frac{b_1}{k_1}s + 1\right)\left(\frac{b_2}{k_2}s + 1\right) + \frac{b_2}{k_1}s}$$

Para el sistema eléctrico de la figura 3–40(b), la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ resulta ser

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1 + \frac{1}{C_1s}}{\frac{1}{(1/R_2) + C_2s} + R_1 + \frac{1}{C_1s}}$$
$$= \frac{(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1)}{(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1) + R_2C_1s}$$

Una comparación de las funciones de transferencia demuestra que los sistemas de la figura 3–40(a) y (b) son análogos.

A-3-13. En el sistema del nivel de líquido de la figura 3-41, suponga que el flujo de salida Q m^3/seg a través de la válvula de salida se relaciona con la altura H m mediante

$$Q = K\sqrt{H} = 0.01\sqrt{H}$$

También suponga que cuando el flujo de entrada Q_i es 0.015 m^3/seg, la altura permanece constante. En $t = 0$, la válvula de entrada se cierra y, por tanto, no hay entrada para $t \geq 0$. Encuentre el tiempo necesario para vaciar el tanque a la mitad de la altura original. La capacitancia C del tanque es 2 m^2.

Solución. Cuando la altura es estacionaria, el flujo de entrada es igual a la de salida. Por tanto, la altura H_o en $t = 0$ se obtiene a partir de

$$0.015 = 0.01\sqrt{H_o}$$

o bien

$$H_o = 2.25 \text{ m}$$

La ecuación para el sistema en $t > 0$ es

$$-CdH = Qdt$$

o bien

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{Q}{C} = \frac{-0.01\sqrt{H}}{2}$$

Por tanto,

$$\frac{dH}{\sqrt{H}} = -0.005\,dt$$

Suponga que, en $t = t_1$, $H = 1.125$ m. Integrando ambos miembros de esta ultima ecuación, obtenemos

$$\int_{2.25}^{1.125} \frac{dH}{\sqrt{H}} = \int_0^{t_1} (-0.005)\,dt = -0.009,$$

De aquí se sigue que

$$2\sqrt{H}\Big|_{2.25}^{1.125} = 2\sqrt{1.125} - 2\sqrt{2.25} = -0.003,$$

o bien

$$t_1 = 175.7$$

Por tanto, la altura se vuelve la mitad del valor original (2.25 m). En 175.7 seg.

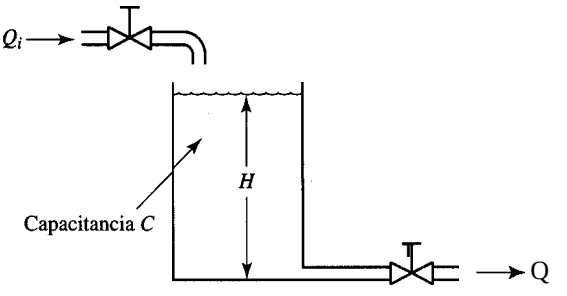


Figura 3-41
Sistema del nivel de líquido.

A-3-14. Considere el sistema del nivel de líquido de la figura 342. En estado estable, los flujos de entrada y salida son $\bar{Q}$ y el flujo entre los tanques es cero. Las alturas de los tanques 1 y 2 son $\bar{H}$. En $t = 0$, el flujo de entrada cambia de $\bar{Q}$ a $\bar{Q} + q$, en donde q es un cambio pequeño en el flujo de entrada. Se supone que los cambios resultantes en las alturas (h_1 y h_2) y los flujos (q_1 y q_2) son pequeños . Las capacitancias de los tanques 1 y 2 son C_1 y C_2, respectivamente. La resistencia de la válvula que está entre los tanques es R_1 y la de la válvula de salida es R_2.

Obtenga modelos matemáticos para el sistema, cuando (a) q es la entrada y h_2 la salida, (b) q es la entrada y q_2 la salida y (c) q es la entrada y h_1 la salida.

Solución. (a) para el tanque 1, tenemos que

$$C_1\,dh_1 = q_1\,dt$$

en donde

$$q_1 = \frac{h_2 - h_1}{R_1}$$

En consecuencia,

$$R_1C_1\frac{dh_1}{dt} + h_1 = h_2 \tag{3-98}$$

Para el tanque 2, tenemos que

$$C_2\,dh_2 = (q - q_1 - q_2)\,dt$$

en donde

$$q_1 = \frac{h_2 - h_1}{R_1}, \qquad q_2 = \frac{h_2}{R_2}$$

lo cual produce

$$R_2C_2\frac{dh_2}{dt} + \frac{R_2}{R_1}h_2 + h_2 = R_2q + \frac{R_2}{R_1}h_1 \tag{3-99}$$

Eliminando h_1 de las ecuaciones (3-98) y (3–99), tenemos

$$R_1C_1R_2C_2\frac{d^2h_2}{dt^2} + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1)\frac{dh_2}{dt} + h_2 = R_1R_2C_1\frac{dq}{dt} + R_2q \tag{3–100}$$

En términos de la función de transferencia, tenemos

$$\frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{R_2(R_1C_1s + 1)}{R_1C_1R_2C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1)s + 1}$$

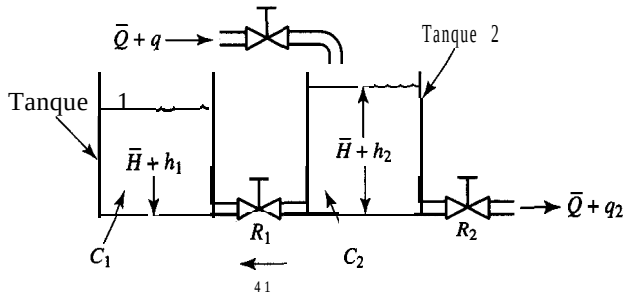


Figura 3-42
Sistema del nivel de líquido.

Éste es el modelo matemático deseado, en el cual q se considera la entrada y h_2 la salida. (b) La sustitución de $h_2 = R_2 q_2$ en la ecuación (3-100) nos da

$$R_1C_1R_2C_2\frac{d^2q_2}{dt^2} + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1)\frac{dq_2}{dt} + q_2 = R_1C_1\frac{dq}{dt} + q$$

Esta ecuación es un modelo matemático del sistema cuando q se considera la entrada y q_2 es la salida. En términos de la función de transferencia, obtenemos

$$\frac{Q_2(s)}{Q(s)} = \frac{R_1C_1s + 1}{R_1C_1R_2C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1)s + 1}$$

(c) La eliminación de h_2 de las ecuaciones (3-98) y (3-99) nos da

$$R_1C_1R_2C_2\frac{d^2h_1}{dt^2} + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1)\frac{dh_1}{dt} + h_1 = R_2q$$

que es un modelo matemático del sistema en el que q se considera la entrada y h_1 es la salida. En términos de la función de transferencia, obtenemos:

$$\frac{H_1(s)}{Q(s)} = \frac{R_2}{R_1C_1R_2C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1)s + 1}$$

A-3-15. Considere el sistema del nivel de líquido de la figura 3-43. En el sistema, $\bar{Q}_1$ y $\bar{Q}_2$ son flujos de entrada en estado estable y $\bar{H}_1$ y $\bar{H}_2$ son las alturas en estado estable. Las cantidades q_{i1}, q_{i2}, h_1, h_2, q_1 y q_o se consideran pequeñas. Obtenga una representación en el espacio de estados para el sistema cuando h_1 y h_2 son las salidas y q_{i1} y q_{i2} son las entradas.

Solución. Las ecuaciones para el sistema son

$$C_1dh_1 = (q_{i1} - q_1)\,dt \tag{3-101}$$

$$\frac{h_1 - h_2}{R_1} = q_1 \tag{3–102}$$

$$C_2dh_2 = (q_1 + q_{i2} - q_o)\,dt \tag{3-103}$$

$$\frac{h_2}{R_2} = q_o \tag{3–104}$$

La eliminación de q_1 de la ecuación (3–101), usando la ecuación (3–102), da como resultado

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{C_1}\left(q_{i1} - \frac{h_1 - h_2}{R_1}\right) \tag{3–105}$$

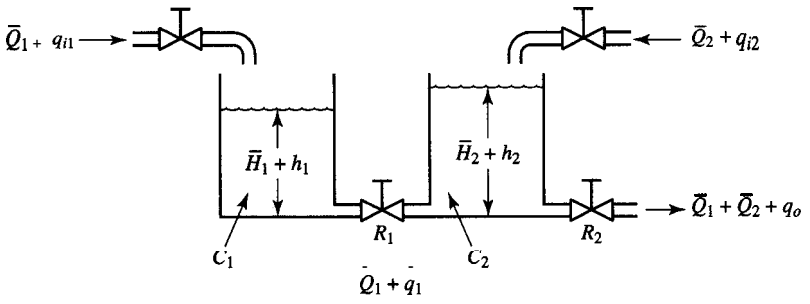


Figura 3-43
Sistema del nivel de líquido.

La eliminación de q_1 y q_o de la ecuación (3–103), usando las ecuaciones (3-102) y (3–104), nos lleva a

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{C_2}\left(\frac{h_1 - h_2}{R_1} + q_{i2} - \frac{h_2}{R_2}\right) \tag{3-106}$$

Defina las variables de estado x_1 y x_2 mediante

$$x_1 = h_1$$

$$x_2 = h_2$$

las variables de entrada u_1 y u_2, mediante

$$u_1 = q_{i1}$$

$$u_2 = q_{i2}$$

y las variables de salida y_1 y y_2 mediante

$$y_1 = h_1 = x_1$$

$$y_2 = h_2 = x_2$$

A continuación, las ecuaciones (3–105) y (3-106) se escriben como

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{R_1C_1}x_1 + \frac{1}{R_1C_1}x_2 + \frac{1}{C_1}u_1$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{R_1C_2}x_1 - \left(\frac{1}{R_1C_2} + \frac{1}{R_2C_2}\right)x_2 + \frac{1}{C_2}u_2$$

En la forma de la representación matricial estándar, tenemos

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} & \frac{1}{R_1C_1} \\ \frac{1}{R_1C_2} & -\left(\frac{1}{R_1C_2} + \frac{1}{R_2C_2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C_1 & \\ 0 & \frac{1}{C_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

que es la ecuación de estado, y

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

que es la ecuación de salida.

A-3-16. Considerando desviaciones pequeñas de la operación de estado estable, dibuje un diagrama de bloques del sistema de calefacción de aire de la figura 3-44. Suponga que las pérdidas de calor en el medio ambiente y la capacitancia de calor de las partes de metal del calefactor son insignificantes.

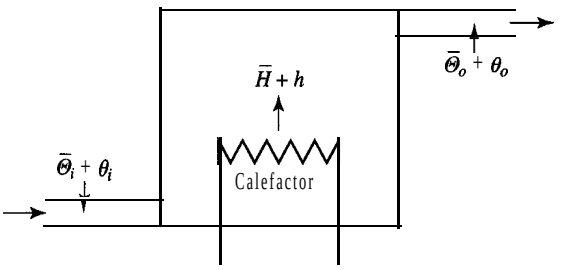


Figura 3-44
Sistema de calefacción de aire.

Solución. Definamos

$\bar{\Theta}_i$ = temperatura en estado estable del aire de entrada, °C

$\bar{\Theta}_o$ = temperatura en estado estable del aire de salida, °C

G = flujo de la masa del aire a través de la cámara de calefacción, kg/seg

M = masa del aire que contiene la cámara de calefacción, kg

c = calor específico del aire, kcal/kg °C

R = resistencia térmica, °C seg/kcal

C = capacitancia térmica del aire que contiene la cámara de calefacción = Mc, kcal/°C

$\bar{H}$ = flujo de calor de entrada en estado estable, kcallseg

Supongamos que el flujo de calor de entrada cambia repentinamente de $\bar{H}$ a $\bar{H} + h$ y que la temperatura del aire de entrada cambia repentinamente de $\bar{\Theta}_i$ a $\bar{\Theta}_i + \theta_i$. En este caso, la temperatura del aire de salida cambiará de $\bar{\Theta}_o$ a $\bar{\Theta}_o + \theta_o$.

La ecuación que describe el comportamiento del sistema es

$$C\,d\theta_o = [h + Gc(\theta_i - e,)]\,dt$$

o bien

$$C\frac{d\theta_o}{dt} = h + Gc(\theta_i - \theta_o)$$

Considerando que

$$Gc = \frac{1}{R}$$

obtenemos

$$C\frac{d\theta_o}{dt} = h + \frac{1}{R}(\theta_i - \theta_o)$$

o bien

$$RC\frac{d\theta_o}{dt} + \theta_o = Rh + \theta_i$$

Tomando las transformadas de Laplace de ambos miembros de esta última ecuación y sustituyendo la condición inicial de que $\theta_o(0) = 0$, obtenemos

$$\Theta_o(s) = \frac{R}{RCs + 1}H(s) + \frac{1}{RCs + 1}\Theta_i(s)$$

El diagrama de bloques del sistema que corresponde a esta ecuación aparece en la figura 3-4.5.

A-3-17. Considere el sistema del termómetro delgado de mercurio con paredes de vidrio de la figura 3-46. Suponga que el termómetro está a una temperatura estable $\bar{\Theta}$ °C (temperatura ambiente) y que en $t = 0$ se sumerge en un baño a una temperatura $\bar{\Theta} + \theta_b$°C, en donde θ_b es la temperatura del baño (que puede ser constante o cambiante), medida a partir de la temperatura ambiente $\bar{\Theta}$. Defina la temperatura instantánea del termómetro mediante $\bar{\Theta} + \theta$°C, de modo que sea el cambio en la temperatura del termómetro que satisfaga la condición de que $\theta(0) = 0$. Obtenga un modelo matemático para el sistema. Asimismo, determine un sistema eléctrico análogo del sistema del termómetro.

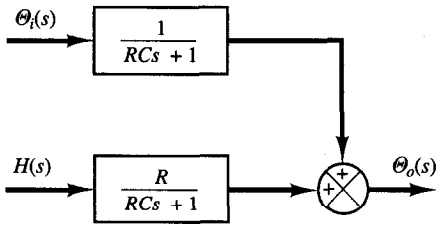


Figura 3–45
Diagrama de bloques del sistema de calefacción de aire de la figura 3–44.

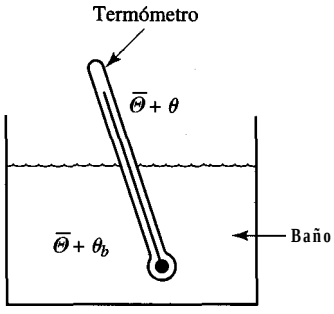


Figura 3-46
Sistema de termómetro delgado de mercurio con paredes de vidrio.

Solución. Se obtiene un modelo matemático para el sistema, considerando el balance del calor del modo siguiente: el calor que entra al termómetro durante dt seg es $q\,dt$, en donde q es el flujo de calor hacia el termómetro. Este calor se almacena en la capacitancia térmica C del termómetro, por lo cual su temperatura se eleva mediante $d\theta$. Por tanto, la ecuación de balance de calor es

$$C\,d\theta = q\,dt \tag{3-107}$$

Dado que la resistencia térmica R se escribe como

$$R = \frac{d(\Delta\theta)}{dq} = \frac{\Delta\theta}{q}$$

El flujo de calor q se obtiene, en términos de la resistencia térmica R, como

$$q = \frac{(\bar{\Theta} + \theta_b) - (\bar{\Theta} + \theta)}{R} = \frac{\theta_b - \theta}{R}$$

en donde $\bar{\Theta} + \theta_b$ es la temperatura del baño y $\bar{\Theta} + \theta$ es la temperatura del termómetro. Por tanto, la ecuación (3-107) puede reescribirse como

$$C\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta_b - \theta}{R}$$

o bien

$$RC\frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_b \tag{3–108}$$

La ecuación (3-108) es un modelo matemático del sistema del termómetro.

Remitiéndonos a la ecuación (3–108), un sistema eléctrico análogo para el sistema del termómetro se escribe como

$$RC\frac{de_o}{dt} + e_o = e_i$$

Un circuito eléctrico representado mediante esta última ecuación aparece en la figura 3-47.

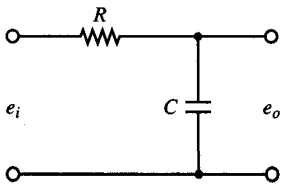


Figura 3–47
Sistema eléctrico análogo del sistema del termómetro que aparece en la figura 3-46.

A-3-18. Linealice la ecuación no lineal

$$z = xy$$

en la región $5 \leq x \leq 7{,}10 \leq y \leq 12$. Encuentre el error si se usa la ecuación linealizada para calcular el valor de z cuando $x = 5$, $y = 10$.

Solución. Dado que la región considerada se obtiene mediante $5 \leq x \leq 7$, $10 \leq y \leq 12$, seleccione $\bar{x} = 6$, $\bar{y} = 11$. Por tanto, $\bar{z} = \bar{x}\bar{y} = 66$. Obtengamos una ecuación linealizada para la ecuación no lineal cerca de un punto $\bar{x} = 6$, $\bar{y} = 11$.

Expandiendo la ecuación no lineal en series de Taylor alrededor del punto $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ sin considerar los términos de orden superior, tenemos que

$$z - \bar{z} = a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y})$$

en donde

$$a = \frac{\partial(xy)}{\partial x}_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} = \bar{y} = 11$$

$$b = \frac{\partial(xy)}{\partial y}\bigg|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} = \bar{x} = 6$$

Por tanto, la ecuación linealizada es

$$z - 66 = 11(x - 6) + 6(y - 11)$$

o bien

$$z = 11x + 6y - 66$$

Cuando $x = 5$, $y = 10$, el valor de z que proporcionó la ecuación linealizada es

$$z = 11x + 6y - 66 = 55 + 60 - 66 = 49$$

El valor exacto de z es $z = xy = 50$. Por tanto, el error es $50 - 49 = 1$. En términos de porcentaje, el error es de 2%.

A-3-19. Considere el sistema del nivel de líquido de la figura 3–48. En estado estable, el flujo de entrada es $Q_i = \bar{Q}$, el flujo de salida es $Q_o = \bar{Q}$, y la altura es $H = \bar{H}$. Si el flujo es turbulento, tenemos que

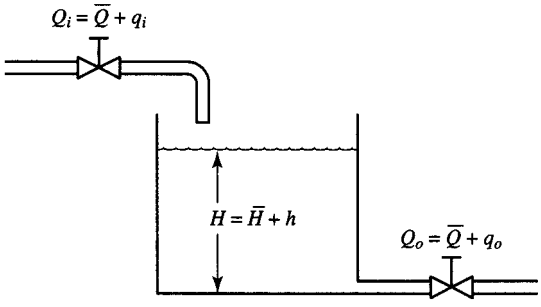


Figura 3-48
Sistema del nivel de líquido.

$$\bar{Q} = K\sqrt{\bar{H}}$$

Suponga que en $t = 0$, el flujo de entrada cambia de $Q_i = \bar{Q}$ a $Q_i = \bar{Q} + q_i$. Este cambio provoca que la altura cambie de $H = \bar{H}$ a $H = \bar{H} + h$, y ésta, a su vez, provoca que el flujo de salida cambie de $Q_o = \bar{Q}$ a $Q_o = \bar{Q} + q_o$. Para este sistema, tenemos que

$$C\frac{dH}{dt} = Q_i - Q_o = Q_i - K\sqrt{H}$$

en donde C es la capacitancia del tanque. Definamos

$$\frac{dH}{dt} = f(H, Q_i) = \frac{1}{C}Q_i - \frac{K\sqrt{H}}{C} \tag{3-109}$$

Observe que la condición de operación en estado estable es $(\bar{H}, \bar{Q})$ y $H = \bar{H} + h$, $Q_i = \bar{Q} + q_i$. Dado que la operación en estado estable $dH/dt = 0$, tenemos que $f(\bar{H}, \bar{Q}) = 0$.

Linealice la ecuación (3-109) cerca del punto de operación $(\bar{H}, \bar{Q})$.

Solución. Usando la técnica de linealización que se presentó en la sección 3-10, una ecuación **linealizada** para la ecuación (3-109) se obtiene del modo siguiente:

$$\frac{dH}{dt} - f(\bar{H}, \bar{Q}) = \frac{\partial f}{\partial H}(H - \bar{H}) + \frac{\partial f}{\partial Q_i}(Q_i - \bar{Q}) \tag{3-110}$$

en donde

$$f(\bar{H}, \bar{Q}) = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial H}\right|_{H=\bar{H},\ Q_i=\bar{Q}} = -\frac{K}{2C\sqrt{\bar{H}}} = -\frac{\bar{Q}}{\sqrt{\bar{H}}}\frac{1}{2C\sqrt{\bar{H}}} = -\frac{\bar{Q}}{2C\bar{H}} = -\frac{1}{RC}$$

en la cual usamos la resistencia R definida mediante

$$R = \frac{2\bar{H}}{\bar{Q}}$$

Asimismo,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial Q_i}\right|_{H=\bar{H},Q_i=\bar{Q}} = \frac{1}{C}$$

De este modo, la ecuación (3-110) se escribe como

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{RC}(H - \bar{H}) + \frac{1}{C}(Q_i - \bar{Q}) \tag{3-111}$$

Dado que $H - \bar{H} = h$ y que $Q_i - \bar{Q} = q_i$, la ecuación (3-111) se escribe como

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{RC}h + \frac{1}{C}q_i$$

o bien

$$RC\frac{dh}{dt} + h = Rq_i$$

que es la ecuación linealizada para el sistema del nivel de líquido, y es igual ala ecuación (3-69) que obtuvimos en la sección 3-8.

A-3-20. Considere el sistema hidráulico de seguimiento de la figura 3–49. Suponiendo que las fuerzas de reacción de carga no son insignificantes, obtenga un modelo matemático del sistema. Suponga también que la masa del pistón de potencia se incluye en la masa de carga m.

Solución. Al obtener un modelo matemático del sistema cuando las fuerzas reactivas de carga no son insignificantes, deben considerarse efectos tales como la presión que cae por el orificio, el escurrimiento de aceite alrededor de la válvula y del pistón, así como la compresibilidad del aceite.

La caída de presión a través del orificio es una función de la presión de suministro p_s y la diferencia de presión Ap = $p_1 - p_2$. Por tanto, el flujo q es una función no lineal del desplazamiento x de la válvula y la diferencia de presión Ap o bien

$$q = f(x, \Delta p)$$

Linealizando esta ecuación no lineal alrededor del origen ($x = 0$, $p = 0$, $q = 0$), obtenemos, remitiéndonos a la ecuación (3–82),

$$q = K_1 x - K_2 \Delta p \tag{3-112}$$

Se puede considerar que el flujo q tiene tres partes

$$q = q_0 + q_L + q_C \tag{3-113}$$

en donde q_0 = flujo útil hacia el cilindro de potencia que provoca que se mueva el pistón de potencia, kg/seg
q_L = el flujo de escurrimiento, kg/seg
q_C = el flujo de compresibilidad equivalente, kg/seg

Obtengamos expresiones específicas para q_0, q_L y q_C. El flujo $q_0\,dt$ hacia el lado derecho del pistón de potencia provoca que el pistón se mueva a la derecha mediante dy. Por tanto, tenemos que

$$A\varrho\, dy = q_0\, dt$$

en donde $A(m^2)$ es el área del pistón de potencia, ϱ (kg/m^3) la densidad del aceite y dy (m) el desplazamiento del pistón de potencia. Por tanto,

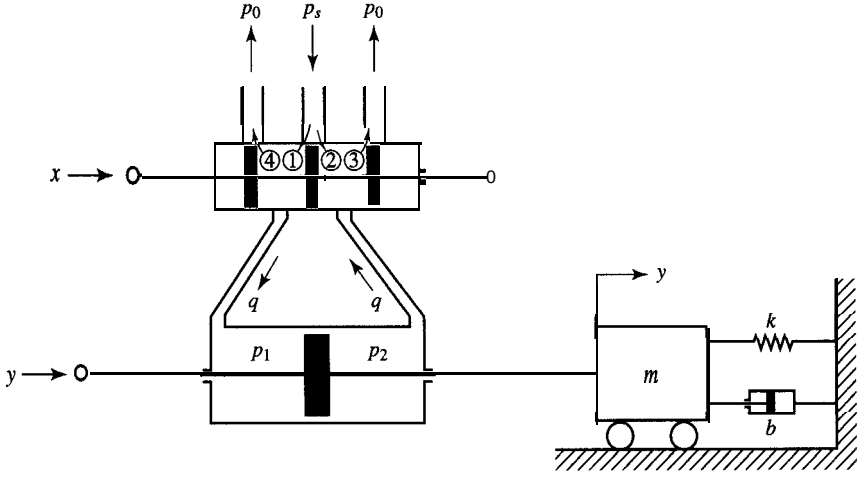


Figura 3-49
Sistema hidráulico de seguimiento.

$$q_0 = A\varrho \frac{dy}{dt} \tag{3-114}$$

El componente de escurrimiento q_L se escribe como

$$q_L = L\,\Delta p \tag{3-115}$$

en donde L es el coeficiente de escurrimiento del sistema.

El flujo de compresibilidad equivalente q_C se expresa en términos del módulo de aceite global efectivo K (incluyendo los efectos del aire atrapado, la expansión de los tubos, etc.), en donde

$$K = \frac{d\,\Delta p}{-dV/V}$$

(Aquí dV es negativo y, por tanto, $-dV$ es positivo.) Volver a escribir esta última ecuación produce

$$-dV = \frac{V}{K}\,d\,\Delta p$$

o bien

$$-dV = \frac{V}{K}\,d\,\Delta p$$

Considerando que $q_C = \varrho(-dV)/dt$, encontramos que

$$q_C = \frac{\varrho V}{K}\,\frac{d\,\Delta p}{dt} \tag{3-116}$$

en donde V es el volumen efectivo de aceite bajo compresión (es decir, aproximadamente la mitad del volumen total del cilindro de potencia).

Usando las ecuaciones (3-112) a (3-116),

$$q = K_1 x - K_2\,\Delta p = A\varrho \frac{dy}{dt} + L\,\Delta p + \frac{\varrho V}{K}\,\frac{d\,\Delta p}{dt}$$

o bien

$$A\varrho \frac{dy}{dt} + \frac{\varrho V}{K}\,\frac{d\,\Delta p}{dt} + (L + K_2)\,\Delta p = K_1 x \tag{3-117}$$

La fuerza desarrollada por el pistón de potencia es A Ap, y esta fuerza se aplica a los elementos de carga. Por tanto

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = A\,\Delta p \tag{3-118}$$

Eliminar Ap de las ecuaciones (3-117) y (3-118) produce

$$\frac{\varrho V m}{KA}\frac{d^3y}{dt^3} + \left[\frac{\varrho V b}{KA} + \frac{(L + K_2)m}{A}\right]\frac{d^2y}{dt^2} + \left[A\varrho + \frac{\varrho V k}{KA} + \frac{(L + K_2)b}{A}\right]\frac{dy}{dt} + \frac{(L + K_2)k}{A}y = K_1 x$$

Éste es un modelo matemático del sistema que relaciona el desplazamiento del carrete de la válvula x con el desplazamiento del pistón de potencia y cuando no son insignificantes las fuerzas reactivas de carga.

PROBLEMAS

B-3-1. Simplifique el diagrama de bloques que aparece en la figura **3–50** y obtenga la función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$.

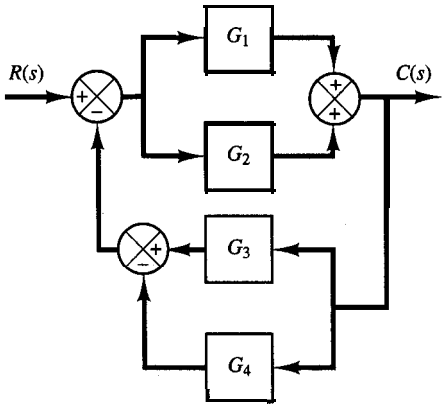


Figura 3–50 Diagrama de bloques de un sistema.

B-3-2. Simplifique el diagrama de bloques de la figura 3-51 y obtenga la función de transferencia $C(s)/R(s)$.

B-3-3. Simplifique el diagrama de bloques de la figura 3-52 y obtenga la función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$.

B-3-4. Obtenga una representación en el espacio de estados del sistema de la figura 3-53.

B-3-5. Considere el sistema descrito mediante

$$\dddot{y} + 3\ddot{y} + 2\dot{y} = u$$

Obtenga una representación en el espacio de estado del sistema.

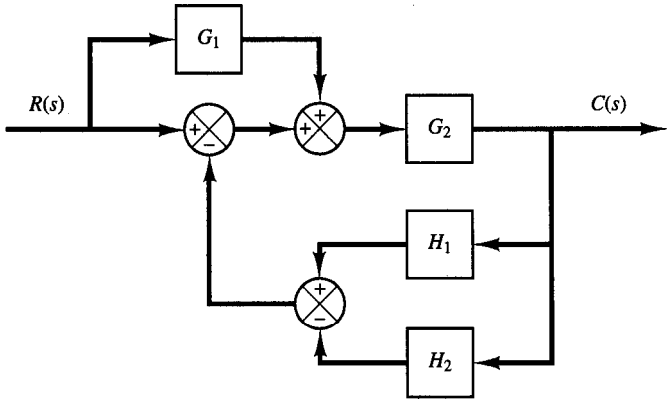


Figura 3-51 Diagrama de bloques de un sistema.

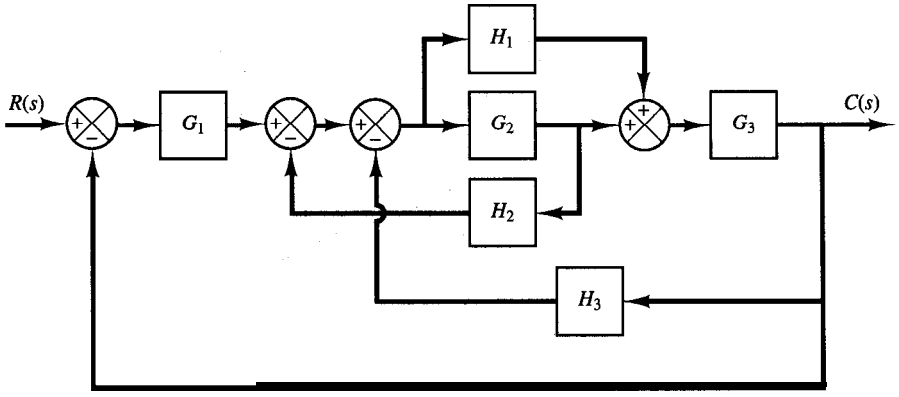


Figura 3-52 Diagrama de bloques de un sistema.

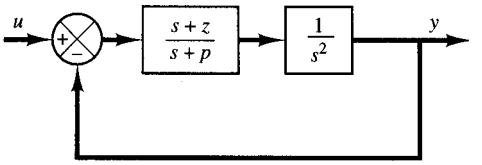


Figura 333 Sistema de control.

B-3-6. Considere el sistema descrito mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Obtenga la función de transferencia del sistema.

B-3-7. Obtenga la función de transferencia $X_o(s)/X_i(s)$ de cada uno de los tres sistemas mecánicos de la figura 3-54. **En** los diagramas, x_i representa el desplazamiento de entrada y x_o denota el desplazamiento de salida. (Cada desplazamiento se mide a partir de su posición de equilibrio.)

B-3-8. Obtenga modelos matemáticos de los sistemas mecánicos de las figuras 3–55(a) y (b).

B-3-9. Obtenga una representación en el espacio de estado del sistema mecánico de la figura 3-56, en donde u_1 y u_2 son entradas y y_1 y y_2 son salidas.

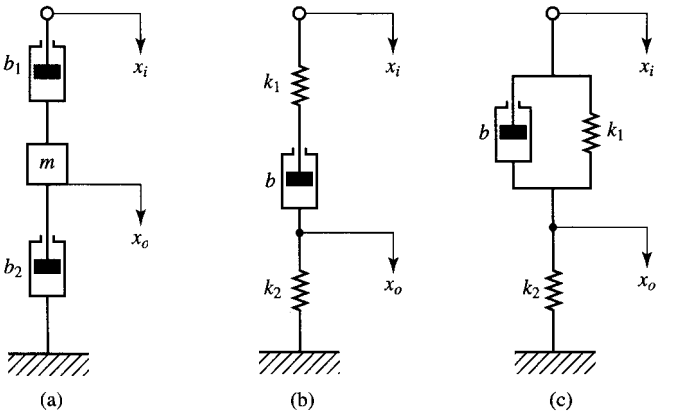


Figura 3–54 Sistemas mecánicos.

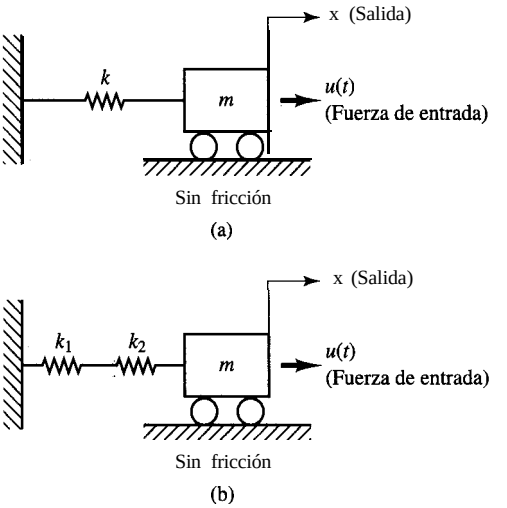


Figura **3–55** Sistemas mecánicos.

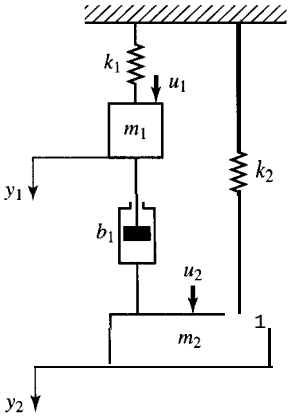


Figura 3-56
Sistema mecánico.

B-3-10. Considere el sistema del péndulo con carga de resorte de la figura 3-57. Suponga que la fuerza de resorte que funciona sobre el péndulo es cero cuando el péndulo está vertical o $\theta = 0$. También suponga que la fricción involucrada es insignificante y que el ángulo de oscilación θ es pequeño. Obtenga un modelo matemático del sistema.

B-3-11. Remitiéndonos al ejemplo 3–4, considere el sistema del péndulo invertido de la figura 3-58. Suponga que la masa del péndulo invertido es m y que está distribuida equitativamente a lo largo de la longitud de la barra. (El centro de gravedad del péndulo se ubica en el centro de la barra.) Suponiendo que θ es pequeña, obtenga modelos matemáticos para el sistema en forma de ecuaciones diferenciales, funciones de transferencia y ecuaciones en el espacio de estado.

B-3-12. Obtenga la función de transferencia del sistema eléctrico de la figura 3-59. Dibuje un diagrama esquemático de un sistema mecánico análogo.

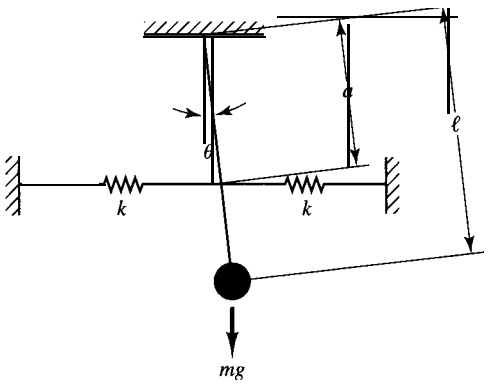


Figura 357 Sistema del péndulo con carga de resorte.

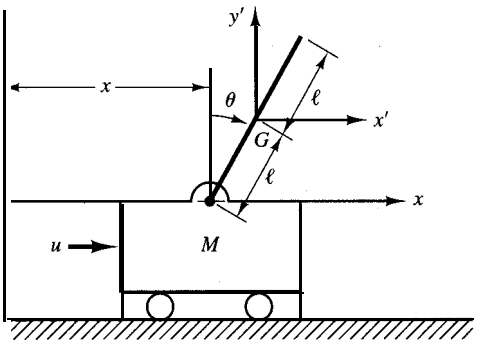


Figura 3-58 Sistema del péndulo invertido.

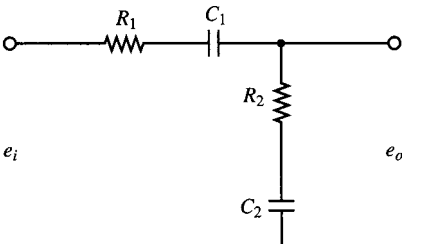


Figura 3–59 Sistema eléctrico.

B-3-13. Considere el sistema del nivel de líquido de la figura 3-60. Suponiendo que $\bar{H} = 3$ m, $\bar{Q} = 0.02$ m³/seg, y que el área transversal del tanque es igual a 5 m², obtenga la constante del tiempo del sistema en el punto de operación $(\bar{H}, \bar{Q})$. Suponga que el flujo a través de la válvula es turbulento.

B-3-14. Considere el sistema del tanque de agua cónico de la figura 3-61. El flujo a través de la válvula es turbulento y se relaciona con la altura H mediante

$$Q = 0.005\sqrt{H}$$

en donde Q es el flujo medido en m³/seg y H está en metros.

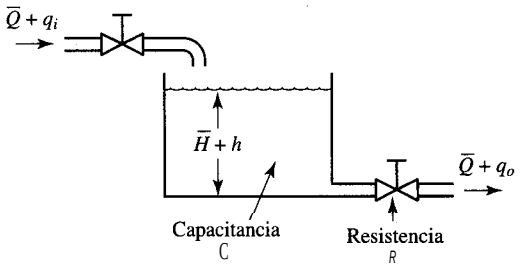


Figura 3–60 Sistema del nivel de líquido.

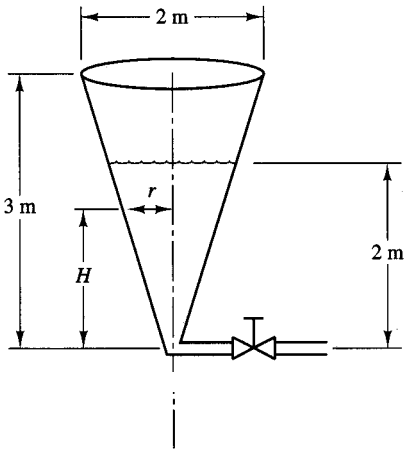


Figura 361 Sistema del tanque de agua cónico.

Suponga que la altura es 2 m en $t = 0$. ¿Cuál será la altura en $t = 60$ seg?

B-3-15. Considere el sistema del nivel de líquido de la figura 3-62. En estado estable, el flujo de entrada es $\bar{Q}$ y el flujo de salida es también $\bar{Q}$. Suponga que en $t = 0$, el flujo de entrada cambia de $\bar{Q}$ a $\bar{Q} + q_i$, en donde q_i es una cantidad pequeña. La entrada de perturbación es q_d, también una cantidad pequeña. Dibuje un diagrama de bloques del sistema y simplifíquelo para obtener $H_2(s)$ como una función de $Q_i(s)$ y $Q_d(s)$, en donde $H_2(s) = \mathcal{L}[h_2(t)]$, $Q_i(s) = \mathcal{L}[q_i(t)]$ y $Q_d(s) = \mathcal{L}[q_d(t)]$. Las capacitancias de los tanques 1 y 2 son C_1 y C_2, respectivamente.

B-3-16. Un termopar tiene una constante de tiempo de 2 seg. Un termopozo tiene un tiempo constante de 30 seg. Cuando el termopar se inserta en el termopozo, este dispositivo de medición de temperatura se considera un sistema de dos capacitancias.

Determine las constantes de tiempo del sistema combinado termopar-termopozo. Suponga que el peso del termopar es de 8 g y que el peso del termopozo es de 40 g. También suponga que son iguales los calores específicos del termopar y el termopozo.

B-3-17. Suponga que el flujo Q y la altura H en un sistema de nivel de líquido se relacionan mediante

$$Q = 0.002\sqrt{H}$$

Obtenga un modelo matemático linealizado que relacione el flujo y la altura cerca del punto de operación en estado estable $(\bar{H}, \bar{Q})$, en donde $\bar{H} = 2.25$ m y $\bar{Q} = 0.003$ m^3/seg.

B-3-18. Encuentre una ecuación linealizada para

$$y = 0.2x^3$$

alrededor de un punto $\bar{x} = 2$.

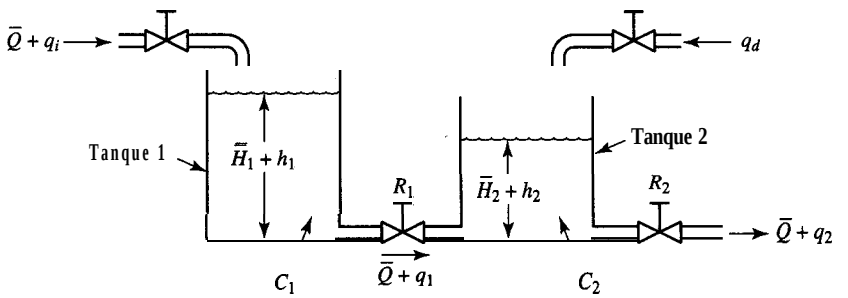


Figura 3-62 Sistema del nivel de líquido.

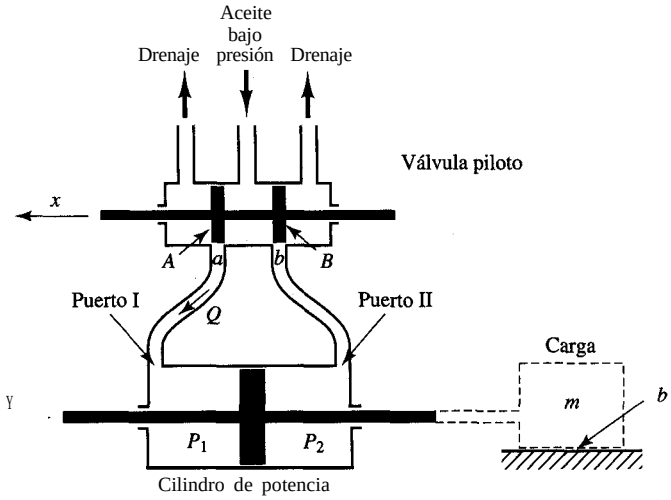


Figura 3-63 Diagrama esquemático de un servomotor hidráulico.

B-3-19. Linealice la ecuación no lineal

$$z = x^2 + 4xy + 6y^2$$

en la región definida por $8 \leq x \leq 10, 2 \leq y \leq 4$.

B-3-20. Considere el servomotor hidráulico de la figura 3-63. Obtenga la función de transferencia $Y(s)/X(s)$. Suponga que la fuerza de inercia debida a la masa del pistón de potencia y el eje en comparación es insignificante si se compara con la fuerza de inercia debida a la masa de carga m y a la fuerza de fricción viscosa $b\dot{y}$.

4

Análisis de la respuesta transitoria

4-1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 3 se planteó que el primer paso para analizar un sistema de control era obtener un modelo matemático del mismo. Una vez obtenido tal modelo, existen varios métodos para el análisis del desempeño del sistema.

En la práctica, la señal de entrada para un sistema de control no se conoce con anticipación, pero es de naturaleza aleatoria, y la entrada instantánea no puede expresarse en forma analítica. Sólo en algunos casos especiales se conoce con anticipación la señal de entrada y se puede expresar en forma analítica o mediante curvas; tal es el caso del control automático de herramientas de corte.

En el análisis y diseño de sistemas de control, debemos tener una base de comparación del desempeño de diversos sistemas de control. Esta base se configura especificando las señales de entrada de prueba particulares y comparando las respuestas de varios sistemas a estas señales de entrada.

Muchos criterios de diseño se basan en tales señales o en la respuesta del sistema a los cambios en las condiciones iniciales (sin señales de prueba). El uso de señales de prueba se justifica porque existe una correlación entre las características de respuesta de un sistema para una señal de entrada de prueba común y la capacidad del sistema de manejar las señales de entrada reales.

Señales de prueba típicas. Las señales de prueba que se usan regularmente son funciones escalón, rampa, parábola, impulso, senoidales, etc. Con estas señales de prueba, es posible realizar con facilidad análisis matemáticos y experimentales de sistemas de control, dado que las señales son funciones del tiempo muy simples.

La forma de la entrada a la que el sistema estará sujeto con mayor frecuencia bajo una operación normal determina cuál de las señales de entrada típicas se debe usar para analizar las características del sistema. Si las entradas para un sistema de control son funciones del tiempo que cambian en forma gradual, una función rampa sería una buena señal de prueba. Asimismo, si un sistema está sujeto a perturbaciones repentinas, una función escalón sería una buena señal de prueba; y para un sistema sujeto a entradas de choque, una función impulso sería la mejor. Una vez diseñado un sistema de control con base en las señales de prueba, por lo general el desempeño del sistema en respuesta a las entradas reales es satisfactorio. El uso de tales señales de prueba permite comparar el desempeño de todos los sistemas sobre la misma base.

Respuesta transitoria y respuesta en estado estable. La respuesta en el tiempo de un sistema de control consta de dos partes: la respuesta transitoria y la respuesta en estado estable. Por respuesta transitoria nos referimos a la que va del estado inicial al estado final. Por respuesta en estado estable, nos referimos a la manera en la cual se comporta la salida del sistema conforme t tiende a infinito.

Estabilidad absoluta, estabilidad relativa y error en estado estable. Al diseñar un sistema de control, debemos ser capaces de predecir su comportamiento dinámico a partir del conocimiento de los componentes. La característica más importante del comportamiento dinámico de un sistema de control es la estabilidad absoluta, es decir, si el sistema es estable o inestable. Un sistema de control está en equilibrio si, en ausencia de cualquier perturbación o entrada, la salida permanece en el mismo estado. Un sistema de control lineal e invariante con el tiempo es estable si la salida termina por regresar a su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial. Un sistema de control lineal e invariante con el tiempo es críticamente estable si las oscilaciones de la salida continúan para siempre. Es inestable si la salida diverge sin límite a partir de su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial. En realidad, la salida de un sistema físico puede aumentar hasta un cierto grado, pero puede estar limitada por "detenciones" mecánicas o el sistema puede colapsarse o volverse no lineal después de que la salida excede cierta magnitud, por lo cual ya no se aplican las ecuaciones diferenciales lineales.

Entre los comportamientos importantes del sistema (aparte de la estabilidad absoluta) que deben recibir una cuidadosa consideración están la estabilidad relativa y el error en estado estable. Dado que un sistema de control físico implica un almacenamiento de energía, la salida del sistema, cuando éste está sujeto a una entrada, no sucede a la entrada de inmediato, sino que exhibe una respuesta transitoria antes de alcanzar un estado estable. La respuesta transitoria de un sistema de control práctico con frecuencia exhibe oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar un estado estable. Si la salida de un sistema en estado estable no coincide exactamente con la entrada, se dice que el sistema tiene un error en estado estable. Este error indica la precisión del sistema. Al analizar un sistema de control, debemos examinar el comportamiento de la respuesta transitoria y el comportamiento en estado estable.

Panorama del capitulo. Este capítulo se relaciona con las respuestas de los sistemas a las señales aperiódicas (tales como las funciones, escalón, rampa, parábola e impulso). El capítulo incluye lo siguiente: la sección 4-1 presentó el material introductorio. La sección 4-2 trata la respuesta de los sistemas de primer orden ante entradas aperiódicas. La sección 4-3 aborda la respuesta transitoria de los sistemas de segundo orden. Se presentan análisis detallados de la respuesta escalón, rampa e impulso de los sistemas de segundo orden. (El análisis de respuesta transitoria de los sistemas de orden superior se analiza en el capítulo 5.) La sección 4-4 ofrece una introducción al enfoque de MATLAB para la

solución de respuesta transitoria. La sección 4–5 presenta un ejemplo de un problema de respuesta transitoria solucionado con MATLAB.

4-2 SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

Considere el sistema de primer orden de la figura 4-l(a). Físicamente, este sistema representa un circuito ***RC,*** un sistema térmico o algo similar. La figura 4-l(b) presenta un diagrama de bloques simplificado. La relación entrada-salida se obtiene mediante

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \tag{4–1}$$

En lo sucesivo, analizaremos las respuestas del sistema a entradas tales como la función escalón unitario, rampa unitaria e impulso unitario. Se supone que las condiciones iniciales son cero.

Observe que todos los sistemas que tienen la misma función de transferencia exhibirán la misma salida en respuesta a la misma entrada. Para cualquier sistema físico dado, la respuesta matemática recibe una interpretación física.

Respuesta escalón unitario de sistemas de primer orden. Dado que la transformada de Laplace de la función escalón unitario es $1/s$, sustituyendo $R(s) = 1/s$ en la ecuación (4–1), obtenemos

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1}\frac{1}{s}$$

Expandir C(s) en fracciones parciales produce

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts + 1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + (1/T)} \tag{4–2}$$

Si tomamos la transformada inversa de Laplace de la ecuación (4–2), obtenemos

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}, \qquad \text{para } t \geq 0 \tag{4–3}$$

La ecuación (4-3) plantea que la salida $c(t)$ es inicialmente cero y al final se vuelve unitaria. Una característica importante de tal curva de respuesta exponencial $c(t)$ es que, para $t = T$, el valor de $c(t)$ es 0.632, o que la respuesta $c(t)$ alcanzó 63.2% de su cambio total. Esto se aprecia con facilidad sustituyendo $t = T$ en $c(t)$. Es decir,

$$c(T) = 1 - e^{-1} = 0.632$$

Observe que, conforme más pequeña es la constante de tiempo T, más rápida es la respuesta del sistema. Otra característica importante de la curva de respuesta exponencial es que la pendiente de la línea de tangente en $t = 0$ es $1/T$, dado que

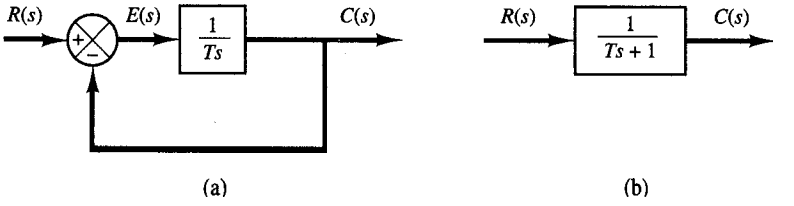


Figura 4-1
(a) Diagrama de bloques de un sistema de primer orden; (b) diagrama de bloques simplificado.

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{T} e^{-t/T} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T} \qquad (4\text{-}4)$$

La respuesta alcanzaría el valor final en $t = T$ si mantuviera su velocidad de respuesta inicial. A partir de la ecuación (4-4) vemos que la pendiente de la curva de respuesta $c(t)$ disminuye en forma monotónica de $1/T$ en $t = 0$ a cero en $t = \infty$.

La curva de respuesta exponencial $c(t)$ obtenida mediante la ecuación (4-3) aparece en la figura 4-2. En una constante de tiempo, la curva de respuesta exponencial ha ido de 0 a 63.2% del valor final. En dos constantes de tiempo, la respuesta alcanza 86.5% del valor final. En $t = 3T, 4T$ y $5T$, la respuesta alcanza 95, 98.2 y 99.3%, respectivamente, del valor final. Por tanto, para $t \geq 4T$, la respuesta permanece dentro del 2% del valor final. Como se observa en la ecuación (4–3), el estado estable se alcanza matemáticamente sólo después de un tiempo infinito. Sin embargo, en la práctica, una estimación razonable del tiempo de respuesta es la longitud de tiempo que necesita la curva de respuesta para alcanzar la línea de 2% del valor final, o cuatro constantes de tiempo.

Considere el sistema de la figura 4-3. Para determinar experimentalmente si el sistema es o no de primer orden, grafique la curva logarítmica $|c(t) - c(\infty)|$, en donde $c(t)$ es la salida del sistema, como una función de t. Si la curva se convierte en una línea recta, el sistema es de primer orden. La constante de tiempo T se lee de la gráfica como el tiempo T que satisface la ecuación siguiente:

$$c(T) - c(\infty) = 0.368\,[c(O) \quad c(\infty)]$$

Observe que, en lugar de graficar log $|c(t) - c(\infty)|$ contra t, es conveniente graficar $|c(t) - c(\infty)|/|c(0) - c(\infty)|$ contra t en papel semilogarítmico, como se aprecia en la figura 4-4.

Respuesta rampa unitaria de sistemas de primer orden. Dado que la transformada de Laplace de la función rampa unitaria es $1/s^2$, obtenemos la salida del sistema de la figura 4-l(a), como

$$\mathbf{C(s)} = \frac{1}{TS + 1} \frac{1}{s^2}$$

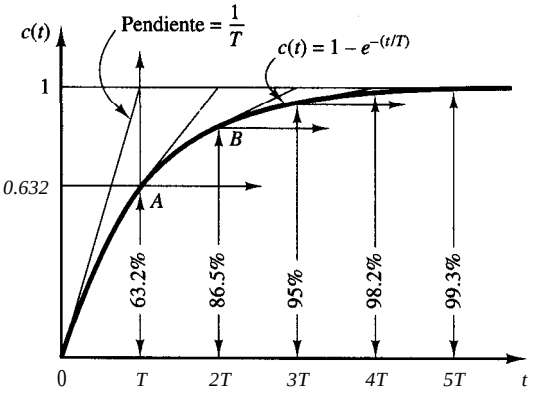


Figura 4-2
Curva de respuesta exponencial.

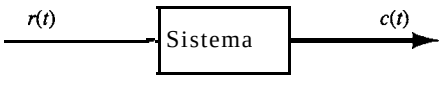


Figura 4–3
Un sistema general.

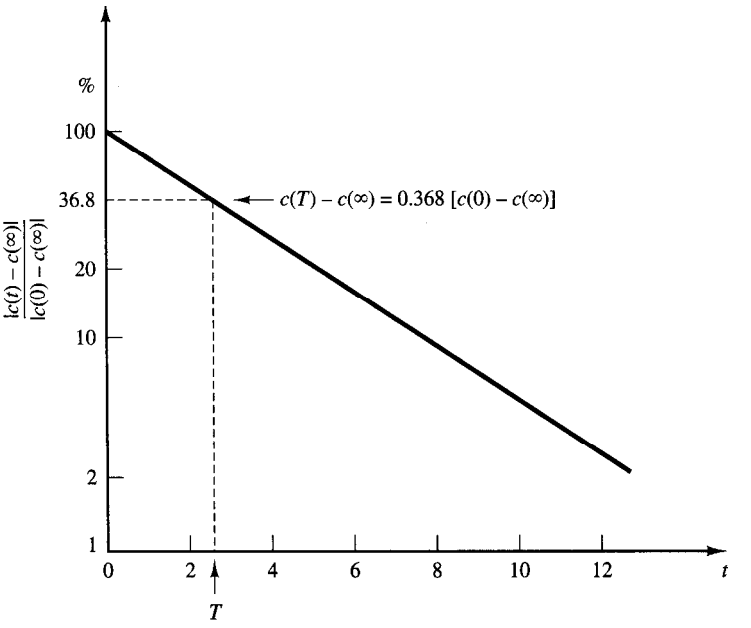


Figura 4-4
Gráfica de $|c(t) - c(\infty)|/|c(0) - c(\infty)|$ contra t en papel semilogarítmico.

Si expandirnos $C(s)$ en fracciones parciales, obtenemos

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts + 1} \tag{4–5}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de la ecuación (4–5), obtenemos

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T}, \qquad \text{para } t \geq 0$$

De este modo, la señal de error $e(t)$ es

$$\begin{aligned} e(t) &= r(t) - c(t) \\ &= T(1 - e^{-t/T}) \end{aligned}$$

Conforme t tiende a infinito, $e^{-t/T}$ se aproxima a cero y, por tanto, la señal de error $e(t)$ se aproxima a T o

$$e(\infty) = T$$

La entrada rampa unitaria y la salida del sistema se muestran en la figura 4-5. El error después de la entrada rampa unitaria es igual a T para una t suficientemente grande. Entre más pequeña es la constante de tiempo T, más pequeño es el error en estado estable después de la entrada rampa.

Respuesta impulso unitario de sistemas de primer orden. Para la entrada impulso unitario, $R(s) = 1$ y la salida del sistema de la figura 4-l(a) pueden obtenerse como:

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

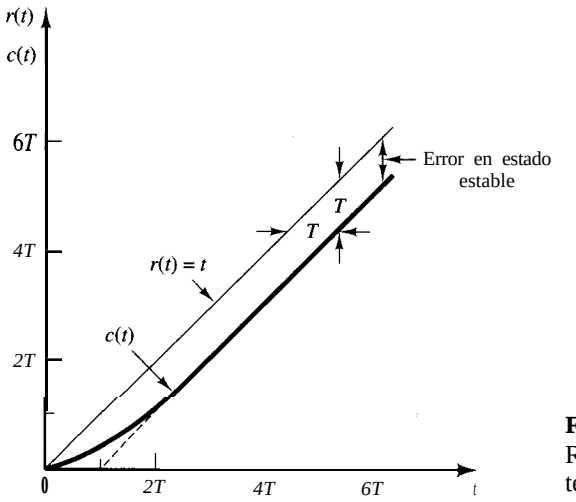


Figura 4-5
Respuesta rampa unitaria del sistema de la figura 4–1(a).

o bien

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}, \qquad \text{para } t \geq 0 \tag{4–6}$$

La curva de respuesta obtenida mediante la ecuación (4-6) aparece en la figura 4-6.

Una propiedad importante de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo. En el análisis anterior, se demostró que, para la entrada rampa unitaria, la salida *c(t) es*

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T}, \qquad \text{para } t \geq 0$$

Para la entrada escalón unitario, que es la derivada de la entrada rampa unitaria, la salida *c(t) es*

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}, \qquad \text{para } t \geq 0$$

Por último, para la entrada impulso unitario, que es la derivada de la entrada escalón unitario, la salida *c(t) es*

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}, \qquad \text{para } t \geq 0$$

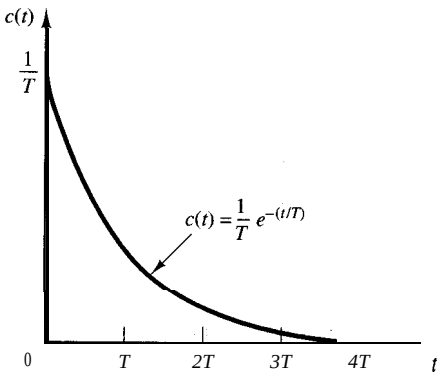


Figura 4-6
Respuesta impulso unitario del sistema de la figura 4-l(a).

Una comparación de las respuestas del sistema para estas tres entradas indica con claridad que la respuesta ala derivada de una señal de entrada se obtiene diferenciando la respuesta del sistema para la señal original. También se observa que la respuesta para la integral de la señal original se obtiene integrando la respuesta del sistema para la señal original y determinando las constantes de integración a partir de la condición inicial de salida cero. Ésta es una propiedad de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo. Los sistemas lineales y variantes con el tiempo y los sistemas no lineales no poseen esta propiedad.

EJEMPLO 4-1

Considere el sistema de control de nivel de líquido de la figura 4–7(a). (Se supone que el controlador es proporcional; es decir, la salida del controlador es proporcional a la entrada del mismo.) Suponemos que todas las variables, r, q_i, h y q_o se miden a partir de sus valores en estado estable respectivos R, Q, H y Q. También suponemos que las magnitudes de las variables r, q_i, h y q_o son suficientemente pequeñas para que el sistema se aproxime mediante un modelo matemático lineal.

Remitiéndonos a la sección 3-8, obtenemos la función de transferencia del sistema de nivel de líquido como

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$

Dado que el controlador es proporcional, al flujo de entrada q_i es proporcional al error e, por lo que $q_i = K_p K_v e$, en donde K_p es el aumento del controlador y K_v es la ganancia de la válvula de control. En términos de cantidades transformadas mediante el método de Laplace,

$$Q_i(s) = K_p K_v E(s)$$

La figura 4–7(b) contiene un diagrama de bloques de este sistema. La figura 4–7(c) muestra un diagrama de bloques simplificado, en donde $X(s) = (1/K_b)R(s)$, $K = K_p K_v R K_b$ y $T = RC$.

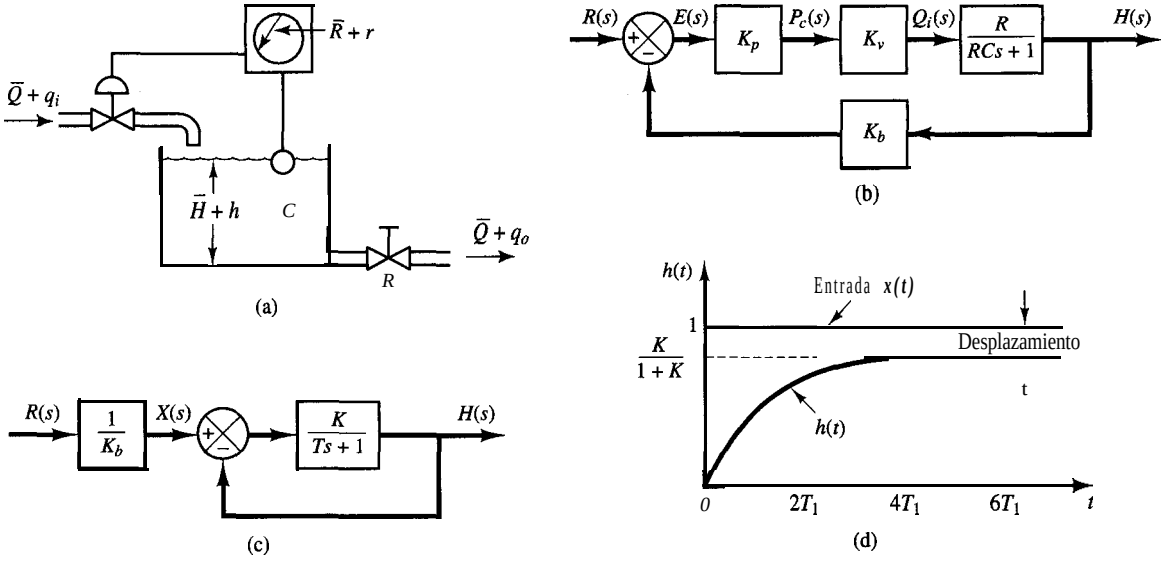


Figura 4-7
(a) Sistema de control de nivel de líquido; (b) diagrama de bloques; (c) diagrama de bloques simplificado; (d) curva h(t) contra t.

A continuación investigaremos la respuesta h(t) para un cambio en la entrada de referencia. Supondremos un cambio escalón unitario en n(t), en donde $x(t) = (1/K_b)r(t)$. La función de transferencia en lazo cerrado entre $H(s)$ y X(s) se obtiene mediante

$$\frac{H(s)}{X(s)} = \frac{K}{Ts + 1 + K} \tag{4–7}$$

Dado que la transformada de Laplace de la función escalón unitario es $1/s$, sustituir X(s) = $1/s$ en la ecuación (4-7) nos lleva a:

$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1 + K}\frac{1}{s}$$

Expandiendo ***H(s)*** en fracciones parciales, obtenemos

$$H(s) = \frac{K}{1 + K}\frac{1}{s} - \frac{K}{1 + K}\frac{1}{s + (1 + K)/T}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de ambos miembros de esta última ecuación, obtenemos la siguiente solución de tiempo h(t):

$$h(t) = \frac{K}{1 + K}(1 - e^{-t/T_1}), \quad \text{para } t \geq 0 \tag{4–8}$$

en donde

$$T_1 = \frac{T}{1 + K}$$

La curva de respuesta h(t) se grafica en la figura 4–7(d). A partir de la ecuación (4–8), observamos que la constante de tiempo T_1 del sistema en lazo cerrado es diferente de la constante de tiempo T del bloque de la trayectoria directa.

A partir de la ecuación (44) vemos que, conforme t tiende a infinito, el valor de h(t) tiende a $K/(1 + K)$, o bien

$$h(\infty) = \frac{K}{1 + K}$$

Dado que $x(\infty) = 1$, hay un error en estado estable de $1/(1 + K)$. Tal error se denomina ***desplazamiento*** (offset). El valor del desplazamiento se vuelve más pequeño conforme el aumento K se vuelve mayor.

El desplazamiento es una característica del control proporcional de una planta cuya función de transferencia no posee un elemento de integración. (En este caso, necesitamos un error diferente de cero para ofrecer una salida diferente de cero.) Para eliminar tal desplazamiento, debemos agregar una acción de control integral. (Consulte la sección 5-3.)

4-3 SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

En esta sección, obtendremos la respuesta de un sistema de control típico de segundo orden para una entrada escalón, rampa e impulso.Aquí consideraremos un servomotor de cd como ejemplo de un sistema de segundo orden. Los motores de cd convencionales usan escobillas mecánicas y conmutadores que requieren mantenimiento regular. Sin embargo, debido a los mejoramientos efectuados en las escobillas y en los conmutadores, muchos motores de cd que se usan en sistemas de seguimiento operan casi sin mantenimiento.Algunos motores de cd usan conmutación electrónica. Se denominan motores de cd sin escobillas.

Servomotores de cd. En la industria se usan muchos tipos de motores de cd. Los motores de cd que se usan en los sistemas de seguimiento se denominan servomotores. En los servomotores de cd, la inercia del rotor se ha hecho muy pequeña, por lo que existen en el mercado motores con razones muy altas entre el par y la inercia. Algunos servomotores de cd tienen constantes de tiempo muy pequeñas. Los servomotores de cd con rangos de corriente muy pequeños se usan en instrumentos y equipo relacionados con computadoras, tales como unidades de disco, unidades de cinta, impresoras y procesadores de texto. Los servomotores de cd, con razones de corriente mediana y grande, se usan en sistemas robóticos, en máquinas de fresado controladas numéricamente, etcétera.

En los servomotores de cd, las bobinas de campo se conectan en serie con la armadura o la bobina de campo se separa de la armadura. (Es decir, el campo magnético se produce mediante un circuito independiente.) En este ultimo caso, en el que el campo se excita en forma independiente, el flujo magnético es independiente de la corriente de la armadura. En algunos servomotores de cd, el campo magnético se produce mediante un imán permanente y, por tanto, el flujo magnético es constante. Tales servomotores de cd se denominan servomotores de cd con imán permanente. Los servomotores de cd con campos excitados en forma independiente, al igual que los servomotores de cd con imán permanente se controlan mediante la corriente de la armadura.Tal esquema para controlar la salida del servomotor de cd mediante la corriente de la armadura se denomina control de la armadura de servomotores de cd.

En el caso en el que la corriente de la armadura se mantiene constante y la velocidad se controla por medio de un voltaje de campo, el motor de cd se denomina motor de cd controlado por campo. (Algunos sistemas de control de velocidad usan motores de cd controlados por campo.) Sin embargo, el requerimiento de una corriente de armadura constante es una desventaja importante. (Proporcionar una fuente de corriente constante es mucho más difícil que incorporar una fuente de voltaje constante.) Por lo general, las constantes de tiempo del motor de cd controlado por campo son grandes, en comparación con las constantes de tiempo de un motor de cd controlado por armadura equivalente.

Un servomotor de cd también es manejado por un controlador de movimiento electrónico, con frecuencia denominado servomanejador, como una combinación motor-manejador. El servomanejador determina el movimiento de un servomotor de cd y opera en diversos modos Algunas de las características son el posicionamiento de punto a punto, el perfilado programable de velocidad y aceleración. El uso de un manejador de movimiento electrónico mediante un manejador de modulación por ancho de pulso para controlar un servomotor de cd se observa con frecuencia en los sistemas de control de robots, de control numérico y otros de posición y/o velocidad.

A continuación analizaremos el control de la armadura de servomotores de cd.

Un sistema de seguimiento. Considere el sistema de seguimiento de la figura 4–8(a). El objetivo de este sistema es controlar la posición de la carga mecánica de acuerdo con la posición de referencia. La operación de este sistema es la siguiente: un par de potenciómetros funciona como un dispositivo de medición de error. Convierten las posiciones de entrada y salida en señales eléctricas proporcionales. La señal de entrada de comando determina la posición angular *r* del cursor del potenciómetro de entrada. La posición angular r es la entrada de referencia para el sistema y el potencial eléctrico del cursor es proporcional a la posición angular del cursor. La posición del eje de salida determina la posición angular c del cursor del potenciómetro de salida. La diferencia entre la posición angular de entrada *r* y la posición angular de salida c es la señal de error e, o bien,

$$e = r - c$$

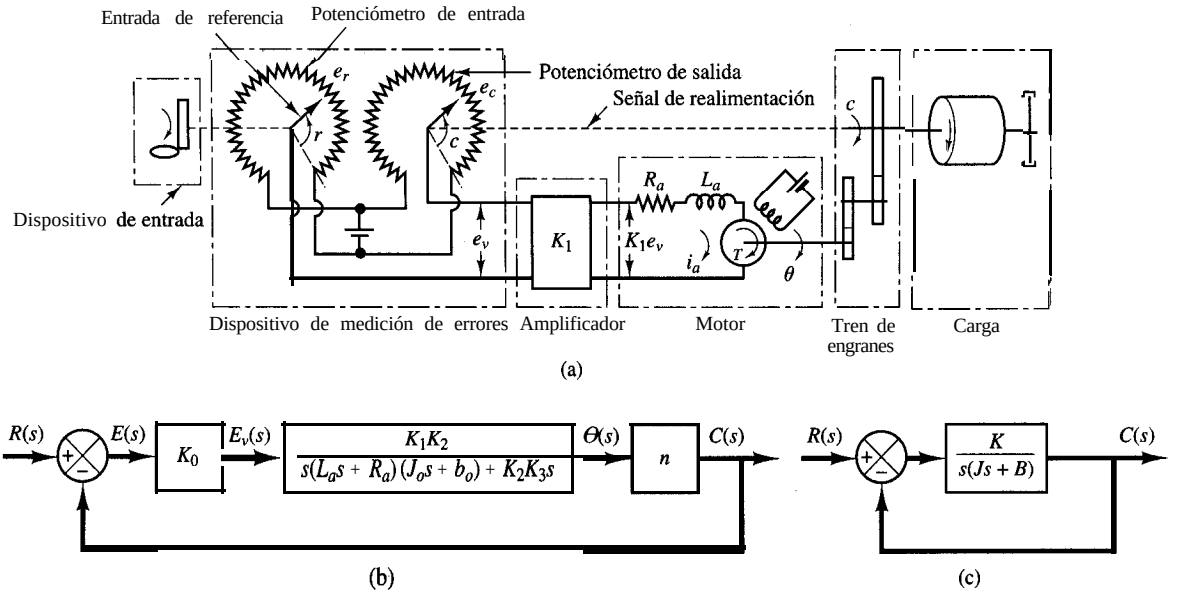


Figura 4-8
(a) Diagrama esquemático de un sistema de seguimiento; (b) diagrama de bloques para el sistema; (c) diagrama de bloques simplificado.

La diferencia potencial $e_r - e_c = e_v$ es el voltaje de error, en donde e_r es proporcional a r y e_c es proporcional a c; es decir, e, = $K_0 r$ y $e_c = K_0 c$, en donde K_0 es una constante de proporcionalidad. El amplificador aumenta el voltaje de error que aparece en las terminales del potenciómetro y su constante de ganancia es K_1. El voltaje de salida de este amplificador se aplica al circuito de la armadura del motor de cd. (El amplificador debe tener una impedancia de entrada muy alta, debido a que los potenciómetros son esencialmente circuitos de alta impedancia y no toleran una variación de corriente. Al mismo tiempo, el amplificador debe tener una impedancia de salida baja, dado que se alimenta en el circuito de la armadura del motor.) Se aplica un voltaje fijo a la bobina de campo. Si existe un error, el motor desarrolla un par para rotar la carga de salida de tal forma que el error se reduzca a cero. Para una corriente de campo constante, el par que desarrolla el motor es

$$T = K_2 i_a$$

en donde K_2 es la constante de par del motor e i_a es la corriente de la armadura.

Observe que si se invierte el signo de la corriente i_a, el signo del par T se invierte, y esto provocará que la dirección de giro del rotor se invierta.

Cuando la armadura gira, se induce en ella un voltaje proporcional al producto del flujo y la velocidad angular. Para un flujo constante, el voltaje inducido e_b es directamente proporcional a la velocidad angular $d\theta/dt$, o bien

$$e_b = K_3 \frac{d\theta}{dt} \tag{4–9}$$

en donde e_b es la fuerza contraelectromotriz, K_3 es la constante de la fuerza contraelectromotriz del motor y θ es el desplazamiento angular de la flecha del motor.

La velocidad del servomotor controlado por armadura está determinada por el voltaje de la armadura e_a. (El voltaje de la armadura $e_a = K_1 e_v$ es la salida del amplificador.) La ecuación diferencial para el circuito de la armadura es

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a$$

o bien

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_3 \frac{d\theta}{dt} = K_1 e_v \tag{4-10}$$

La ecuación para el equilibrio de pares es

$$J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + b_0 \frac{d\theta}{dt} = T = K_2 i_a \tag{4–11}$$

en donde J_0 es la inercia de la combinación del motor, de la carga y el tren de engranes referida a la flecha del motor, y b_0 es el coeficiente de fricción viscosa de la combinación del motor, la carga y el tren de engranes referida a la flecha del motor. La función de transferencia entre el desplazamiento angular de la flecha del motor y el voltaje de error se obtiene de las ecuaciones (4-10) y (4–11), del modo siguiente:

$$\frac{\Theta(s)}{E,(s)} \quad \frac{K_1 K_2}{s(L_a s + R_a)(J_0 s + b_0) + K_2 K_3 s} \tag{4-12}$$

en donde $\theta(s) = \mathcal{L}[\theta(t)]$ y $E_v(s) = \mathcal{L}[e_v(t)]$. Suponemos que la relación de engranes del tren de engranes es tal que la flecha de salida gira n veces por cada revolución de la flecha del motor. Por tanto,

$$\mathrm{C(s)} = n\Theta(s) \tag{4-13}$$

en donde $C(s) = \mathcal{L}[c(t)]$ y $c(t)$ es el desplazamiento angular de la flecha de salida. La relación entre $E_v(s)$, $R(s)$ y $C(s)$ es

$$E_v(s) = K_0[R(s) - C(s)] = K_0 E(s) \tag{4-14}$$

en donde $R(s) = \mathcal{L}[r(t)]$. El diagrama de bloques de este sistema se construye a partir de las ecuaciones (4–12), (4-13) y (4–14), que aparecen en la figura 4–8(b). La función de transferencia en la trayectoria directa de este sistema es

$$G(s) = \frac{C(s)}{\Theta(s)} \frac{\Theta(s)}{E_v(s)} \frac{E_v(s)}{E(s)} = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{s[(L_a s + R_a)(J_0 s + b_0) + K_2 K_3]}$$

Dado que L_a es, por lo general, pequeña, puede pasarse por alto, y la función de transferencia G(s) en la trayectoria directa se convierte en

$$\begin{aligned} \mathrm{G(s)} &= \frac{K_0 K_1 K_2 n}{s[R_a(J_0 s + b_0) + K_2 K_3]} \\ &= \frac{K_0 K_1 K_2 n / R_a}{J_0 s^2 + \left(b_0 + \dfrac{K_2 K_3}{R_a}\right) s} \end{aligned} \tag{4–15}$$

El término $[b_0 + (K_2K_3/R_a)]s$ indica que la fuerza contraelectromotriz del motor aumenta efectivamente la fricción viscosa del sistema. La inercia J_0 y el coeficiente de fricción viscosa $b_0 + (K_2K_3/R_a)$ referida a la flecha del motor. Cuando JO y $b_0 + (K_2K_3/R_a)$ se multiplican por $1/n^2$, la inercia y el coeficiente de fricción viscosa se expresan en términos de la flecha de salida. Introduciendo parámetros nuevos definidos mediante

$J = J_0/n^2$ = momento de inercia referida a la flecha de salida

$B = [b_0 + (K_2K_3/R_a)]/n^2$ = coeficiente de fricción viscosa referida a la flecha de salida

$K = K_0K_1K_2/nR_a$

la función de transferencia G(s) obtenida mediante la ecuación (4-15) se simplifica, produciendo

$$G(s) = \frac{K}{Js^2 + Bs}$$

o bien

$$G(s) = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)} \qquad (4\text{-}16)$$

en donde

$$K_m = \frac{K}{B}, \qquad T_m = \frac{J}{B} = \frac{R_a J_0}{R_a b_0 + K_2 K_3}$$

El diagrama de bloques del sistema de la figura 4–8(b) se simplifica como se muestra en la figura 4–8(c).

A continuación, investigaremos las respuestas dinámicas de este sistema ante las entradas escalón unitario, rampa unitaria e impulso unitario.

A partir de las ecuaciones (4-15) y (4-16) se observa que las funciones de transferencia contienen el término $1/s$. Por tanto, este sistema posee una propiedad de integración. En la ecuación (4–16), observe que la constante de tiempo del motor es más pequeña para una R_a y una JO más pequeñas. Con una JO pequeña, conforme se reduce la resistencia R_a, la constante de tiempo del motor se aproxima a cero y el motor actúa como un integrador ideal.

Efecto de una carga en la dinámica de un servomotor. Una de las características más importantes del servomotor es la aceleración máxima que puede obtenerse. Para un par disponible determinado, el momento de inercia del rotor debe ser mínimo. Dado que el servomotor opera bajo condiciones continuamente variables, ocurren de vez en cuando una aceleración y una desaceleración del rotor. El servomotor debe ser capaz de absorber la energía mecánica al igual que generarla. Debe ser satisfactorio el desempeño del rotor de mando cuando se usa como freno.

Supongamos que J_m y b_m son, respectivamente, el momento de inercia y el coeficiente de fricción viscosa del rotor, y supongamos que J_L y b_L son, respectivamente, el momento de inercia y el coeficiente de fricción viscosa de la carga en la flecha de salida. Supóngase también que el momento de inercia y el coeficiente de fricción viscosa del tren de engranes son insignificantes o se incluyen en J_L y b_L, respectivamente. Por tanto, el momento de inercia equivalente J_{eq} referido a la flecha del motor y el coeficiente de fricción viscosa equivalente b_{eq} referida a la flecha del motor se escriben como (observe los detalles en el problema A-4-4):

$$J_{eq} = J_m + n^2 J_L$$
$$b_{eq} = b_m + n^2 f_L$$

en donde $n (n < 1)$ es la relación de engranes entre el motor y la carga. Si la relación de engranes n es pequeña y $J_m \gg n^2 J_L$, el momento de inercia de la carga referido a la flecha del motor es insignificante con respecto al momento de inercia del rotor. Se aplica un argumento similar a la fricción de carga. En general, cuando la relación de engranes n es pequeña, la función de transferencia del servomotor eléctrico se obtiene, sin considerar el momento de inercia de la carga y la fricción. Sin embargo, si ni J_m ni $n^2 J_L$ son insignificantes comparados uno con el otro, debe usarse el momento de inercia equivalente a J_{eq} para evaluar la función de transferencia de la combinación motor-carga.

Respuesta escalón de sistemas de segundo orden. La función de transferencia en lazo cerrado del sistema de la figura 4–8(c) es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} \tag{4-17}$$

que puede reescribirse como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{J}}{\left[s + \frac{B}{2J} + \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}}\right]\left[s + \frac{B}{2J} - \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}}\right]} \tag{4-18}$$

Los polos en lazo cerrado son complejos si $B^2 - 4JK < 0$, y son reales si $B^2 - 4JK \geq 0$. En el análisis de la respuesta transitoria, es conveniente escribir

$$\frac{K}{J} = \omega_n^2, \qquad \frac{B}{J} = 2\zeta\omega_n = 2\sigma$$

en donde σ se denomina ***atenuación;*** ω_n, ***frecuencia natural no amortiguada y*** ζ ***factor de amortiguamiento relativo*** del sistema. El factor de amortiguamiento relativo ζ es el cociente entre amortiguamiento real B y el amortiguamiento crítico $B_c = 2\sqrt{JK}$, o bien

$$\zeta = \frac{B}{B_c} = \frac{B}{2\sqrt{JK}}$$

En términos de ζ y ω_n, el sistema de la figura 4–8(c) se convierte en el que aparece en la figura 4-9, y la función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$ obtenida mediante la ecuación (4-18) se escribe como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{4-19}$$

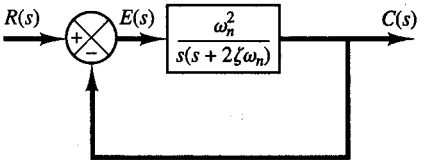


Figura 4–9
Sistema de segundo orden.

El comportamiento dinámico del sistema de segundo orden se describe a continuación en términos de dos parámetros ζ y ω_n. Si $0 < \zeta < 1$, los polos en lazo cerrado son complejos conjugados y se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s. El sistema, entonces se denomina subamortiguado y la respuesta transitoria es oscilatoria. Si $\zeta = 1$, el sistema se denomina críticamente amortiguado. Los sistemas sobreamortiguados corresponden a $\zeta > 1$. La respuesta transitoria de los sistemas críticamente amortiguados y sobreamortiguados no oscila. Si $\zeta = 0$, la respuesta transitoria no se amortigua.

Ahora obtendremos la respuesta del sistema que aparece en la figura 4-9 para una entrada escalón unitario. Consideraremos tres casos diferentes: el subamortiguado ($0 < \zeta < 1$), el críticamente amortiguado ($\zeta = 1$) y el sobreamortiguado ($\zeta > 1$).

(1) Caso subamortiguado ($0 < \zeta < 1$): en este caso, $C(s)/R(s)$ se escribe como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)}$$

en donde $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$. La frecuencia ω_d se denomina ***frecuencia natural amortiguada.*** Para una entrada escalón unitario, C(s) se escribe como

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)s} \tag{4–20}$$

La transformada inversa de Laplace de la ecuación (4-20) se obtiene con facilidad si C(s) se escribe en la forma siguiente:

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

En el capítulo 2, se demostró que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t}\,\text{sen}\,\omega_d t$$

Por tanto, la transformada inversa de Laplace de la ecuación (4-20) se obtiene como

$$\mathcal{L}^{-1}[C(s)] = c(t)$$

$$= 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\,\text{sen}\,\omega_d t\right)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\,\text{sen}\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}\right), \quad \text{para} \quad t \geq 0 \tag{4-21}$$

Este resultado se obtiene directamente usando una tabla de transformadas de Laplace. A partir de la ecuación (4-21) se observa que la frecuencia de oscilación transitoria es la frecuencia natural amortiguada ω_d y que, por tanto, varía con el factor de amortiguamiento relativo ζ. La señal de error para este sistema es la diferencia entre la entrada y la salida, y es

$$e(t) = r(t) - c(t)$$
$$= e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\ \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\ \text{sen}\ \omega_d t\right) \qquad \text{para } t \geq 0$$

Esta señal de error presenta una oscilación senoidal amortiguada. En estado estable, o en $t = \infty$, no existe un error entre la entrada y la salida.

Si el factor de amortiguamiento relativo ζ es igual a cero, la respuesta se vuelve no amortiguada y las oscilaciones continúan indefinidamente. La respuesta $c(t)$ para el caso del amortiguamiento cero se obtiene sustituyendo $\zeta = 0$ en la ecuación (4–21), lo cual produce

$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t, \qquad \text{para } t \geq 0 \tag{4-22}$$

Por tanto, a partir de la ecuación (4–22), establecemos que ω_n representa la frecuencia natural no amortiguada del sistema. Es decir, ω_n es la frecuencia a la cual el sistema oscilaría si el amortiguamiento disminuyera a cero. Si el sistema lineal tiene cualquier cantidad de amortiguamiento, no se puede observar experimentalmente la frecuencia natural no amortiguada. La frecuencia que se observa es la frecuencia natural amortiguada ω_d, que es igual a $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$. Esta frecuencia siempre es menor que la frecuencia natural no amortiguada. Un aumento en ζ reduciría la frecuencia natural amortiguada ω_d. Si ζ aumenta más allá de la unidad, la respuesta se vuelve sobreamortiguada y no oscilará.

(2) Caso críticamente amortiguado ($\zeta = 1$): si los dos polos de $C(s)/R(s)$ son casi iguales, el sistema se aproxima mediante uno críticamente amortiguado.

Para una entrada escalón unitario, R(s) = $1/s$ y C(s) se escribe como

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2 s} \tag{4–23}$$

La transformada inversa de Laplace de la ecuación (4-23) se encuentra como

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t), \qquad \text{para } t \geq 0 \tag{4-24}$$

Este resultado se obtiene suponiendo que ζ se aproxima a la unidad en la ecuación (4-21) y usando el límite siguiente:

$$\lim_{\zeta \to 1} \frac{\text{sen}\ \omega_d t}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \lim_{\zeta \to 1} \frac{\text{sen}\ \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \omega_n t$$

(3) Caso sobreamortiguado ($\zeta > 1$): en este caso, los dos polos de $C(s)/R(s)$ son reales negativos y diferentes. Para una entrada escalón unitario, R(s) = $1/s$ y C(s) se escriben como

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})s} \tag{4-25}$$

La transformada inversa de Laplace de la ecuación (4-25) es:

$$c(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}$$

$$= 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2}\right), \quad \text{para } t \geq 0 \tag{4-26}$$

en donde $s_1 = (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$ y $s_2 = (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$. Por tanto, la respuesta c(t) incluye dos términos exponenciales que decaen.

Cuando ζ es apreciablemente mayor que la unidad, uno de los dos exponenciales que decaen disminuye mucho más rápido que el otro, por lo que el término exponencial que decae más rápido puede pasarse por alto (corresponde a una constante de tiempo más pequeña). Es decir, si $-s_2$ se localiza mucho más cerca del eje jo que $-s_1$ (lo cual significa que $|s_2| \ll |s_1|$), para una solución aproximada podemos no considerar $-s_1$. Esto se permite debido a que el efecto de $-s_1$ en la respuesta es mucho más pequeño que el de $-s_2$, dado que el término que incluye s_1 en la ecuación (4-26) se descompone mucho más rápido que el término que tiene a s_2. Una vez desaparecido el término exponencial que decae más rápido, la respuesta es similar a la de un sistema de primer orden, y $C(s)/R(s)$ se aproxima mediante:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}{s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} \frac{s_2}{s + s_2}$$

Esta forma aproximada es una consecuencia directa de que a los valores iniciales y los valores finales tanto del $C(s)/R(s)$ original como del aproximado coincidan.

Con la función de transferencia aproximada $C(s)/R(s)$, 1a respuesta escalón unitario se obtiene como:

$$C(s) = \frac{\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}{(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})s}$$

La respuesta del tiempo c(t) es, entonces

$$c(t) = 1 - e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \qquad \text{para } t \geq 0$$

Esto proporciona una respuesta escalón unitario aproximada, cuando uno de los polos de $C(s)/R(s)$ puede pasarse por alto.

La figura 4-10 contiene una familia de curvas c(t) con diversos valores de ζ, en donde la abscisa es la variable adimensional $\omega_n t$. Las curvas sólo son funciones de ζ y se obtienen

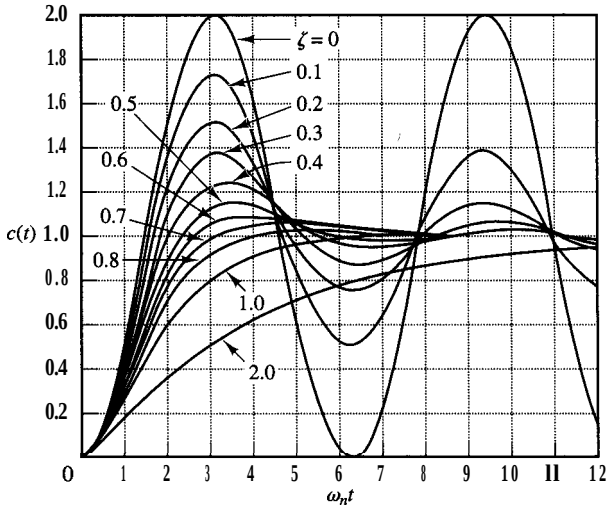


Figura 4–10
Curvas de respuesta escalón unitario del sistema de la figura 4-9.

a partir de las ecuaciones (4–21), (4-24) y (4-26). El sistema descrito mediante estas ecuaciones estaba inicialmente en reposo.

Observe que los dos sistema de segundo orden que tienen el mismo ζ pero diferente ω_n rebasarán en la misma medida el límite máximo y mostrarán el mismo patrón oscilatorio. Se dice que tales sistemas tienen la misma estabilidad relativa.

Es importante observar que, para los sistemas de segundo orden, cuyas funciones de transferencia en lazo cerrado son diferentes de las obtenidas mediante la ecuación (4–19), las curvas de respuesta escalón se ven muy distintas de las que aparecen en la figura 4-10.

En la figura 4-10 observamos que un sistema subamortiguado con ζ entre 0.5 y 0.8 se acerca al valor final con mayor rapidez que un sistema críticamente amortiguado o sobreamortiguado. Entre los sistemas que responden sin oscilación, un sistema críticamente amortiguado presenta la respuesta más rápida. Un sistema sobreamortiguado siempre es lento para responder a las entradas.

Definiciones de las especificaciones de respuesta transitoria. En muchos casos prácticos, las características de desempeño deseadas del sistema de control se especifican en términos de cantidades en el dominio del tiempo. Los sistemas que pueden almacenar energía no responden instantáneamente y exhiben respuestas transitorias cada vez que están sujetos a entradas o perturbaciones.

Con frecuencia, las características de desempeño de un sistema de control se especifican en términos de la respuesta transitoria para una entrada escalón unitario, dado que ésta es fácil de generar y es suficientemente drástica. (Si se conoce la respuesta a una entrada escalón, es matemáticamente posible calcular la respuesta para cualquier entrada.)

La respuesta transitoria de un sistema para una entrada escalón unitario depende de las condiciones iniciales. Por conveniencia al comparar respuestas transitorias de varios sistemas, es una práctica común usar la condición inicial estándar de que el sistema está en reposo al inicio, por lo cual la salida y todas las derivadas con respecto al tiempo son cero. De este modo, las características de respuesta se comparan con facilidad.

La respuesta transitoria de un sistema de control práctico exhibe con frecuencia oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar el estado estable. Al especificar las características de la respuesta transitoria de un sistema de control para una entrada escalón unitario, es común especificar lo siguiente:

1. Tiempo de retardo, t_d
2. Tiempo de levantamiento, t_r
3. Tiempo pico, t_p
4. Sobrepaso máximo, M_p
5. Tiempo de asentamiento, t_s

Estas especificaciones se definen enseguida y aparecen en forma gráfica en la figura 4-11.

1. Tiempo de retardo, t_d: el tiempo de retardo es el tiempo requerido para que la respuesta alcance la primera vez la mitad del valor final.
2. Tiempo de levantamiento, t_r: el tiempo de levantamiento es el tiempo requerido para que la respuesta pase del 10 al 90%, del 5 al 95% o del 0 al 100% de su valor final. Para sistemas subamortiguados de segundo orden, por lo común se usa el tiempo de levantamiento de 0 a 100%. Para sistemas sobreamortiguados, suele usarse el tiempo de levantamiento de 10 a 90%.

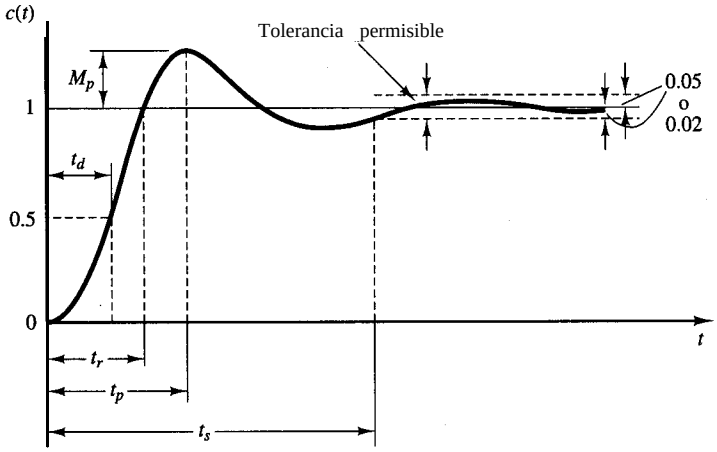


Figura 4-11
Curva de respuesta escalón unitario en la que se muestran t_d, t_r, t_p, M_p y t_s.

3. Tiempo pico, t_p: el tiempo pico es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico del sobrepaso.
4. Sobrepaso máximo (porcentaje), M_p: el sobrepaso máximo es el valor pico máximo de la curva de respuesta, medido a partir de la unidad. Si el valor final en estado estable de la respuesta es diferente de la unidad, es común usar el porcentaje de sobrepaso máximo. Se define mediante

$$\text{Porcentaje de sobrepaso máximo} = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

La cantidad de sobrepaso máximo (en porcentaje) indica de manera directa la estabilidad relativa del sistema.

5. Tiempo de asentamiento, t_s: el tiempo de asentamiento es el tiempo que se requiere para que la curva de respuesta alcance un rango alrededor del valor final del tamaño especificado por el porcentaje absoluto del valor final (por lo general, de 2 a 5%) y permanezca dentro de él. El tiempo de asentamiento se relaciona con la mayor constante de tiempo del sistema de control. Los objetivos del diseño del sistema en cuestión determinan cuál criterio de error en porcentaje usar.

Las especificaciones en el dominio del tiempo que se proporcionaron son muy importantes, dado que casi todos los sistemas de control son sistemas en el dominio del tiempo; es decir, deben presentar respuestas de tiempo aceptables. (Esto significa que el sistema de control debe modificarse hasta que la respuesta transitoria sea satisfactoria.) Observe que, si especificamos los valores de t_d, t_r, t_p, t_s y M_p, la forma de la curva de respuesta queda prácticamente determinada. Esto se aprecia con claridad en la figura 4-12.

Observe que todas estas especificaciones no necesariamente se aplican a cualquier caso determinado. Por ejemplo, para un sistema sobreamortiguado no se aplican los términos tiempo pico y sobrepaso máximo. (En los sistemas que producen errores en estado estable para entradas escalón, este error debe conservarse dentro de un nivel de porcentaje especificado. En la sección 5-10 se incluyen análisis detallados de los errores en estado estable.)

Algunos comentarios sobre las especificaciones de la respuesta transitoria. Excepto para ciertas aplicaciones en las que no se pueden tolerar oscilaciones, es conve-

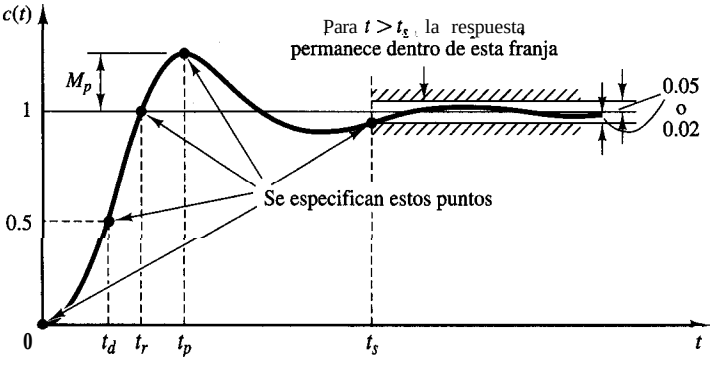


Figura 4–12
Especificaciones de la respuesta transitoria.

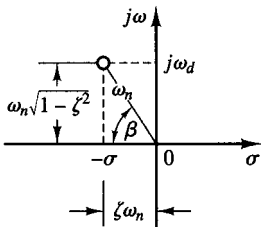


Figura 4-13
Definición del ángulo β.

niente que la respuesta transitoria sea suficientemente rápida y amortiguada. Por tanto, para una respuesta transitoria conveniente de un sistema de segundo orden, el factor de amortiguamiento relativo debe estar entre 0.4 y 0.8. Valores pequeños de $\zeta(\zeta < 0.4)$ producen un valor de sobrepaso excesivo en la respuesta transitoria, y un sistema con un valor grande de $\zeta(\zeta > 0.8)$ responden con lentitud.

Más adelante veremos el conflicto entre el sobrepaso máximo y el tiempo de levantamiento. En otras palabras, tanto el sobrepaso máximo como el tiempo de levantamiento no pueden hacerse más pequeños en forma simultánea. Si uno de ellos se reduce, el otro necesariamente aumenta.

Sistemas de segundo orden y especificaciones de la respuesta transitoria. A continuación, obtendremos el tiempo de levantamiento, el tiempo pico, el sobrepaso máximo y el tiempo de asentamiento del sistema de segundo orden obtenido mediante la ecuación (4–19). Estos valores se obtendrán en términos de ζ y ω_n. Se supone que el sistema está subamortiguado.

Tiempo de levantamiento t_r: remitiéndonos a la ecuación (4–21), obtenemos el tiempo de levantamiento t_r, suponiendo que $c(t_r) = 1$, o que

$$c(t_r) = 1 = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_r}\left(\cos\ \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\ \text{sen}\ \omega_d t_r\right) \qquad \textbf{(4-27)}$$

Dado que $e^{-\zeta\omega_n t_r} \neq 0$, obtenemos la ecuación siguiente a partir de la ecuación (4-27):

$$\cos\ \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\ \text{sen}\ \omega_d t_r = 0$$

o bien

$$\tan\ \omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = -\frac{\omega_d}{\sigma}$$

Por tanto, el tiempo de levantamiento t_r es

$$t_r = \frac{1}{\omega_d}\tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{-\sigma}\right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \qquad \textbf{(4-28)}$$

en donde β se define en la figura 4–13. Es evidente que para un valor pequeño de t_r, ω_d debe ser grande.

Tiempo pico t_p: remitiéndonos a la ecuación (4–21), obtenemos el tiempo pico diferenciando $c(t)$ con respecto al tiempo y suponiendo que esta derivada es igual a cero. Por tanto,

$$\frac{dc}{dt} = \zeta e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\ \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\ \text{sen}\ \omega_d t\right)$$
$$+ e^{-\zeta\omega_n t}\left(\omega_d\ \text{sen}\ \omega_d t + \frac{\zeta\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos\ \omega_d t\right)$$

Los términos de coseno de esta última ecuación se cancelan uno al otro *y cdldt,* evaluada en $t = t_p$, se simplifica a

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=t_p} = (\text{sen}\ \omega_d t_p)\ \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\ e^{-\zeta\omega_n t_p} = 0$$

Esta última ecuación da lugar a la ecuación siguiente:

$$\text{sen}\ \omega_d t_p = 0$$

o bien,

$$\omega_d t_p = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots$$

Dado que el tiempo pico corresponde al primer pico sobrepaso máximo, $\omega_d t_p = \pi$. Por tanto,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \tag{4–29}$$

El tiempo pico t_p corresponde a medio ciclo de la frecuencia de oscilación amortiguada.

Sobrepaso máximo M_p: el sobrepaso se presenta en el tiempo pico o en $t = t_p = \pi/\omega_d$. Por tanto, a partir de la ecuación (4–21), M_p se obtiene como

$$M_p = c(t_p) - 1$$
$$= e^{-\zeta\omega_n(\pi/\omega_d)}\left(\cos\ \pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\ \text{sen}\ \pi\right)$$
$$= e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} \tag{4-30}$$

El porcentaje de sobrepaso máximo es $e^{-(\sigma/\omega_d)\pi}$ X 100%.

Tiempo de asentamiento t_s: para un sistema subamortiguado de segundo orden, la respuesta transitoria se obtiene a partir de la ecuación (4–21),

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\ \text{sen}\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right), \qquad \text{para } t \geq 0$$

Las curvas $1 \pm (e^{-\zeta\omega_n t}/\sqrt{1-\zeta^2})$, son las curvas envolventes de la respuesta transitoria para una entrada escalón unitario. La curva de respuesta *c(t)* siempre permanece dentro de un par de curvas envolventes, como se aprecia en la figura 4-14. La constante de tiempo de estas curvas envolventes es $1/\zeta\omega_n$.

La velocidad de decaimiento de la respuesta transitoria depende del valor de la constante de tiempo $1/\zeta\omega_n$. Para un ω_n determinado, el tiempo de asentamiento t_s es una función del factor de amortiguamiento relativo ζ. A partir de la figura 4-10, observamos que, para el mismo ω_n y para un rango de ζ entre 0 y 1, el tiempo de asentamiento t_s para un sistema ligeramente amortiguado es más grande que para un sistema amortiguado de manera moderada. Para un sistema sobreamortiguado, el tiempo de asentamiento t_s se vuelve más grande debido al inicio lento de la respuesta.

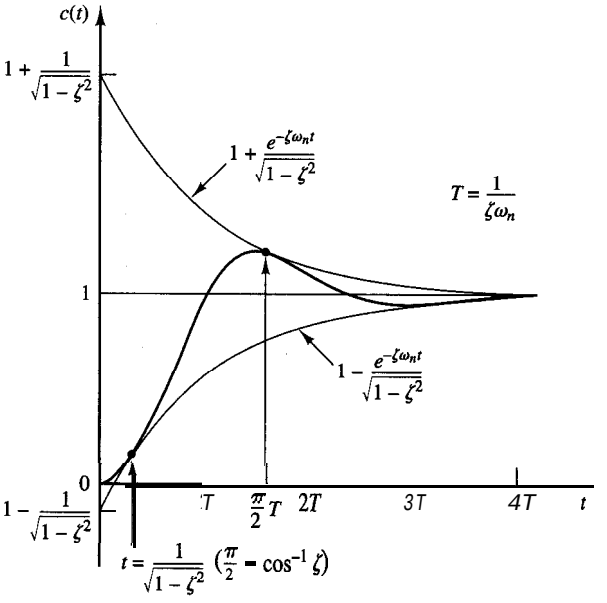


Figura 4–14
Par de curvas envolventes para la curva de respuesta escalón unitario del sistema que aparece en la figura 4-9.

El tiempo de asentamiento que corresponde a una banda de tolerancia de ± 2 o ± 5 % se mide en términos de la constante de tiempo $T = 1/\zeta\omega_n$ a partir de las curvas de la figura 4-10 para diferentes valores de ζ. Los resultados se muestran en la figura 4-15. Para $0 < \zeta < 0.9$, si se usa el criterio del 2%, t_s es aproximadamente cuatro veces la constante de tiempo del sistema. Si se usa el criterio del 5%, t_s es aproximadamente tres veces la constante de tiempo. observe que el tiempo de asentamiento alcanza un valor mínimo alrededor de $\zeta = 0.76$ (para el criterio del 2%) o de $\zeta = 0.68$ (para el criterio del 5%) y después aumenta casi linealmente para valores grandes de ζ. Las discontinuidades en las curvas de la figura 4-15 surgen debido a que un cambio infinitesimal en el valor de ζ puede provocar un cambio finito en el tiempo de asentamiento.

Por conveniencia, cuando se comparan las respuestas de los sistemas, por lo general definimos el tiempo de asentamiento t_s como

$$t_s = 4T = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\zeta\omega_n} \qquad \text{(criterio del 2\%)} \qquad \textbf{(4-31)}$$

o bien

$$t_s = 3T = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\zeta\omega_n} \qquad \text{(criterio del 5\%)} \qquad \textbf{(4-32)}$$

Observe que el tiempo de asentamiento es inversamente proporcional al producto del factor de amortiguamiento relativo y la frecuencia natural no amortiguada del sistema. Dado que el valor de ζ se determina, por lo general, a partir de los requerimientos del sobrepaso máximo permisible, el tiempo de asentamiento se determina principalmente mediante la frecuencia natural no amortiguada ω_n. Esto significa que la duración del transitorio puede variarse, sin modificar el sobrepaso máximo, ajustando la frecuencia natural no amortiguada ω_n.

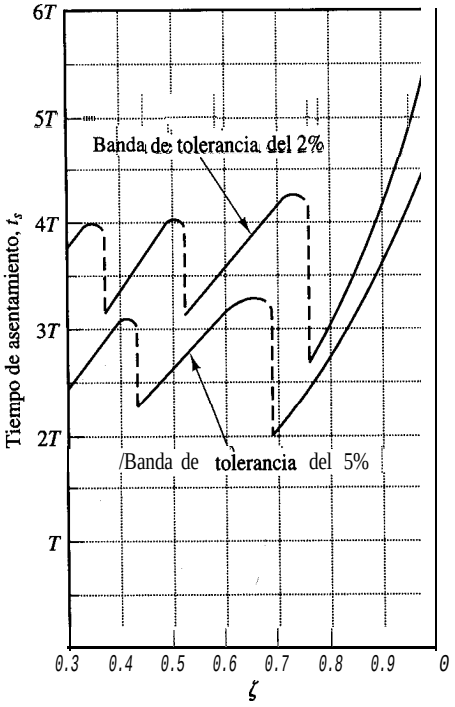


Figura 4–15
Curvas de tiempo de asentamiento t_s contra ζ.

A partir del análisis anterior, es evidente que, para una respuesta rápida, ω_n debe ser grande. Para limitar el sobrepaso máximo M_p, y para reducir el tiempo de asentamiento, el factor de amortiguamiento relativo ζ no debe ser demasiado pequeño. La relación entre el sobrepaso en porcentaje M_p y el factor de amortiguamiento relativo ζ se presenta en la figura 4-16. Observe que, si el factor de amortiguamiento relativo está entre 0.4 y 0.8, el porcentaje de sobrepaso máximo para la respuesta escalón está entre 25 y 2.5%.

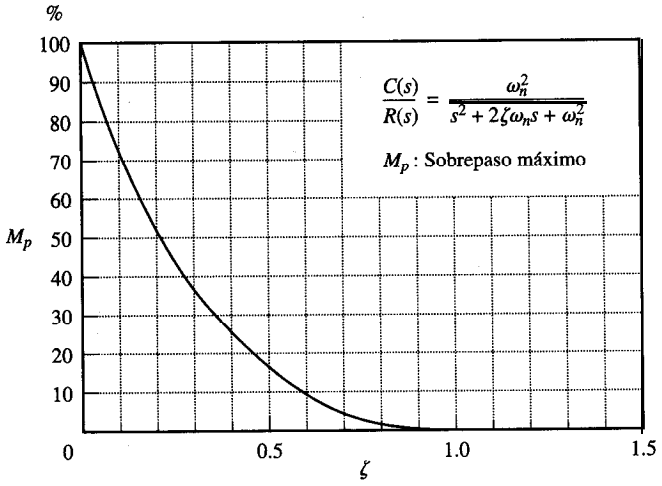


Figura 4–16
Curva de M_p contra ζ.

EJEMPLO 4-2 Considere el sistema de la figura 4-9, en el que $\zeta = 0.6$ y $\omega_n = 5$ rad/seg. Obtengamos el tiempo de levantamiento t_r, el tiempo pico t_p, el sobrepaso máximo M_p y el tiempo de asentamiento t_s cuando el sistema está sujeto a una entrada escalón unitario.

A partir de los valores dados de ζ y ω_n, obtenemos $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 4$ y $\sigma = \zeta\omega_n = 3$.

Tiempo de levantamiento t_r: el tiempo de levantamiento es

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{3.14 - \beta}{4}$$

en donde β se obtiene mediante

$$\beta = \tan^{-1} \frac{\omega_d}{\sigma} = \tan^{-1} \frac{4}{3} = 0.93 \text{ rad}$$

Por tanto, el tiempo de levantamiento t_r es

$$t_r = \frac{3.14 - 0.93}{4} = 0.55 \text{ seg}$$

Tiempo pico t_p: el tiempo pico es

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3.14}{4} = 0.785 \text{ seg}$$

Sobrepaso máximo M_p: el sobrepaso máximo es

$$M_p = e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{-(3/4)\times 3.14} = 0.095$$

Por tanto, el porcentaje de sobrepaso máximo es 9.5%.

Tiempo de asentamiento t_s: para el criterio del 2%, el tiempo de asentamiento es

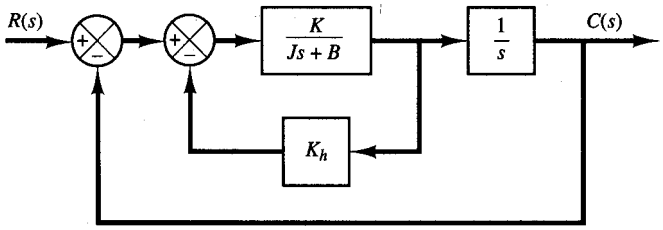
$$t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{3} = 1.33 \text{ seg}$$

Para el criterio del 5%,

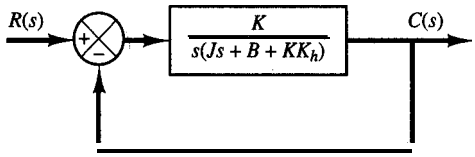
$$t_s = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{3} = 1 \text{ seg}$$

Sistema de seguimiento con realimentación de velocidad. La derivada de la señal de salida se usa para mejorar el desempeño del sistema. Al obtener la derivada de la señal de posición de salida es conveniente usar un tacómetro en lugar de diferenciar físicamente la señal de salida. (Observe que la diferenciación amplifica los efectos del ruido. De hecho, si existen ruidos discontinuos, la diferenciación amplifica éstos más que la señal útil. Por ejemplo, la salida de un potenciómetro es una señal de voltaje discontinua porque, conforme el cursor del potenciómetro se mueve sobre la bobina, se inducen voltajes en las vueltas de intercambio y, por tanto, se generan transitorios. Por tal razón, a la salida del potenciómetro no debe seguirle un elemento de diferenciación.)

Considere el sistema de seguimiento de la figura 4–17(a). En este aparato se realimenta la señal de velocidad a la entrada, junto con la señal de posición, para producir una señal de error. En cualquier sistema de seguimiento, tal señal de velocidad se genera con facili-



(a)



(b)

Figura 4-17
(a) Diagrama de bloques de un sistema de seguimiento; (b) diagrama de bloques simplificado.

dad mediante un tacómetro. El diagrama de bloques de la figura 4–17(a) se simplifica, tal como se aprecia en la figura 4-17 (b), y se obtiene

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + (B + KK_h)s + K} \qquad (4\text{-}33)$$

Comparando la ecuación (4-33) con la ecuación (4–17), observamos que la realimentación de velocidad tiene el efecto de aumentar el amortiguamiento. El factor de amortiguamiento relativo ζ se convierte en

$$\zeta = \frac{B + KK_h}{2\sqrt{KJ}} \qquad (4\text{-}34)$$

La frecuencia natural no amortiguada $\omega_n = \sqrt{K/J}$ no se ve afectada por la realimentación de velocidad. Considerando que el sobrepaso máximo para una entrada escalón unitario se controla manejando el valor del factor de amortiguamiento relativo ζ, reducimos el sobrepaso máximo ajustando la constante de realimentación de velocidad K_h para que ζ esté entre 0.4 y 0.7.

Recuerde que la realimentación de velocidad tiene el efecto de aumentar el factor de amortiguamiento relativo sin afectar la frecuencia natural no amortiguada del sistema.

EJEMPLO 4-3

Para el sistema de la figura 4–17(a), determine los valores de la ganancia K y la constante de realimentación de velocidad K_h para que el sobrepaso máximo en la respuesta escalón unitario sea 0.2 y el tiempo pico sea 1 seg. Con estos valores de K y K_h, obtenga el tiempo de levantamiento y el tiempo de asentamiento. Suponga que $J = 1$ kg-m^2 y que $B = 1$ N-m/rad/seg.

Determinación de los valores de K y K_h: el sobrepaso máximo M_p se obtiene mediante la ecuación (4-30) como

$$M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}$$

Este valor debe ser 0.2. Por tanto,

$$e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} = 0.2$$

0 bien

$$\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.61$$

lo cual nos lleva a

$$\zeta = 0.456$$

El tiempo pico t_p se especifica como 1 seg; por tanto, a partir de la ecuación (4–29),

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 1$$

0 bien

$$\omega_d = 3.14$$

Dado que ζ es 0.456, ω_n es

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 3.53$$

Dado que la frecuencia natural ω_n es igual a $\sqrt{K/J}$,

$$K = J\omega_n^2 = \omega_n^2 = 12.5 \text{ N-m}$$

por tanto, a partir de la ecuación (4–34), K_h es

$$K_h = \frac{2\sqrt{KJ}\zeta - B}{K} = \frac{2\sqrt{K}\zeta - 1}{K} = 0.178 \text{ seg}$$

Tiempo de levantamiento t_r: a partir de la ecuación (4–28), el tiempo de levantamiento t_r es

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

en donde

$$\beta = \tan^{-1}\frac{\omega_d}{\sigma} = \tan\text{-}' 1.95 = 1.10$$

Por tanto, t_r es

$$t_r = 0.65 \text{ seg}$$

Tiempo de asentamiento t_s: para el criterio del 2%,

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 2.48 \text{ seg}$$

Para el criterio del 5 % ,

$$t_s = \frac{3}{\sigma} = 1.86 \text{ seg}$$

Respuesta impulso de sistemas de segundo orden. Para una entrada impulso unitario $r(t)$, la transformada de Laplace correspondiente es la unidad, o $R(s) = 1$. La respuesta impulso unitario $C(s)$ del sistema de segundo orden de la figura 4-9 es

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

La transformada inversa de Laplace de esta ecuación da la solución en el tiempo para la respuesta c(t), del modo siguiente:

Para $0 \leq \zeta < 1$,

$$c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen} \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}\, t, \quad \text{para } t \geq 0 \tag{4-35}$$

para $\zeta = 1$,

$$C(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}, \quad \text{para } t \geq 0 \tag{4-36}$$

para $\zeta > 1$,

$$c(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}, \quad \text{para } t \geq 0 \tag{4-37}$$

Observe que, sin tomar la transformada inversa de Laplace de C(s), también se obtiene el tiempo de respuesta *c(t)* diferenciando la respuesta escalón unitario correspondiente, dado que la función impulso unitario es la derivada con respecto al tiempo de la función de escalón unitario. En la figura 4-18 aparece una familia de curvas de respuesta impulso unitario obtenida mediante las ecuaciones (4-35) y (4-36) con diversos valores de ζ. Las curvas $c(t)/\omega_n$ se grafican contra la variable adimensional $\omega_n t$ y, por tanto, sólo son funciones de ζ. Para los casos críticamente amortiguado y sobreamortiguado, la respuesta impulso unitario siempre es positiva o cero; es decir, $c(t) \geq 0$. Esto se aprecia en las ecuaciones (4-36) y (4-37). Para el caso subamortiguado, la respuesta impulso unitario *c(t)* oscila alrededor de cero y toma valores tanto positivos como negativos.

A partir del análisis anterior, concluimos que si la respuesta impulso *c(t)* no cambia de signo, el sistema es críticamente amortiguado o sobreamortiguado, en cuyo caso la res-

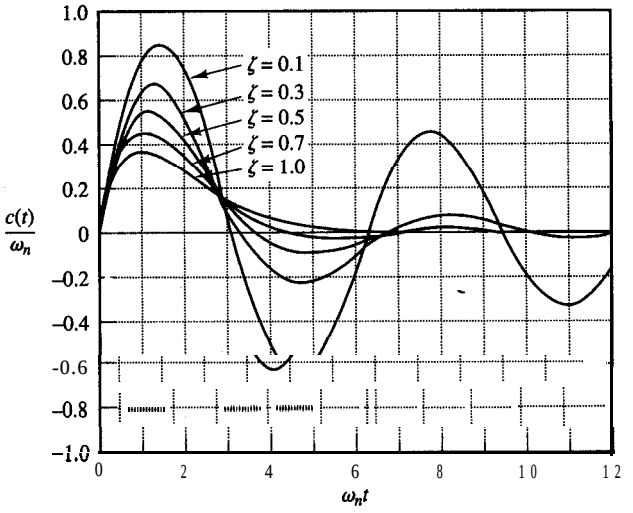


Figura 4–18
Curvas de respuesta impulso unitario del sistema de la figura 4-9.

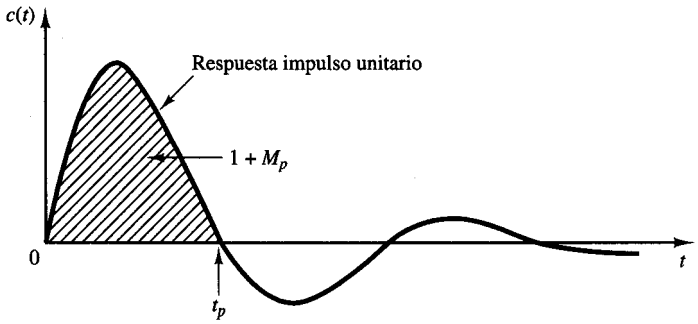


Figura 4-19
Curva de respuesta impulso unitario del sistema de la figura 4-9.

puesta escalón correspondiente no se sobrepasa pero aumenta o disminuye en forma monotónica y tiende a un valor constante.

El sobrepaso máximo para la respuesta impulso unitario del sistema subamortiguado ocurre en

$$t = \frac{\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}, \qquad \text{donde } 0 < \zeta < 1$$

y el sobrepaso máximo es:

$$c(t)_{\text{máx}} = \omega_n \exp\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right), \qquad \text{donde } 0 < \zeta < 1$$

Dado que la respuesta impulso unitario es la derivada con respecto al tiempo de la función de respuesta escalón unitario, el sobrepaso máximo M_p para la respuesta escalón unitario se encuentra a partir de la respuesta impulso unitario correspondiente. Es decir, el área bajo la curva de respuesta impulso unitario desde $t = 0$ hasta el tiempo del primer cero, tal como aparece en la figura 4-19, es $1 + M_p$, en donde M_p es el sobrepaso máximo (para la respuesta escalón unitario) obtenido mediante la ecuación (4-30). El tiempo pico t_p (para la respuesta escalón unitario) obtenido mediante la ecuación (4-29) corresponde al tiempo en que la respuesta impulso unitario cruza primero el eje de tiempo.

4-4 ANÁLISIS DE IA RESPUESTA TRANSITORIA CON MATLAB

Introducción. En esta sección presentaremos el enfoque computacional para el análisis de la respuesta transitoria con MATLAB. Los lectores que no estén familiarizados con MATLAB deben leer el apéndice antes de estudiar esta sección.

Como se mencionó antes en este capítulo, con frecuencia se usan respuestas transitorias (tales como las escalón, impulso y rampa) para investigar lascaracterísticas en el dominio del tiempo de los sistemas de control.

Representación de sistemas lineales en MATLAB. La función de transferencia de un sistema se representa mediante dos arreglos de números. Considere el sistema

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{25}{s^2 + 4s + 25} \tag{4-38}$$

Este sistema se representa como dos arreglos, cada uno de los cuales contiene los coeficientes de los polinomios en potencias decrecientes de s del modo siguiente:

```
num = [0 0 25]
den = [1 4 25]
```

Observe que, donde es necesario, se rellena con ceros.

Si se conocen num y den (el numerador y el denominador de la función de transferencia en lazo cerrado), los comandos tales como

```
step(num,den),        step(num,den,t)
```

generarán gráficas de respuestas escalón unitario. (En el comando step, t es el tiempo especificado por el usuario.)

Para un sistema de control definido en el espacio de estados, en donde se conocen la matriz de estado A, la matriz de control B, la matriz de salida C, y la matriz de transmisión directa D de las ecuaciones en el espacio de estados, el comando

```
step(A,B,C,D)
```

generará gráficas de respuestas escalón unitario. El vector de tiempo queda determinado automáticamente cuando no se incluye de manera explícita en los comandos step.

Observe que, cuando los comandos step tienen argumentos en el lado izquierdo, como en

```
[y,x,t] = step(num,den,t)
[y,x,t] = step(A,B,C,D,iu)
[y,x,t] = step(A,B,C,D,iu,t)                    (4-39)
```

no aparece una gráfica en la pantalla. Por tanto, es necesario usar un comando plot (graficar) para ver las curvas de respuesta. Las matrices y y x contienen la salida y la respuesta del estado del sistema, respectivamente, evaluadas en los puntos de tiempo de cálculo t. (y tiene tantas columnas como salidas y un renglón para cada elemento en t. x tiene tantas columnas como estados y un renglón para cada elemento en t.)

Observe, en la ecuación (4–39), que la iu escalar es un índice dentro de las entradas del sistema y especifica cuál entrada se va a usar para la respuesta y t es el tiempo especificado por el usuario. Si el sistema contiene múltiples entradas y salidas, el comando step tal como aparece en la ecuación (4–39), produce una serie de gráficas de respuestas escalón, una para cada combinación de entrada y salida de

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

(Véanse los detalles en el ejemplo 44.)

Obtención de la respuesta escalón unitario del sistema de función de transferencia. Consideremos la respuesta escalón unitario del sistema obtenido mediante la ecuación (4-38). El programa MATLAB 4-1 producirá una gráfica de la respuesta escalón unitario de este sistema. La figura 4-20 muestra una gráfica de la curva de respuesta escalón unitario.

Programa MATLAB 4–1

```
% ----------Respuesta escalón unitario----------

% ***** Introduzca el numerador y el denominador de la
% función de transferencia *****

num = [0    0    25];
den = [1    4    25];

% ***** Introduzca el siguiente comando de respuesta escalón *****

step(num,den)

% ***** Introduzca la retícula y el título de la gráfica *****

grid
title ('Respuesta escalón unitario de G(s) = 25/(s^2 + 4s + 25)')
```

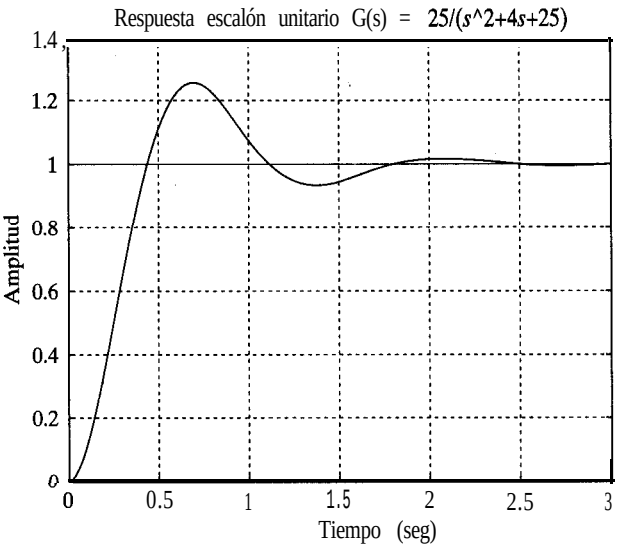


Figura 4-20
Curva de respuesta escalón unitario.

EJEMPLO 4 - 4

Considere el sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Obtenga las curvas de respuesta escalón unitario.

Aunque no es necesario obtener la expresión de la función de transferencia para el sistema, a fin de conseguir las curvas de respuesta escalón unitario con MATLAB, obtendremos tal expresión como referencia. Para el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

la matriz de transferencia G(s) es aquella que relaciona Y(s) y U(s) del modo siguiente:

$$Y(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s)$$

Tomando la transformada de Laplace de las ecuaciones en el espacio de estados, obtenemos

$$s\mathbf{X}(s) - x(O) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + BU(s) \tag{4-40}$$

$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \tag{4-41}$$

Al obtener la matriz de transferencia suponemos que x(O) = 0. Después, a partir de la ecuación (4–40), obtenemos

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - A)\text{-}'BU(s) \tag{4-42}$$

Sustituyendo la ecuación (4–42) en la ecuación (4–41), obtenemos

$$Y(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s)$$

Por tanto, la matriz de transferencia G(s) se obtiene mediante

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D$$

La matriz de transferencia G(s) para el sistema determinado se convierte en

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - A)\text{-}'B \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -6.5 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + s + 6.5} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6.5 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + s + 6.5} \begin{bmatrix} s-1 & s \\ s+7.5 & 6.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s-1}{s^2+s+6.5} & \dfrac{s}{s^2+s+6.5} \\ \dfrac{s+7.5}{s^2+s+6.5} & \dfrac{6.5}{s^2+s+6.5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

Dado que el sistema contiene dos entradas y dos salidas, se definen cuatro funciones de transferencia, dependiendo de cuáles señales se consideran como entrada y cuáles como salida. Observe que, cuando se considera la señal u_1 como la entrada, suponemos que la señal u_2 es cero, y viceversa. Las cuatro funciones de transferencia son

$$\frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = \frac{s - 1}{s^2 + s + 6.5}, \qquad \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = \frac{s + 7.5}{s^2 + s + 6.5}$$

$$\frac{Y_1(s)}{U_2(s)} = \frac{s}{s^2 + s + 6.5}, \qquad \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} = \frac{6.5}{s^2 + s + 6.5}$$

Las cuatro curvas de respuesta escalón individuales se grafican mediante el comando

step(A,B,C,D)

El programa MATLAB 4-2 produce cuatro curvas de respuesta escalón. Las curvas se muestran en la figura 4-21.

Programa MATLAB 4-2

```
A = [-1   -1;6.5   0];
B = [1   1;1   0];
C = [1   0;0   1];
D = [0   0;0   0];
step(A,B,C,D)
```

Para graficar dos curvas de respuesta escalón para la entrada u_1 en un diagrama, y dos curvas de respuesta escalón para la entrada u_2 en otro diagrama, usamos los comandos

```
step(A,B,C,D,1)
```

```
step(A,B,C,D,2)
```

respectivamente. El programa MATLAB 4-3 es un programa para graficar dos curvas de respuesta escalón para la entrada u_1 en un diagrama y dos curvas de respuesta escalón para la entrada u_2 en otro diagrama. La figura 4-22 muestra los dos diagramas, cada uno formado por dos curvas de respuesta escalón.

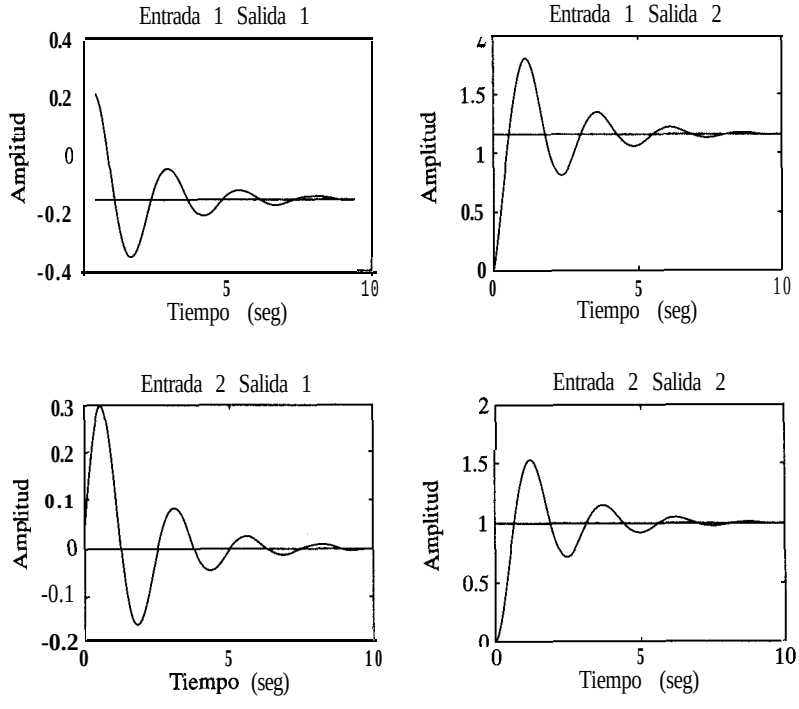


Figura 4-21
Curvas de respuestas escalón unitario.

Programa MATLAB 4–3

```
% --------Curvas de respuesta escalón para un sistema definido
% en el espacio del estado ---------

% ***** En este programa se grafican las curvas de respuesta escalón de un sistema
% que tiene dos entradas (u1 y u2) y dos salidas (y1 y y2) *****

% ***** Primero se grafican las curvas de respuesta escalón cuando la entrada es
% u1. Después se grafican las curvas de respuesta escalón cuando la entrada es
% u2 *****

%***** Introducir las matrices A, B, C y D *****

A = [-1   -1;6.5   0];
B = [1   1;1   0];
C = [1   0;0   1];
D = [0   0;0   0];

% ***** Para graficar las curvas de respuesta escalón cuando la entrada
% es u1, introduzca el comando 'step(A,B,C,D,1)' *****

step(A,B,C,D,1)
grid
title ('Gráficas de respuesta escalón: Entrada = u1 (u2 = 0)')
text(3.4,-0.06,'Y1')
text(3.4,1.4,'Y2')

%***** Después, se grafican las curvas de respuesta escalón cuando la
% entrada es u2. Introduzca el comando step(A,B,C,D,2);

step(A,B,C,D,2);
grid
title('Gráficas de respuesta escalón: Entrada = u2 (u1 = 0)')
text(3,0.14,'Y1')
text(2.8,1.1,'Y2')
```

Escritura de texto en la pantalla de las gráficas. Para escribir texto en la pantalla de las gráficas, introduzca por ejemplo, los enunciados siguientes:

```
text(3.4, −0.06,'Y 1')
```

Y

```
text(3.4,1.4,'Y2')
```

El primer enunciado le indica a la computadora que escriba **'Y1'**, empezando en las coordenadas x = 3.4, y = -0.06. De modo similar, el segundo enunciado le indica a la computadora que escriba **'Y2'**, empezando en las coordenadas x = 3.4, y = 1.4. [Véanse el programa MATLAB 4-3 y la figura 4–22(a).]

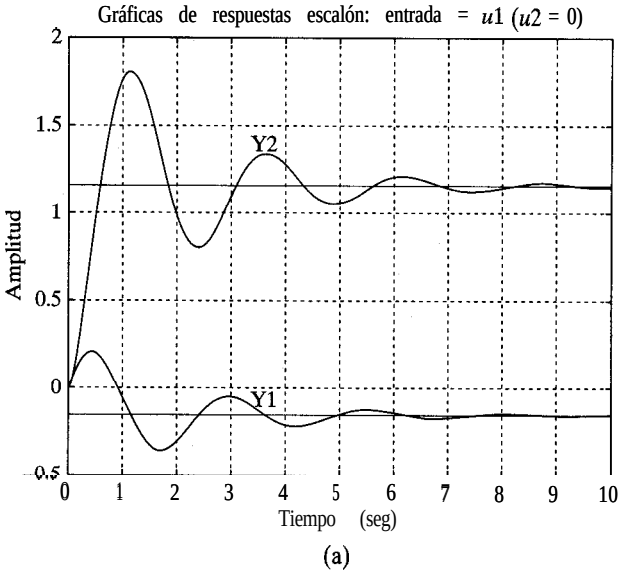


Figura 4-22
Curvas de respuesta escalón unitario; (a) u_1 es la entrada ($u_2 = 0$); (b) u_2 es la entrada ($u_1 = 0$).

Respuesta impulso. **La** respuesta impulso unitario de un sistema de control se obtiene mediante alguno de los siguientes comandos de MATLAB:

```
impulse(num,den)
impulse(A,B,C,D)
[y,x,t] = impulse (num,den)
[y,x,t] = impulse(num,den,t)
```
(4-43)

```
[y,x,t] = impulse(A,B,C,D)
[y,x,t] = impulse(A,B,C,D,iu)                    (4-44)
[y,x,t] = impulse(A,B,C,D,iu,t)                  (4-45)
```

El comando "impulse(num,den)" grafica la respuesta impulso unitario en la pantalla. El comando "impulse(A,B,C,D)" produce una serie de gráficas de respuesta impulso unitario, una para cada combinación de entrada y salida del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

con el vector de tiempo determinado automáticamente. Observe que, en las ecuaciones (4-44) y (4-45), la iu escalar es un índice dentro de las entradas del sistema y especifica cuál entrada se va a usar para la respuesta impulso.

También observe que, en las ecuaciones (4-43) y (4-45), t es el vector de tiempo proporcionado por el usuario. El vector t especifica los tiempos en los cuales se va a calcular la respuesta impulso.

Si se invoca MATLAB con el argumento en el lado izquierdo [y,x,t], como en el caso de [y,x,t] = impulse(A,B,C,D), el comando retorna las respuestas de salida y del estado del sistema y el vector de tiempo t. No se dibuja una gráfica en la pantalla. Las matrices y y x contienen las respuestas de salida y del estado del sistema evaluadas en los puntos de tiempo t. (y tiene tantas columnas como salidas y un renglón para cada elemento en t. x tiene tantas columnas como variables de estado y un renglón para cada elemento en t.)

EJEMPLO 4-5 Obtenga la respuesta impulso unitario del sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]u$$

El programa **MATLAB 4-4** es una de las posibilidades. La curva de respuesta resultante aparece en la figura 4-23.

Programa MATLAB 4–4

```
A = [0   1;-1   -1];
B = [0;1];
C = [1   0];
D = [0];
impulse(A,B,C,D);
grid;
title('Respuesta impulso unitario')
```

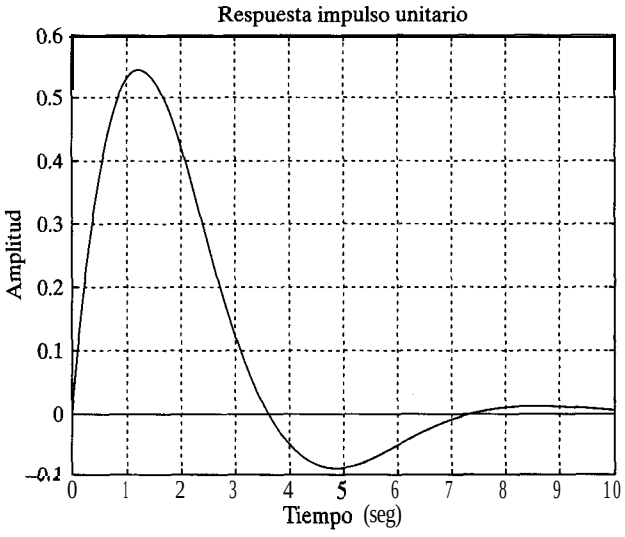


Figura 4-23
Curva de respuesta impulso unitario.

EJEMPLO 4-6 Obtenga la respuesta impulso unitario del sistema siguiente:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1}$$

El programa MATLAB 4-5 producirá la respuesta impulso unitario. La gráfica resultante aparece en la figura 4-24.

Programa MATLAB 4-5

```
num = [0  0  1];
den = [1  0.2  1];
impulse(num,den);
grid
title('Respuesta impulso unitario de G(s) = 1/(s^2 + 0.2s + 1)')
```

Enfoque alternativo para obtener la respuesta impulso. Observe que, cuando las condiciones iniciales son cero, la respuesta impulso unitario de G(s) es igual a la respuesta escalón unitario de $sG(s)$.

Considere la respuesta impulso unitario del sistema del ejemplo 4-6. Dado que $R(s) = 1$ para la entrada impulso unitario, tenemos que

$$\frac{C(s)}{R(s)} = C(s) = G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1}$$

$$= \frac{s}{s^2 + 0.2s + 1}\frac{1}{s}$$

Por tanto, convertimos la respuesta impulso unitario de G(s) en la respuesta impulso unitario de $sG(s)$.

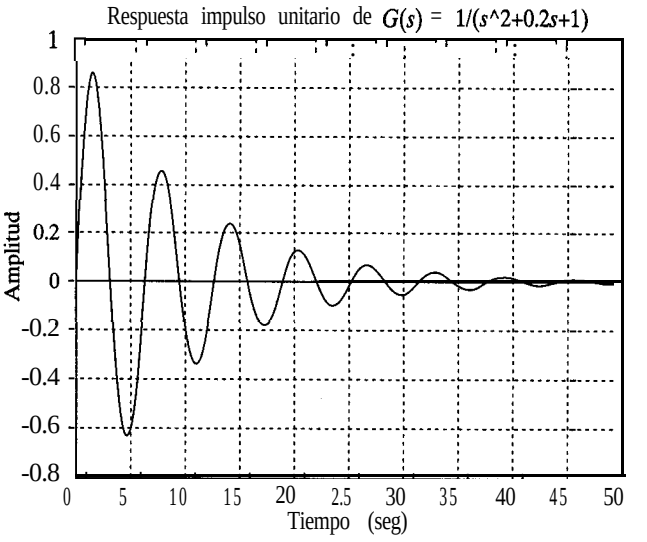


Figura **4–24**
Curva de respuesta impulso unitario.

Si introducimos los siguientes num y den en MATLAB,

```
num = [0 1 0]
den = [1 0.2 1]
```

y usamos el comando de respuesta unitaria, como se incluye en el programa MATLAB 4-6, obtenemos una gráfica de la respuesta impulso unitario del sistema que aparece en la figura 4-25.

Programa MATLAB 4-6

```
num = [0 1 0];
den = [1 0.2 1];
step(num,den);
grid;
title('Respuesta escalón unitario de sC(s) = s/(s^2 + 0.2s + 1)')
```

Observe en la figura 4-25 (y en muchas otras) que las etiquetas del eje x y el eje y se determinan automáticamente. Si pretende etiquetar en forma distinta los ejes x y y, es necesario modificar el comando step. Por ejemplo, si se pretende etiquetar el eje x como 't seg' y el eje y como 'Entrada y Salida', use los comandos de respuesta escalón con argumentos del lado izquierdo, tal como

```
c = step(num,den,t)
```

0, en forma más general,

```
[y,x,t] = step(num,den,t)
```

Véase el programa MATLAB 4-7.

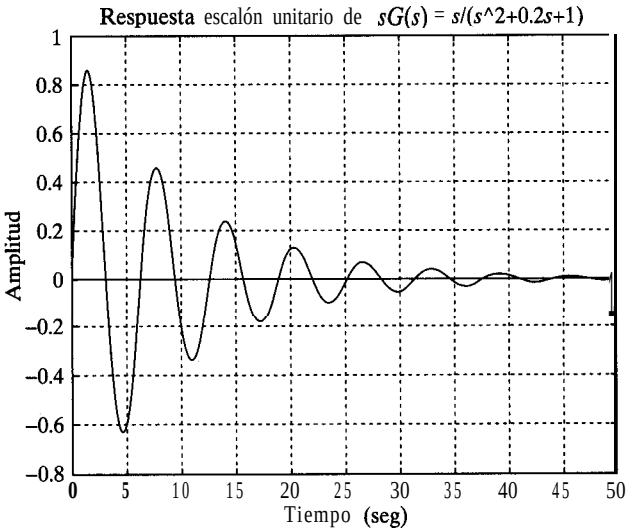


Figura 4-25
Curva de respuesta impulso unitario obtenida como la respuesta impulso unitario de $sG(s) = s/(s^2 + 0.2s + 1)$.

Programa MATLAB 4–7

```
% --------- Respuesta rampa unitaria ---------

% ***** La respuesta rampa unitaria se obtiene como la respuesta
% escalón unitario de G(s)/s *****

% ***** Introduzca el numerador y el denominador de G(s)/s *****

num = [0   0   0   1];
den = [1   1   1   0];

% ***** Especifique los puntos de tiempo de cálculo (t = 0:0.1:7)
% y después introduzca el comando de la respuesta escalón: c =
step(num,den,t) *****

t = 0:0.1:7;
c = step(num,den,t);

% ***** Al graficar la curva de respuesta rampa, agregue la entrada
% de referencia a la gráfica. La entrada de referencia es t. Añada el
% argumento al comando plot con lo siguiente: t,t,'-'. Por tanto, el
% comando plot se convierte en: plot(t,c,'o',t,t,'-') *****

plot(t,c,'o',t,t,'-')

% ***** Agregue la retícula, el título, la etiqueta de x y el rótulo de y *****

grid
title('Curva de respuesta rampa unitaria para el sistema
G(s) = 1/(s^2 + s + 1)')
xlabel('t Seg')
ylabel('Entrada y Salida')
```

Respuesta rampa. No hay un comando rampa de MATLAB. Por tanto, necesitamos usar el comando `step` para obtener la respuesta rampa. Específicamente,para obtener la respuesta rampa del sistema con función de transferencia G(s), divida G(s) entre s y use el comando de respuesta escalón. Por ejemplo, considere el sistema en lazo cerrado

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Para una entrada rampa unitaria, $R(s) = 1/(s^2)$; por tanto,

$$C(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}\frac{1}{s^2} = \frac{1}{(s^2 + s + 1)s}\frac{1}{s}$$

Para obtener la respuesta rampa unitaria de este sistema, introduzca el numerador y denominador siguientes en el programa MATLAB,

```
num = [0  0  0  ll;
den = [1  1  1  01;
```

y use el comando de respuesta escalón. Véase el programa MATLAB 4-7. La gráfica obtenida mediante este programa aparece en la figura 4-26.

Respuesta rampa unitaria de un sistema definido en el espacio de estados. A continuación, trataremos la respuesta rampa unitaria del sistema en el espacio de estados. Considere el sistema descrito mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$\mathbf{y} = Cx + Du$$

A continuación, consideraremos un ejemplo sencillo para explicar el método. Supongamos que

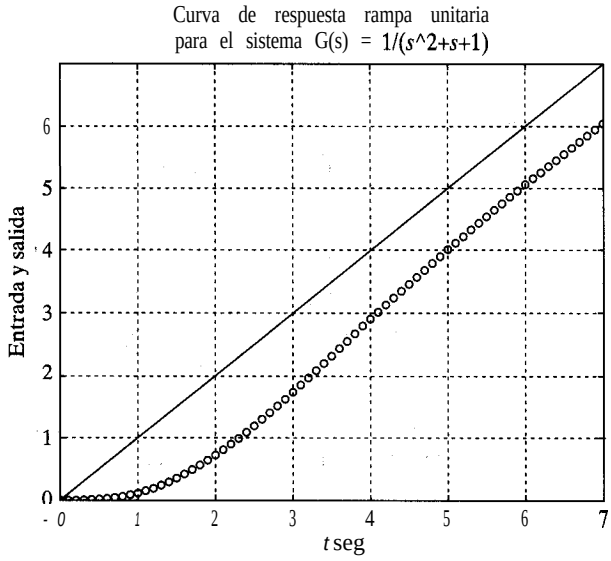


Figura 4-26
Curva de respuesta rampa unitaria.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{c} = [1 \quad 0], \qquad D = [0]$$

Cuando las condiciones iniciales son cero, la respuesta rampa unitaria es la integral de la respuesta escalón unitario. Por tanto, la respuesta rampa unitaria se obtiene mediante

$$z = \int_0^t y \, dt \tag{4-46}$$

A partir de la ecuación (4-46), obtenemos

$$\dot{z} = y = x_1 \tag{4-47}$$

Definamos

$$z = x_3$$

Entonces, la ecuación (4-47) se convierte en

$$\dot{x}_3 = x_1 \tag{4-48}$$

Combinando la ecuación (4-48) con la ecuación original en el espacio de estados, obtenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$z = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

que se escribe como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{AA}\mathbf{x} + \mathbf{BB}u$$

$$z = \mathbf{CC}\mathbf{x} + DDu$$

en donde

$$\mathbf{AA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \mathbf{C} & 0 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{BB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{B} \\ \hline 0 \end{array}\right], \qquad \mathrm{CC} = [0 \quad 0 \quad 1], \qquad DD = [0]$$

Observe que x_3 es el tercer elemento de x. Una gráfica de la curva de respuesta rampa unitaria z(t) se obtiene introduciendo el programa MATLAB 4-8 a la computadora. Una

Programa MATLAB 4-8

```
% ---------- Respuesta rampa unitaria ----------

% ***** La respuesta rampa unitaria se obtiene sumando una nueva
% variable de estado x3. La dimensión de la ecuación de estado
% aumenta en uno. *****

% ***** Introduzca las matrices A, B, C y D de la ecuación de estado
% y la ecuación de salida originales *****

A = [0   1;-1   -1];
B = [0;1];
C = [1   0];
D = [0];

% ***** Introduzca las matrices AA, BB, CC y DD de las nuevas
% ecuaciones de estado y de salida ampliadas *****

AA = [A   zeros(2,1);C   0];
BB = [B;0];
CC = [0   0   1];
DD = [0];

% ***** Introduzca el comando de respuesta escalón:
% [z,x,t] = step(AA,BB,CC,DD) *****

[z,x,t] = step(AA,BB,CC,DD);

% ***** Al graficar x3 sume la entrada rampa unitaria t en la gráfica
% introduciendo el comando siguiente: plot(t,x3,'o',t,t,'-') *****

x3 = [0   0   1]*x'; plot(t,x3,'o',t,t,'-')
grid
title('Respuesta rampa unitaria')
xlabel('t Seg')
ylabel('Entrada y Salida')
```

gráfica de la curva de respuesta rampa unitaria obtenida de este programa MATLAB aparece en la figura 4-27.

Respuesta a condiciones iniciales (enfoque de la función de transferencia). A continuación presentaremos, mediante un ejemplo, un método para obtener la respuesta a condiciones iniciales.

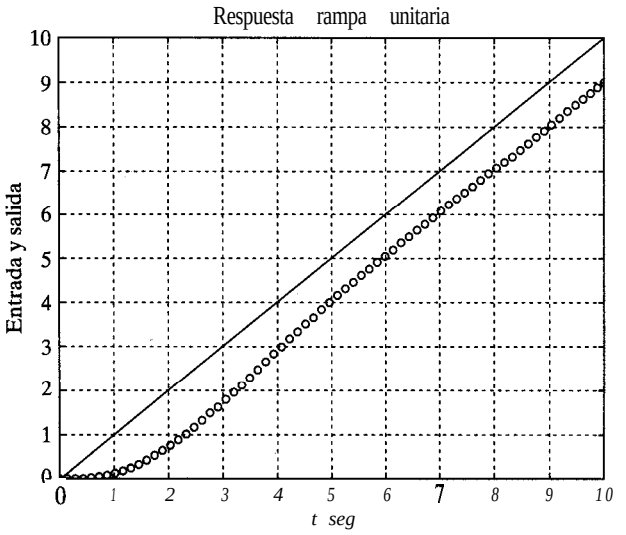


Figura 4-27
Curva de respuesta rampa unitaria.

EJEMPLO 4-7

En este ejemplo consideraremos un sistema sujeto sólo a condiciones iniciales.

Considere el sistema mecánico de la figura 4-28, en el que $m = 1$ kg, $b = 3$ N-seg/m y $k = 2$ N/m. Suponga que en $t = 0$ la masa m se jala hacia abajo, de modo que x(O) = 0.1 m y que X(O) = 0.05 m/seg. Obtenga el movimiento de la masa sujeto a las condiciones iniciales. (Suponga que no existe una función de excitación externa.)

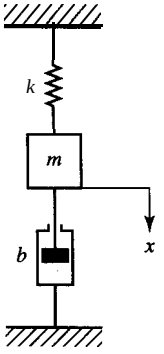


Figura 4-28
Sistema mecánico.

La ecuación del sistema es

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 0.1$ m y $\dot{x}(0) = 0.05$ m/seg. La transformada de Laplace de la ecuación del sistema da

$$m[s^2X(s) - sx(0) - X(O)] + b[sX(s) - x(O)] + kX(s) = 0$$

o bien

$$(ms^2 + bs + k)X(s) = mx(0)s + m\dot{x}(0) + bx(0)$$

Despejando $X(s)$ de esta ultima ecuación y sustituyendo los valores numéricos determinados, obtenemos

$$X(s) = \frac{mx(0)s + m\dot{x}(0) + bx(0)}{ms^2 + bs + k}$$

$$= \frac{0.1s + 0.35}{s^2 + 3s + 2}$$

Esta ecuación se escribe como

$$X(s) = \frac{0.1s^2 + 0.35s}{s^2 + 3s + 2}\frac{1}{s}$$

Por tanto, el movimiento de la masa m se obtiene como la respuesta escalón unitario del sistema siguiente:

$$G(s) = \frac{0.1s^2 + 0.35s}{s^2 + 3s + 2}$$

El programa MATLAB 4-9 proporciona una gráfica del movimiento de la masa. La gráfica aparece en la figura 4-29.

Programa MATLAB 4-9

```
% --------- Respuesta a condiciones iniciales ---------

% ***** La respuesta del sistema para las condiciones iniciales se
% convierte en una respuesta escalón unitario modificando el polinomio del nu-
merador *****

% ***** Introduzca el numerador y el denominador de la
% función de transferencia G(s) *****

num = [0.1   0.35   0];
den = [1   3   2];

% ***** Introduzca el siguiente comando de respuesta escalón *****

step(num,den)

% ***** Introduzca la retícula y el título de la gráfica *****

grid
title('Respuesta del sistema masa-resorte-amortiguador a condiciones iniciales')
```

Respuesta a condiciones iniciales (enfoque en el espacio de estados, caso 1). Considere el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{4-49}$$

Obtengamos la respuesta x(t) cuando se especifica la condición inicial x(O). (Ninguna función de entrada externa actúa sobre este sistema.) Suponga que x es un vector de dimensión n.

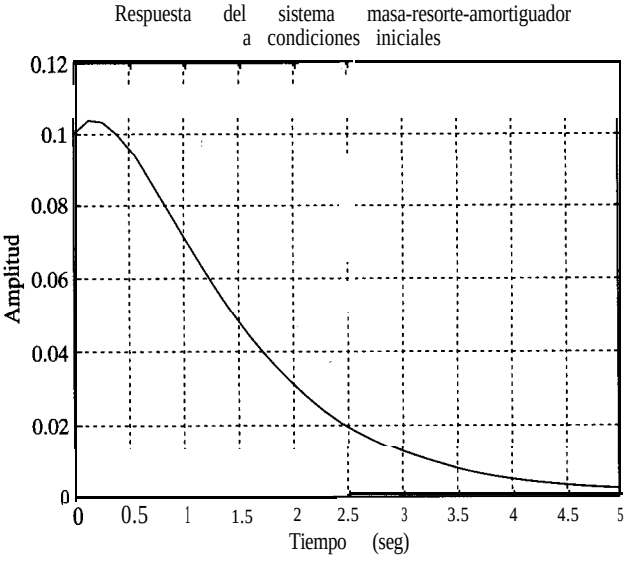


Figura 4-29
Respuesta del sistema mecánico considerado en el ejemplo 47.

Primero, tome las transformadas de Laplace de ambos miembros de la ecuación (4-49).

$$s\mathbf{X}(s) - x(O) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)$$

Esta ecuación puede reescribirse como

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{x}(0) \tag{4-50}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de la ecuación (4–50), obtenemos

$$\dot{\mathbf{x}} = Ax + \mathbf{x}(0)\,\delta(t) \tag{4-51}$$

(Observe que, tomando la transformada de Laplace de una ecuación diferencial y después la transformada inversa de Laplace de la ecuación transformada mediante el sistema de Laplace generamos una ecuación diferencial que contiene condiciones iniciales.)

Ahora definimos

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{x} \tag{4-52}$$

A continuación, la ecuación (4-51) se escribe como

$$\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{x}(0)\,\delta(t) \tag{4-53}$$

Integrando la ecuación (4-53) con respecto a t, obtenemos

$$\dot{\mathbf{z}} = Az + \mathbf{x}(0)1(t) = Az + Bu \tag{4-54}$$

en donde

$$B = x(O), \qquad u = l(t)$$

Remitiéndonos a la ecuación (4–52), el estado x(t) se obtiene mediante i(t). Por tanto,

$$\mathbf{x} = \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}u \tag{4-55}$$

La ecuación (4–55) proporciona la respuesta a las condiciones iniciales.

Resumiendo, la respuesta de la ecuación (4-49) para la condición inicial x(O) se obtiene despejando las siguientes ecuaciones en el espacio de estados:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}u$$

$$\mathbf{x} = Az + Bu$$

en donde

$$B = x(O), \qquad u = l(t)$$

A continuación se presentan los comandos de MATLAB para obtener las curvas de respuesta en un solo par de ejes.

```
[x,z,t] = step(A,B,A,B);
xl = [1 0 0. . . 0]*x';
x2 = [0 1  0 . . . 0]*x';

xn = [0  0  0 . . . 1]*x';
plot(t,xl,t,x2, . . . ,t,xn)
```

Respuesta a condiciones iniciales (enfoque en el espacio de estados, caso 2). Considere el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{4-56}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{4-57}$$

(Suponga que x es un vector de dimensión n y que y es un vector de dimensión m.)

Igual que en el caso 1, si definimos

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{x}$$

obtenemos la ecuación siguiente:

$$\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{x}(0)1(t) = \mathbf{A}\dot{\mathbf{z}} + \mathrm{Bu} \tag{4-58}$$

en donde

$$\mathbf{B} = \mathbf{x}(0), \qquad \mathrm{u} = 1(t)$$

Considerando que $\mathrm{x} = \dot{\mathbf{z}}$, la ecuación (4-57) puede escribirse

$$\mathrm{y} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{z}} \tag{4-59}$$

Sustituyendo la ecuación (4-58) en la ecuación (4-59), obtenemos

$$\mathrm{y} = \mathbf{C}(\mathbf{A}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{B}u) = \mathbf{C}\mathbf{A}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}\mathbf{B}u \tag{4-60}$$

La solución de las ecuaciones (4-58) y (4-60) proporciona la respuesta del sistema para condiciones iniciales determinadas. A continuación aparecen los comandos de MATLAB para obtener las curvas de respuesta (curvas de salida y1 contra t, y2 contra t, . . . , ym contra t).

```
[y,z,t] = step(A,B,C*A,C*B)
y1 = [1  0 0 . . . 0]*y';
y2 = [0 1  0 . . . 0]*y';

ym = [0 0 0.. . 1]*y';
plot(t,y1,t,y2 . . . ,t,ym)
```

EJEMPLO 4-8 Obtenga la respuesta del sistema sujeto a las condiciones iniciales determinadas

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

o bien

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

Obtener la respuesta del sistema a las condiciones iniciales determinadas se convierte en despejar la respuesta escalón unitario del sistema siguiente:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}u$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

en donde,

$$B = x(0), \qquad u = 1(t)$$

Por tanto, el programa MATLAB 4-10 sirve para obtener la respuesta. Las curvas de respuesta resultantes se muestran en la figura 4-30.

```
Programa MATLAB 4–10

A = [0  1;–10  –5];
B = [2;1];
[x,z,t] = step(A,B,A,B);
x1 = [1  0]*x';
x2 = [0  1]*x';
plot(t,x1,'o',t,x2,'-')
grid
title('Respuesta a condiciones iniciales')
xlabel('t Seg')
ylabel('x1  x2')
```

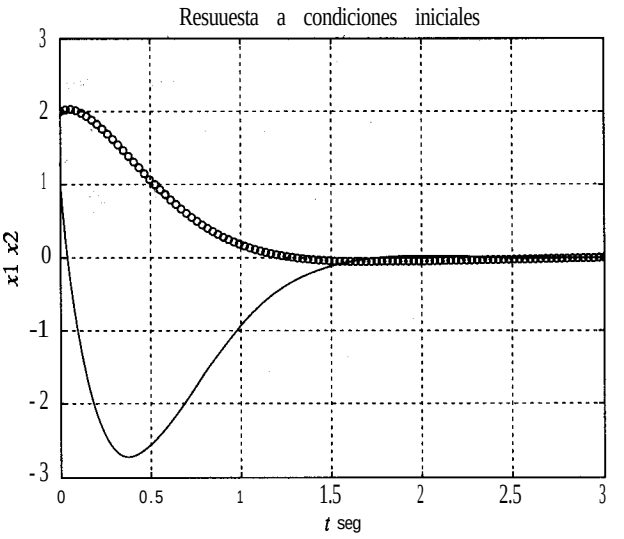


Figura 4-30
Respuesta del sistema del ejemplo 4-8 a condiciones iniciales.

4-5 UN PROBLEMA DE EJEMPLO RESUELTO CON MATLAB

El propósito de esta sección es presentar la solución con MATLAB a la respuesta de un sistema vibratorio mecánico. Primero se desarrolla el modelo matemático del sistema, después se simula el sistema usando MATLAB para el enfoque en tiempo continuo y en tiempo discreto y luego se generan curvas de respuesta para cada enfoque.

Sistema vibratorio mecánico. Considere el sistema vibratorio mecánico de la figura 4–31(a). Una rueda tiene un sistema masa-resorte-amortiguador que cuelga de ella. La rueda está sobre una pista que consta de una parte plana (horizontal), un plano inclinado

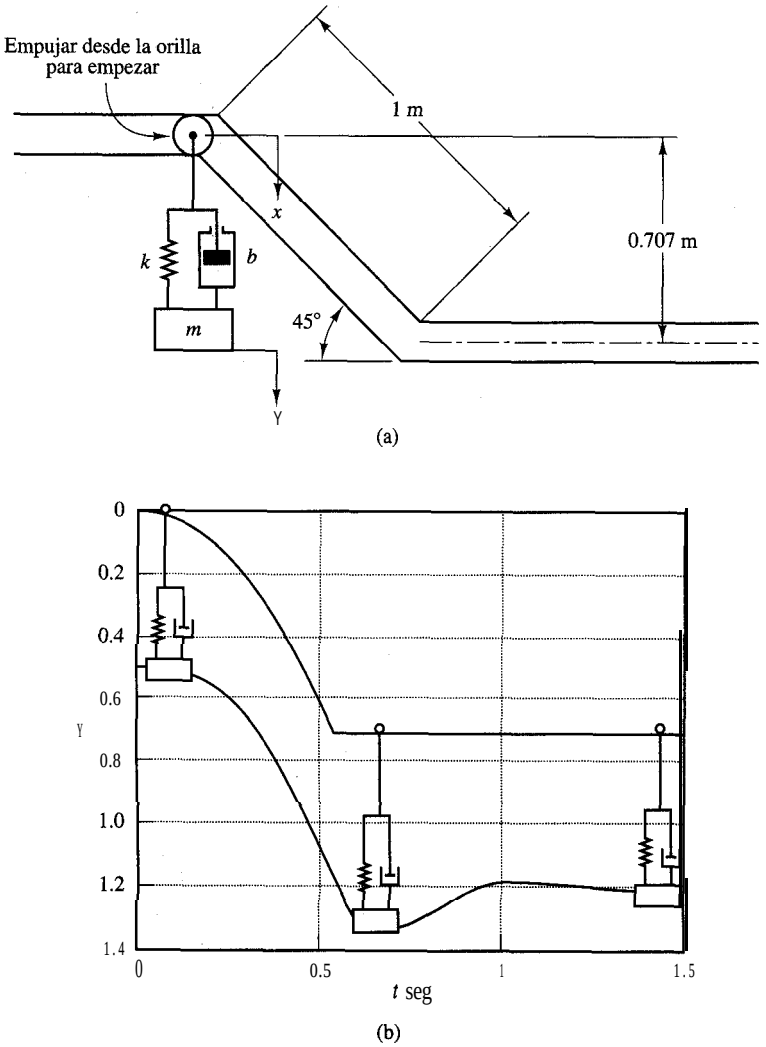


Figura 4–31
(a) Rueda con un sistema de masa-resorte-amortiguador colgante; (b) respuesta dinámica del sistema.

(45" hacia abajo) y otra parte plana (horizontal). Empezamos el movimiento del sistema empujando la rueda desde la orilla de la rampa. Conforme la rueda cae por la rampa, un total de 0.707 m (medidos verticalmente), la masa m cuelga del resorte y el amortiguador cae con ella, y la masa adquiere un momentum que se disipa en forma gradual. En este problema se supone que la rueda se desliza sin fricción en el plano inclinado de la pista. En la segunda porción plana de la pista, la rueda se desliza y gira. La rueda sigue moviéndose en la parte plana de la pista hasta que se detiene por medios externos.

Suponga los siguientes valores numéricos para m, b y k:

$$m = 4 \text{ kg}, \qquad m = 40 \text{ N-seg/m}, \qquad k = 400 \text{ N/m}$$

También suponga que la masa m_p de la rueda es insignificante en comparación con la masa m. Obtenga x(t), el movimiento vertical de la rueda. Después obtenga Y(s), la transformada de Laplace de y(t), que representa el movimiento hacia arriba y hacia abajo de la masa m. La coordenada y se une al sistema de masa-resorte-amortiguador de la figura 4-31 y se

mide a partir de la posición de equilibrio del sistema. Las condiciones iniciales son que $y(0) = 0$ y $\dot{y}(0) = 0$. Observe que en este problema sólo nos interesan los movimientos verticales del sistema de masa-resorte-amortiguador. También observe que el sistema no tiene fricción, excepto la del amortiguador, que se basa en la viscosidad para su operación.

Conforme el componente masa-resorte-amortiguador se desliza por la rampa, recibirá una aceleración producida por la fuerza de gravedad. Cuando el sistema masa-resorte-amortiguador alcanza la región nivelada en la parte inferior de la rampa, se imprimirá de inmediato un choque sobre el componente masa-resorte-amortiguador. Sin embargo, terminara por llegar a un estado de equilibrio después del impacto, debido a los efectos estabilizadores del amortiguador y el resorte. La respuesta dinámica de este sistema aparece en la figura 4–31(b).

Determinación de x(t). El sistema empieza con una velocidad inicial de cero y sigue por la pista. La entrada para el sistema es la posición vertical x a lo largo de la pista, y la salida es la posición vertical y de la masa. Dado que suponemos que no hay una fricción por deslizamiento, remitiéndonos a la figura 4–32(a), tenemos, en la dirección z, la ecuación siguiente:

$$m\ddot{z} = \text{mg sen } 45^\circ$$

o bien

$$\ddot{z} = 9.81 \; X \; 0.707 = 6.9357$$

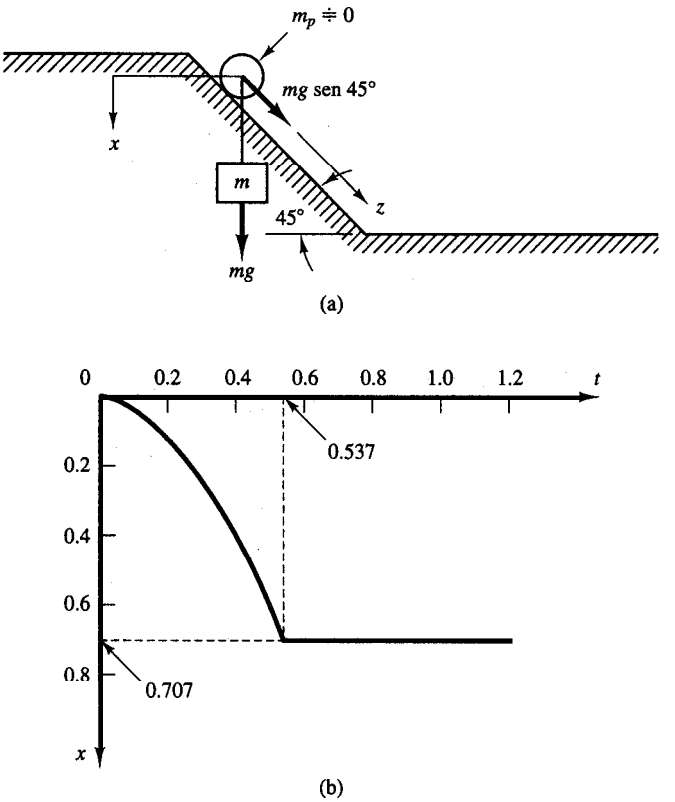


Figura 4-32
(a) Una rueda con masa m se desliza por el plano inclinado; (b) curva $x(t)$ contra t.

Definamos el tiempo que se necesita para que la rueda se mueva de z = 0 a z = 1 m como t_1. Después

$$z = 6.9357 \frac{t_1^2}{2} = 1$$

lo cual nos lleva a

$$t_1 = 0.537 \text{ seg}$$

Por tanto, x(t) se obtiene del modo siguiente:

$$x(t) = 0.707z = 0.707 \times 3.4678\ t^2 = 2.452\ t^2, \qquad \text{para } 0 \le t \le 0.537$$
$$= 0.707, \qquad \text{para } 0.537 < t$$

De aquí se tiene que, de $t = 0.537$ seg a $t = \infty$ se aplica una entrada definida por una constante de 0.707. La posición x al final de la rampa es 0.707 y se requieren aproximadamente 0.537 seg para llegar ahí. La figura 4–32(b) muestra una curva $x(t)$ contra t. Observe que la dirección positiva de $x(t)$ es la vertical hacia abajo.

Para tener una mejor imagen de los eventos que ocurren en el sistema, necesitamos observar la entrada, que aparece en la figura 4–32(b). Los efectos de la gravedad no nos permiten modelar el comportamiento del sistema con una rampa ordinaria, sino, más bien, con una función parábola, a la cual le sigue una entrada constante.

Determinación de la función de transferencia Y(s)/X(s). A continuación obtendremos, primero, la ecuación del movimiento para el sistema y después la función de transferencia $Y(s)/X(s)$. Dado que y se mide a partir de su posición de equilibrio, la ecuación del sistema se convierte en

$$m\ddot{y} + b(\dot{y} - \dot{x}) + k(y - x) = 0$$

o bien

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = b\dot{x} + kx$$

en donde x es la entrada para el sistema y y es la salida. Sustituyendo los valores numéricos proporcionados para m, b y k, obtenemos

$$4\ddot{y} + 40\dot{y} + 400y = 40\dot{x} + 400x$$

o bien

$$\ddot{y} + 10\dot{y} + 100y = 10\dot{x} + 100x \tag{4-61}$$

Ahora, la función de transferencia para el sistema se obtiene mediante

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{10s + 100}{s^2 + 10s + 100} \tag{4-62}$$

en donde la entrada x(t) se obtiene mediante

$$x(t) = 2.452\ t^2, \qquad 0 \le t \le 0.537$$
$$= 0.707, \qquad 0.537 < t \tag{4-63}$$

Aquí, el problema es usar MATLAB para encontrar la transformada inversa de Laplace de Y(s) obtenida mediante la ecuación (4-62). A continuación consideramos dos enfoques. Uno es trabajar en el dominio del tiempo continuo usando el comando **step.** El otro es trabajar en el dominio del tiempo discreto usando el comando **filter.** Primero presentaremos un enfoque en tiempo continuo y después en tiempo discreto.

Simulación en la computadora (enfoque en tiempo continuo). En el enfoque en tiempo continuo separamos la región de tiempo en dos partes; $0 \leq t \leq 0.537$ y $0.537 < t$.

Para $0 \leq t \leq 0.537$:

$$x_1(t) = 2.452t^2$$

Por tanto

$$X_1(s) = \frac{2.452 \times 2}{s^3} = \frac{4.904}{s^3}$$

La salida Y(s) se obtiene mediante

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{10s + 100}{s^2 + 10s + 100} \frac{4.904}{s^3} \\ &= \frac{49.04s + 490.4}{s^4 + 10s^3 + 100s^2} \frac{1}{s} \end{aligned} \tag{4-64}$$

Para $0.537 < t$:

$$x_2(t) = 0.707$$

Dado que

$$\frac{Y_2(s)}{X_2(s)} = \frac{10s + 100}{s^2 + 10s + 100}$$

la ecuación diferencial correspondiente se convierte en

$$\ddot{y}_2 + 10\dot{y}_2 + 100y_2 = 10\dot{x}_2 + 100x_2$$

La transformada de Laplace de esta última ecuación se convierte en

$$\begin{aligned} [s^2Y_2(s) - sy_2(0) - \dot{y}_2(0)] + 10[sY_2(s) - y_2(0)] + 100Y_2(s) \\ = 10[sX_2(s) - x_2(0)] + 100X_2(s) \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} (s^2 + 10s + 100)Y_2(s) = (10s + 100)X_2(s) + sy_2(0) \\ + \dot{y}_2(0) + 10y_2(0) - 10x_2(0) \end{aligned}$$

Por tanto

$$Y_2(s) = \frac{10s + 100}{s^2 + 10s + 100} X_2(s) + \frac{sy_2(0) + \dot{y}_2(0) + 10y_2(0) - 10x_2(0)}{s^2 + 10s + 100}$$

Las condiciones iniciales se encuentran a partir de $y_2(0) = y_1(0.537)$ y $\dot{y}_2(0) = \dot{y}_1(0.537)$. Por tanto,

$$Y_2(s) = \frac{10s + 100}{s^2 + 10s + 100} \frac{0.707}{s} + \frac{s^2[y_1(0.537)] + [\dot{y}_1(0.537) + 10y_1(0.537) - 10(0.707)]s}{s^2 + 10s + 100} \frac{1}{s}$$

o bien

$$Y_2(s) = \frac{10s + 100}{s^2 + 10s + 100} \frac{0.707}{s} + \frac{s^2[y1(537)] + [\text{yldot}(537) + 10y1(537) - 7.07]s}{s^2 + 10s + 100} \frac{1}{s} \quad (4\text{-}65)$$

en donde

$$y1(537) = y_1(0.537), \qquad \text{yldot}(537) = \dot{y}_1(0.537)$$

El programa MATLAB 4-11 sirve para obtener la respuesta y(t) con base en el enfoque en tiempo continuo. La curva de respuesta resultante y(t) contra t, al igual que la entrada x(t) contra t, se muestran en la figura 4-33.

Programa MATLAB 4-11

```
% -------- Enfoque en tiempo continuo --------
% ***** Obtenga y1 y el punto y1 *****
num1 = [0  0  0  49.04  490.4];
den1 = [1  10  100  0  0];
t1 = 0:0.001:0.537;
y1 = step(num1,den1,t1);
num2 = [0  0  49.04  490.4];
den2 = [1  10  100  0];
y1dot = step(num2,den2,t1);
% ***** Determine los valores iniciales de y1(537) y y1 punto(537) para
% la segunda parte. Los valores iniciales para la segunda parte son
% la salida y2_ini = y1(537) y y2punto_ini = y1punto(537) *****
```

```
y2_ini = y1(537);
y2dot_ini = y1dot(537);
t2 = 0.536:0.001:1.5;
num3 = [0   7.07   70.7];
den3 = [1   10   100];
num4 = [y1(537)   y1dot(537) + 10*y1(537)   2.07   0];
y2o = step(num3,den3,t2);
y2i = step(num4,den3,t2);
y2 = y2o + y2i;
y = [y1'   y2'];
t = [t1   t2];
plot(t,y,'-')

hold

Current plot held

y1 = 2.452*t1.^2;
y2 = 0.707*ones(size(t2));
```

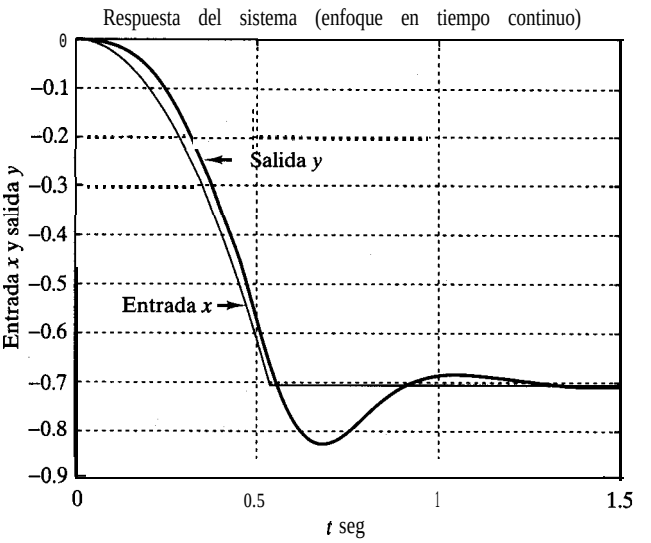


Figura 4-33
Entrada $x(t)$ y salida y(t) obtenidas mediante el enfoque en tiempo continuo.

Se observa que cuando se grafican curvas múltiples en un solo par de ejes, es posible usar el comando "hold" (retener). Si introducimos el comando **"hold"** en la computadora, la pantalla mostrará

```
hold

Current plot held
```

Para liberar la gráfica retenida, introduzca otra vez el comando **"hold".** La gráfica actual se liberará tal como se muestra a continuación.

```
hold

Current plot held

hold

Current plot released
```

Simulación de computadora (enfoque en tiempo discreto). La función de transferencia en tiempo continuo se convierte en una función de transferencia pulso (función de transferencia en tiempo discreto) mediante fórmulas generales. El método más simple es convertir la función de transferencia en tiempo continuo a una función de transferencia pulso mediante comandos de MATLAB. El primer paso es convertir la función de transferencia en tiempo continuo aun conjunto de ecuaciones en el espacio de estados en tiempo continuo usando el comando de MATLAB **[A,B,C,D] = tf2ss(num,den).** Después, las ecuaciones en el espacio de estados se convierten de tiempo continuo a tiempo discreto mediante el comando **[G,H] = c2d(A,B,T),** en donde **T** es el paso de tiempo deseado (periodo de muestreo). Las ecuaciones en el espacio de estados en tiempo discreto se convierten en una función de transferencia pulso con el comando **[numz,denz] = ss2tf(G,H,C,D).**

En el caso presente, elegimos T = 0.001 seg. Primero debe separarse la función de entrada x(t). Se determinó que la función de entrada en tiempo continuo era

$$x(t) = 2.452\,t^2, \qquad \text{para } 0 \le t \le 0.537$$
$$x(t) = 0.707, \qquad \text{para } 0.537 < t$$

Observe que definimos x como un arreglo de puntos en MATLAB. Este arreglo inicialmente sigue a $x(t) = 2.452\,t^2$ y, después de t = 0.537 seg, sigue a x(t) = 0.707. Suponemos que la región de tiempo es $0 \le t \le 1.5$.

La entrada parábola en la primera parte se escribe como

```
k1 = 0:537;
x1 = [2.452*(0.001*k1).^2]
```

en donde **k1** representa una cuenta de tiempo y **x1** es la primera parte de la función de entrada completa. (Hay 538 puntos de cálculo desde la posición inicial hasta que la entrada

alcanza 0.707 m). Para la segunda parte de la entrada, necesitamos una función escalón con una magnitud de 0.707. Después del tiempo 0.537 seg,

```
k2 = 538:1500;
x2 = [0.707*ones(size(k2))]
```

(Hay 963 puntos de 0.538 seg a 1.5 seg, inclusive.) El paso siguiente es transformar ambas entradas en una entrada completa:

```
x = [x1   x2];
```

(Las dos ecuaciones de entrada se transforman en un solo vector para que parezcan una sola entrada en el argumento de comando filter.)

Ahora podemos usar el comando filter (filtro) asignando una variable y,

```
y = filter(numz,denz,x);
```

y graficar la respuesta y(t) al igual que la respuesta original misma, x(t), considerando los intervalos de tiempo mediante t:

```
t = 0:1500;
plot(t/1000, − y,'.',t/l 000, −x,'-')
```

(Dividimos t entre 1000 debido a que el paso de tiempo es de 0.001 seg.) También observe que las funciones de entrada y salida graficadas se vuelven negativas. (De lo contrario, tendríamos una entrada y una respuesta parábola positivas, lo cual sería incorrecto.)

El programa MATLAB 4-12 usa el enfoque en tiempo discreto. Las curvas de respuesta resultantes $x(t)$ contra t y y(t) contra t aparecen en la figura 4-34.

Programa MATLAB 4–12

```
% --------- Enfoque en tiempo discreto ---------

% ***** Convierta una función de transferencia en tiempo continuo en una función
% de transferencia en tiempo discreto (función de transferencia pulso) seleccionando
% el paso de tiempo (periodo de muestreo) para que sea 0.001 seg *****

num = [0   10   100];
den = [1   10   100];
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den);
[G,H] = c2d(A,B,0.001);
[numz,denz] = ss2tf(G,H,C,D);

% ***** Introduzca las entradas x1 y x2 *****
```

```
k1 = 0:537;
x1 = [2.452*(0.001*k1).^2];
k2 = 538:1500;
x2 = [0.707*ones(size(k2))];
x = [x1   x2];

% ***** Usando el comando filter, obtenga la respuesta y *****

y = filter(numz,denz,x);
t = 0:1500;
plot(t/1000,-y,'-',t/1000,-x,'-')
grid
title('Respuesta del sistema (enfoque en tiempo discreto)')
xlabel('t Seg')
ylabel('Entrada x y Salida y')
text(0.2,-0.54,'Entrada x')
text(0.47,-0.25,'Salida y')
```

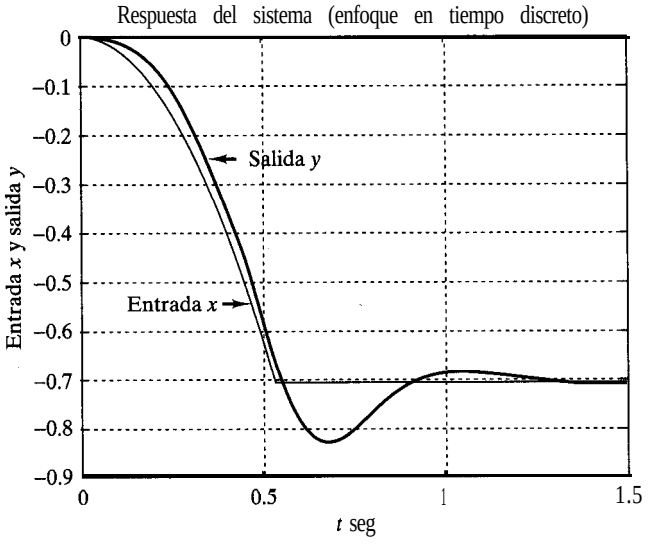


Figura 4-34
Entrada $x(t)$ y salida y(t) obtenidas mediante el enfoque en tiempo discreto.

EJEMPLO DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

A-4-1. En el sistema de la figura 4-35, x(t) es el desplazamiento de entrada y $\theta(t)$ es el desplazamiento angular de salida. Suponga que las masas involucradas son tan pequeñas que pueden no considerarse y que todos los movimientos tienen la restricción de ser pequeños; por tanto, el sistema se considera lineal. Las condiciones iniciales para x y θ son cero, o $x(0-)= 0$ y $\theta(0-) = 0$. Demuestre que este sistema es un diferenciador. Después, obtenga la respuesta $\theta(t)$ cuando $x(t)$ es una entrada escalón unitario.

Solución. La ecuación para el sistema es

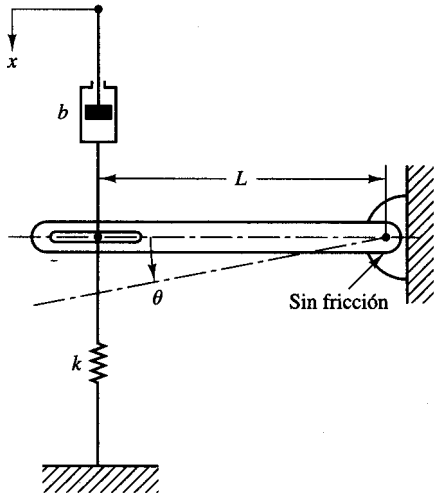


Figura 435
Sistema mecánico.

$$b(\dot{x} - ti) = kL\theta$$

o bien

$$L\dot{\theta} + \frac{k}{b}L\theta = \dot{x}$$

la transformada de Laplace de esta última ecuación, con condiciones iniciales cero, nos da

$$\left(LS + \frac{k}{b}L\right)\Theta(s) = sX(s)$$

Y, por tanto

$$\frac{\Theta(s)}{X(s)} = \frac{1}{L}\frac{}{s + (k/b)}$$

En este caso, se trata de un sistema diferenciador.

Para la entrada escalón unitario X(s) = $1/s$, la salida $\Theta(s)$ se convierte en

$$\Theta(s) = \frac{1}{L}\frac{1}{s + (k/b)}$$

La transformada inversa de Laplace de $\Theta(s)$ produce

$$\theta(t) = \frac{1}{L}e^{-(k/b)t}$$

Observe que, si el valor de klb es grande, la respuesta $\theta(t)$ se aproxima a una señal pulso como se aprecia en la figura 4-36.

A-42. Considere el sistema mecánico de la figura 4-37. Suponga que el sistema está inicialmente en reposo [x(O) = 0, X(O) = 0] y que $t = 0$ se pone en movimiento mediante una fuerza impulso unitario. Obtenga un modelo matemático para el sistema. Después, encuentre el movimiento del sistema.

Solución. El sistema se excita mediante ha entrada impulso unitario. Por tanto,

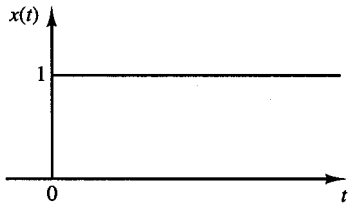


Figura 4-36
Entrada escalón unitario y respuesta del sistema mecánico de la figura **4-35.**

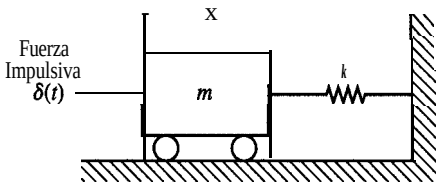


Figura 4–37
Sistema mecánico.

$$m\ddot{x} + kx = \delta(t)$$

Éste es un modelo matemático para el sistema.

Tomar la transformada de **Laplace** de ambos miembros de esta última ecuación produce

$$m[s^2X(s) - sx(0) - X(O)] + kX(s) = 1$$

Sustituyendo las condiciones iniciales x(O) = 0 y $\dot{x}(0) = 0$ en esta última ecuación y despejando $X(s)$ obtenemos

$$X(s) = \frac{1}{ms^2 + k}$$

La transformada inversa de **Laplace** de $X(s)$ se vuelve

$$X(t) = \frac{1}{\sqrt{mk}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

La oscilación es un movimiento armónico simple. La amplitud de la oscilación es $1/\sqrt{mk}$.

A-4-3. Obtenga la función de transferencia en lazo cerrado para el sistema de control de posición de la figura 4-38. Suponga que la entrada y la salida del sistema son la posición de la flecha de entrada y la posición de la flecha de salida, respectivamente. Suponga los siguientes valores numéricos para las constantes del sistema:

r = desplazamiento angular de la flecha de entrada de referencia, en radianes
c = desplazamiento angular de la flecha de salida, en radianes
θ = desplazamiento angular de la flecha del motor, en radianes
K_0 = ganancia del detector de error potenciométrico = $24/\pi$ V/rad

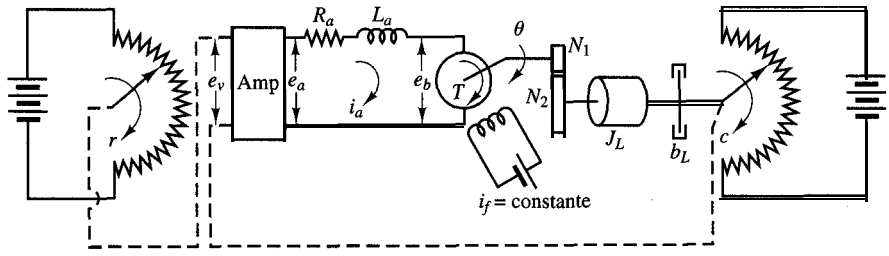


Figura 4-38
Sistema de control de posición.

K_1 = ganancia del amplificador = 10 V/V
e_a = voltaje de armadura, V
e_b = contra fem, V
R_a = resistencia de armadura = 0.2 Ω
L_a = inductancia de armadura = insignificante
i_a = corriente de armadura, A
K_3 = constante de contra fem = 5.5 X 10^{-2} V-seg/rad
K_2 = constante de par de motor = 6 X 10^{-5} N-m/A
J_m = momento de inercia del motor referido a la flecha del motor = 1 X 10^{-5} kg-m^2
b_m = coeficiente de fricción viscosa del motor referido a la flecha del motor = insignificante
J_L = momento de inercia de la carga referido a la flecha de salida = 4.4 X 10^{-3} kg-m^2.
b_L = coeficiente de fricción viscosa de la carga referido a la flecha de salida = 4 X 10^{-2} N-m/rad/seg
n = relación de engranes $N_1/N_2 = \frac{1}{10}$

Solución. El momento de inercia equivalente J_0 y el coeficiente de fricción viscosa equivalente b_0 referidos a la flecha del motor son, respectivamente,

$$J_0 = J_m + n^2 J_L$$
$$= 1 \times 10^{-5} + 4.4 \times 10^{-5} = 5.4 \times 10^{-5}$$
$$b_0 = b_m + n^2 b_L$$
$$= 4 \times 10^{-4}$$

Remitiéndonos a la ecuación (4–16), obtenemos

$$\frac{C(s)}{E(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)}$$

en donde

$$K_m = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{R_a b_0 + K_2 K_3} = \frac{7.64 \times 10 \times 6 \times 10^{-5} \times 0.1}{(0.2)(4 \times 10^{-4}) + (6 \times 10^{-5})(5.5 \times 10^{-2})} = 5.5$$

$$T_m = \frac{R_a J_0}{R_a b_0 + K_2 K_3} = \frac{(0.2)(5.4 \times 10^{-5})}{(0.2)(4 \times 10^{-4}) + (6 \times 10^{-5})(5.5 \times 10^{-2})} = 0.13$$

Por tanto,

$$\frac{C(s)}{E(s)} = \frac{5.5}{s(0.13s + 1)} \qquad (4\text{-}66)$$

Usando la ecuación (4–66), es posible dibujar el diagrama de bloques del sistema tal como aparece en la figura 4-39. La función de transferencia en lazo cerrado del sistema es

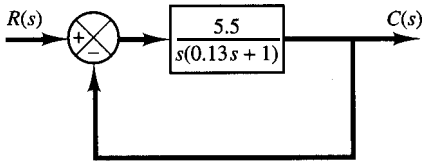


Figura 4-39
Diagrama de bloques del sistema de la figura 4-38.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5.5}{0.13s^2 + s + 5.5} = \frac{42.3}{s^2 + 7.69s + 42.3}$$

A-4-4. Con frecuencia se usan trenes de engranes en sistemas de seguimiento para reducir la velocidad, aumentar el par u obtener la transferencia de potencia más eficiente, haciendo coincidir el miembro de manejo con la carga determinada.

Considere el sistema de tren de engranes de la figura 4-40. En este sistema, un motor maneja una carga mediante un tren de engranes Suponiendo que la rigidez de las flechas del tren de engranes es infinita (no existe juego o bamboleo ni deformación elástica) y que el número de dientes en cada engrane es proporcional al radio del mismo, obtenga el momento de inercia equivalente y el coeficiente de fricción viscosa equivalente referido a la flecha del motor y con la flecha de la carga.

En la figura 4–40, el número de dientes en los engranes 1, 2, 3 y 4 es NI, N_2, N_3 y N_4, respectivamente. Los desplazamientos angulares de las flechas 1, 2 y 3 son θ_1, θ_2 y θ_3, respectivamente. Por tanto, $\theta_2/\theta_1 = N_1/N_2$ y $\theta_3/\theta_2 = N_3/N_4$. El momento de inercia y el coeficiente de fricción viscosa de cada componente del tren de engranes se representan mediante J_1, b_1; J_2, b_2; y J_3, b_3, respectivamente. (J_3 y b_3 incluyen el momento de inercia y la fricción de la carga.)

Solución. Para este sistema de tren de engranes, obtenemos las tres ecuaciones siguientes: para la flecha 1,

$$J_1\ddot{\theta}_1 + b_1\dot{\theta}_1 + T_1 = T_m \tag{4-67}$$

en donde T_m es el par desarrollado por el motor y T_1 es el par de carga en el engrane 1 debido al reposo del tren de carga. Para la flecha 2,

$$J_2\ddot{\theta}_2 + b_2\dot{\theta}_2 + T_3 = T_2 \tag{4-68}$$

en donde T_2 es el par transmitido al engrane 2 y T_3 es el par de carga en el engrane tres debido al reposo del tren de engranes Dado que el trabajo realizado por el engrane 1 es igual al del engrane 2,

$$T_1\theta_1 = T_2\theta_2 \quad \text{o} \quad T_2 = T_1\frac{N_2}{N_1}$$

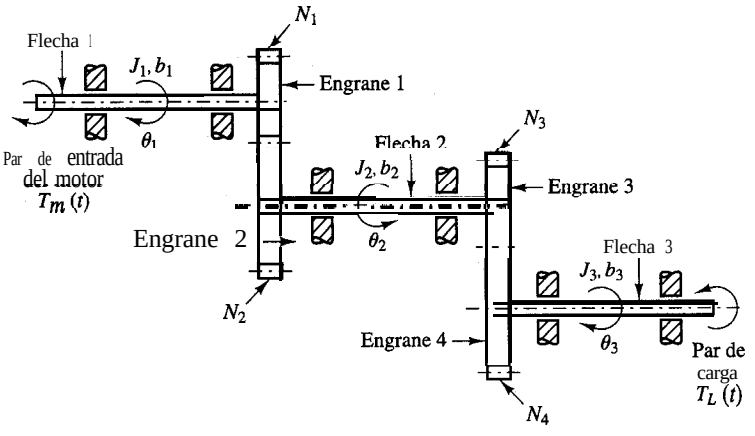


Figura 4-40
Sistema de tren de engranes.

Si $N_1/N_2 < 1$, la relación de engranes reduce la velocidad, al igual que aumenta el par. Para la tercera flecha,

$$J_3\ddot{\theta}_3 + b_3\dot{\theta}_3 + T_L = T_4 \tag{4-69}$$

en donde T_L es el par de carga y T_4 es el par trasmitido al engrane 4. T_3 y T_4 se relacionan mediante

$$T_4 = T_3 \frac{N_4}{N_3}$$

y θ_3 y θ_1 se relacionan mediante

$$\theta_3 = \theta_2 \frac{N_3}{N_4} = \theta_1 \frac{N_1}{N_2} \frac{N_3}{N_4}$$

La eliminación de T_1, T_2, T_3 y T_4 de las ecuaciones (4-67), (4-68) y (4-69) produce

$$J_1\ddot{\theta}_1 + b_1\dot{\theta}_1 + \frac{N_1}{N_2}(J_2\ddot{\theta}_2 + b_2\dot{\theta}_2) + \frac{N_1N_3}{N_2N_4}(J_3\ddot{\theta}_3 + b_3\dot{\theta}_3 + T_L) = T_m$$

Eliminando θ_2 y θ_3 de esta última ecuación, y escribiendo la ecuación resultante en términos de θ_1 y sus derivadas con respecto al tiempo, obtenemos

$$\left[J_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_2 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 J_3\right]\ddot{\theta}_1 + \left[b_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 b_2 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 b_3\right]\dot{\theta}_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)\left(\frac{N_3}{N_4}\right)T_L = T_m \quad (4\text{-}70)$$

Por tanto, el momento de inercia equivalente y el coeficiente de fricción del tren de engranes referido a la flecha 1, se obtienen, respectivamente, mediante

$$J_{1eq} = J_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_2 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 J_3$$

$$b_{1eq} = b_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 b_2 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 b_3$$

Asimismo, el momento de inercia y el coeficiente de fricción viscosa equivalentes del tren de engranes, referido a la flecha de carga (eje 3), se obtienen, respectivamente, mediante

$$J_{3eq} = J_3 + \left(\frac{N_4}{N_3}\right)^2 J_2 + \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2\left(\frac{N_4}{N_3}\right)^2 J_1$$

$$b_{3eq} = b_3 + \left(\frac{N_4}{N_3}\right)^2 b_2 + \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2\left(\frac{N_4}{N_3}\right)^2 b_1$$

Por tanto, la relación entre J_{1eq} y J_{3eq} es

$$J_{1eq} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 J_{3eq}$$

y aquella entre b_{1eq} y b_{3eq} es

$$b_{1eq} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 b_{3eq}$$

El efecto de J_2 y J_3 en un momento de inercia equivalente se determina mediante las relaciones de engranes N_1/N_2 y N_3/N_4. Para los trenes de engranes que reducen la velocidad, por lo general las relaciones N_1/N_2 y N_3/N_4 son menores que la unidad. Si $N_1/N_2 \ll 1$ y $N_3/N_4 \ll 1$, el efecto de J_2

y J_3 en el momento de inercia equivalente J_{1eq} es insignificante. Para el coeficiente de fricción viscosa equivalente b_{1eq} del tren de engranes se aplican comentarios similares. En términos del momento de inercia equivalente J_{1eq} y el coeficiente de fricción viscosa equivalente b_{1eq}, la ecuación (4–70) se simplifica para dar

$$J_{1eq}\ddot{\theta}_1 + b_{1eq}\dot{\theta}_1 + nT_L = T_m$$

en donde

$$n = \frac{N_1}{N_2}\frac{N_3}{N_4}$$

A-4-5. Demuestre que las razones entre el par y la inercia referidos a la flecha del motor y la flecha de la carga difieren una de otra en un factor de *n*. Demuestre, asimismo, que las razones entre el par cuadrático y la inercia, referido a la flecha del motor y la flecha de la carga son iguales.

Solución. Suponga que $T_{máx}$ es el par máximo que se produce en la flecha de motor. Por tanto, la razón entre el par y la inercia, referido a la flecha de motor es

$$\frac{T_{máx}}{J_m + n^2 J_L}$$

en donde J_m = momento de inercia del rotor
J_L = momento de inercia de la carga
n = relación de engranes

La razón entre el par y la inercia referida a la flecha de la carga es:

$$\frac{\dfrac{T_{máx}}{n}}{J_L + \dfrac{J_m}{n^2}} \qquad \frac{nT_{máx}}{J_m + n^2 J_L}$$

Es evidente que ambas son diferentes en un factor de n. Por tanto, al comparar las razones entre el par y la inercia de los motores, resulta necesario especificar cuál flecha es la referencia.

Observe que la razón entre el par cuadrático y la inercia, referida a la flecha del motor, es

$$\frac{T_{máx}^2}{J_m + n^2 J_L}$$

y que referido a la flecha de carga es

$$\frac{\dfrac{T_{máx}^2}{n}}{J_L + \dfrac{J_m}{n^2}} \qquad \frac{T_{máx}^2}{J_m + n^2 J_L}$$

Evidentemente estas dos razones son iguales.

A-4-6. Cuando el sistema de la figura 4–41(a) está sujeto a una entrada escalón unitario, la salida del sistema responde como se aprecia en la figura 4–41(b). Determine los valores de K y T_a partir de la curva de respuesta.

Solución. El sobrepaso máximo de 25.4% corresponde a $\zeta = 0.4$. A partir de la curva de respuesta, tenemos que

$$t_p = 3$$

En consecuencia,

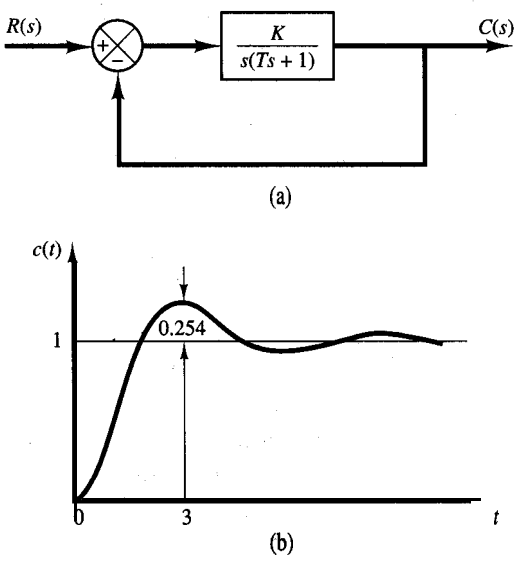


Figura 4-41
(a) Sistema en lazo cerrado; (b) curva de respuesta escalón unitario.

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-0.4^2}} = 3$$

de aquí se deduce que

$$\omega_n = 1.14$$

A partir del diagrama de bloques, tenemos que

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts^2 + s + K}$$

de lo cual

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}}, \qquad 2\zeta\omega_n = \frac{1}{T}$$

Por tanto, los valores de T y K se determinan como

$$T = \frac{1}{2\zeta\omega_n} = \frac{1}{2 \times 0.4 \times 1.14} = 1.09$$

$$K = \omega_n^2 T = 1.14^2 \times 1.09 = 1.42$$

A-4-7. Determine los valores de K y k del sistema en lazo cerrado de la figura 4-42 para que el sobrepaso máximo de la respuesta escalón unitario sea de 25% y el tiempo pico sea de 2 seg. Suponga que $J = 1$ kg-m^2.

Solución. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Kks + K}$$

Sustituyendo $J = 1$ kg-m^2 en esta última ecuación tenemos que

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + Kks + K}$$

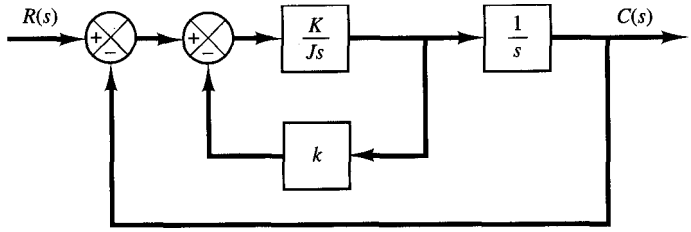


Figura 4-42
Sistema en lazo cerrado.

Observe que

$$\omega_n = \sqrt{K}, \qquad 2\zeta\omega_n = Kk$$

El sobrepaso máximo M_p es

$$M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

que se especifica como 25 % . Por tanto

$$e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.25$$

de lo cual

$$\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.386$$

o bien

$$\zeta = 0.404$$

El tiempo pico t_p se especifica como 2 seg. Y, por tanto

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 2$$

o bien

$$\omega_d = 1.57$$

En este caso la frecuencia natural no amortiguada ω_n es

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1.57}{\sqrt{1-0.4042}} = 1.72$$

Por tanto, obtenemos

$$K = \omega_n^2 = 1.72' = 2.95 \text{ N-m}$$

$$k = \frac{2\zeta\omega_n}{K} = \frac{2\times0.404\times1.72}{2.95} = 0.471 \text{ seg}$$

A-4-8. ¿Cuál es la respuesta escalón unitario del sistema de la figura 4–43?

Solución. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10s + 10}{s^2 + 10s + 10}$$

Para la entrada escalón unitario [R(s) = 1/s], tenemos

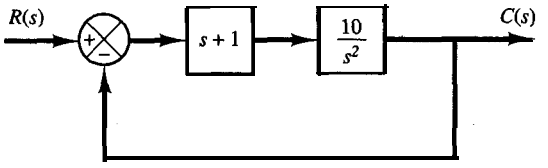


Figura 4-43
Sistema en lazo cerrado.

$$C(s) = \frac{10s + 10}{s^2 + 10s + 10}\frac{1}{s}$$

$$= \frac{10s + 10}{(s + 5 + \sqrt{15})(s + 5 - \sqrt{15})s}$$

$$= \frac{-4 - \sqrt{15}}{3 + \sqrt{15}}\frac{1}{s + 5 + \sqrt{15}} + \frac{-4 + \sqrt{15}}{3 - \sqrt{15}}\frac{1}{s + 5 - \sqrt{15}} + \frac{1}{s}$$

La transformada inversa de Laplace de C(s) da

$$c(t) = -\frac{4 + \sqrt{15}}{3 + \sqrt{15}}e^{-(5+\sqrt{15})t} + \frac{4 - \sqrt{15}}{-3 + \sqrt{15}}e^{-(5-\sqrt{15})t} + 1$$

$$= -1.1455e^{-8.87t} + 0.1455e^{-1.13t} + 1$$

Es evidente que la salida no presentará ninguna oscilación. La curva de respuesta tiende exponencialmente al valor final $c(\infty) = 1$.

A-4-9. La figura 4-44(a) muestra un sistema vibratorio mecánico. Cuando se aplica al sistema una fuerza de 2 lb (entrada escalón), la masa oscila como se aprecia en la figura 4-44(b). Determine m, b y k del sistema a partir de esta curva de respuesta. El desplazamiento x se mide a partir de la posición de equilibrio.

Solución. La función de transferencia de este sistema es

$$\frac{X(s)}{P(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Dado que

$$P(s) = \frac{2}{s}$$

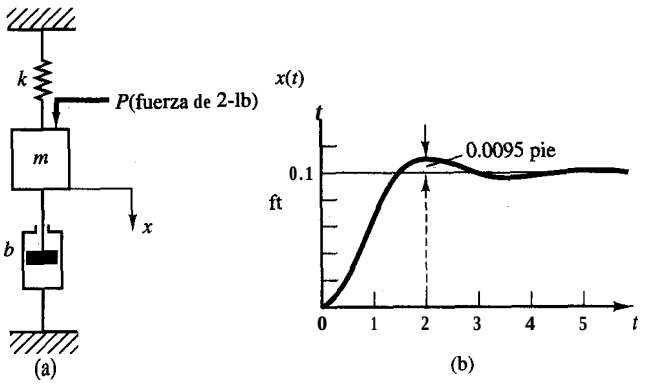


Figura 4-44
(a) Sistema vibratorio mecánico; (b) curva de respuesta escalón.

obtenemos

$$X(s) = \frac{2}{s(ms^2 + bs + k)}$$

de lo cual se deduce que el valor en estado estable de x es

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} sX(s) = \frac{2}{k} = 0.1 \text{ pie}$$

Por tanto

$$k = 20 \text{ lb}_f/\text{pie}$$

Observe que M_p = 9.5% corresponde a ζ = 0.6. El tiempo pico t_p se obtiene mediante

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_d\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi}{0.8\omega_n}$$

La curva experimental muestra que t_p = 2 seg. Por tanto

$$\omega_n = \frac{3.14}{2 \times 0.8} = 1.96 \text{ radlseg}$$

Dado que $\omega_n^2 = k/m = 20/m$, obtenemos

$$m = \frac{20}{\omega_n^2} = \frac{20}{1.96^2} = 5.2 \text{ slugs} = 166 \text{ lb}$$

(Observe que 1 slug = 1 $\text{lb}_f\text{-seg}^2/\text{pie}$.) Después b se determina a partir de

$$2\zeta\omega_n = \frac{b}{m}$$

o bien

$$b = 2\zeta\omega_n m = 2 \times 0.6 \times 1.96 \times 5.2 = 12.2 \text{ lb}_f/\text{pie/seg}$$

A-4-10. Suponiendo que el sistema mecánico de la figura 4-45 está en reposo antes de que se proporcione la fuerza de excitación P sen ωt, obtenga la solución completa $x(t)$ y la solución en estado estable $x_s(t)$. El desplazamiento x se mide a partir de la posición de equilibrio. Suponga que el sistema es subamortiguado.

Solución. La ecuación del movimiento para el sistema es

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = P \text{ sen } \omega t$$

Considerando que x(O) = 0 y que $\dot{x}(0)$ = 0, la transformada de Laplace de esta ecuación es

$$(ms^2 + bs + k)X(s) = P\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

o bien

$$X(s) = \frac{P\omega}{(s^2 + \omega^2)(ms^2 + bs + k)}$$

Dado que el sistema es subamortiguado, $X(s)$ se escribe del modo siguiente:

$$X(s) = \frac{P\omega}{m}\frac{1}{s^2+\omega^2}\frac{1}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}, \qquad \text{donde } 0 < \zeta < 1$$

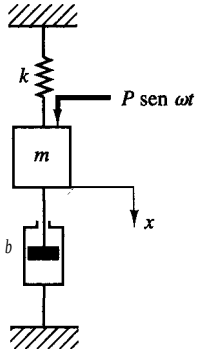


Figura 4-45
Sistema mecánico.

en donde $\omega_n = \sqrt{k/m}$ y $\zeta = b/(2\sqrt{mk})$. X(s) se expande como

$$X(s) = \frac{P\omega}{m}\left(\frac{as + c}{s^2 + \omega^2} + \frac{-as + d}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right)$$

Mediante cálculos sencillos se encuentra que

$$a = \frac{-2\zeta\omega_n}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}, \qquad c = \frac{(\omega_n^2 - \omega^2)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}, \qquad d = \frac{4\zeta^2\omega_n^2 - (\omega_n^2 - \omega^2)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}$$

Por tanto

$$X(s) = \frac{P\omega}{m}\frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}\left[\frac{-2\zeta\omega_n s + (\omega_n^2 - \omega^2)}{s^2 + \omega^2} + \frac{2\zeta\omega_n(s + \zeta\omega_n) + 2\zeta^2\omega_n^2 - (\omega_n^2 - \omega^2)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right]$$

La transformada inversa de Laplace de X(s) da

$$x(t) = \frac{Pw}{m[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2]}\left[-2\zeta\omega_n \cos wt + \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{w}\operatorname{sen}\ wt + 2\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} + \frac{2\zeta^2\omega_n^2 - (\omega_n^2 - \omega^2)}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}\ \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right]$$

En estado estable ($t \to \infty$) los términos que contienen $e^{-\zeta\omega_n t}$ tienden a cero. Por tanto, en estado estable

$$x(t) = \frac{Pw}{m[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2]}\left(-2\zeta\omega_n\cos wt + \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{\omega}\operatorname{sen}\ \omega t\right)$$

$$= \frac{Pw}{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}\left(-b\cos wt + \frac{k - m\omega^2}{w}\operatorname{sen}\ wt\right)$$

$$= \frac{P}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}}\operatorname{sen}\left(wt - \tan^{-1}\frac{bw}{k - m\omega^2}\right)$$

A-4-11. Considere la respuesta escalón unitario del sistema de segundo orden

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

La amplitud de la senoide exponencialmente amortiguada cambia como una serie geométrica. En el tiempo $t = t_p = \pi/\omega_d$, la amplitud es igual a $e^{-(\sigma/\omega_d)\pi}$. Después de una oscilación, o en $t = t_p + 2\pi/\omega_d = 3\pi/\omega_d$, la amplitud es igual a $e^{-(\sigma/\omega_d)3\pi}$; después de otro ciclo de oscilación, la amplitud es $e^{-(\sigma/\omega_d)5\pi}$. El logaritmo de la razón de amplitudes sucesivas se denomina *decremento logarítmico.* Determine el decremento logarítmico para este sistema de segundo orden. Describa un método para la determinación experimental del factor de amortiguamiento relativo a partir de la tasa de decaimiento de la oscilación.

Solución. Definamos la amplitud de la oscilación de salida en $t = t_i$ como x_i, en donde $t_i = t_p + (i - 1)T$ (T = periodo de oscilación). La razón de amplitud por un periodo de oscilación amortiguada es

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-(\sigma/\omega_d)\pi}}{e^{-(\sigma/\omega_d)3\pi}} = e^{2(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{2\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Por tanto, el decremento logarítmico δ es

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Es una función sólo del factor de amortiguamiento relativo ζ. Por tanto, el factor de amortiguamiento relativo ζ se determina mediante el decremento logarítmico.

En la determinación experimental del factor de amortiguamiento relativo ζ a partir de la tasa de decaimiento de la oscilación, medimos la amplitud x_1 en $t = t_p$ y la amplitud x_n en $t = t_p + (n - 1)T$. Observe que es necesario elegir un n suficientemente grande para que la razón x_1/x_n no esté cerca de la unidad. Por tanto

$$\frac{x_1}{x_n} = e^{(n-1)2\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

o bien

$$\ln \frac{x_1}{x_n} = (n-1)\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Por lo anterior

$$\zeta = \frac{\frac{1}{n-1}\left(\ln \frac{x_1}{x_n}\right)}{\sqrt{4\pi^2 + \left[\frac{1}{n-1}\left(\ln \frac{x_1}{x_n}\right)\right]^2}}$$

A-4-12. En el sistema de la figura 4-46, los valores numéricos de m, b, y k se proporcionan como $m = 1$ kg, $b = 2$ N-seg/m, y $k = 100$ N/m. La masa se desplaza 0.05 m y se libera sin velocidad inicial. Encuentre la frecuencia observada en la vibración. Además, encuentre la amplitud cuatro ciclos después. El desplazamiento x se mide a partir de la posición de equilibrio.

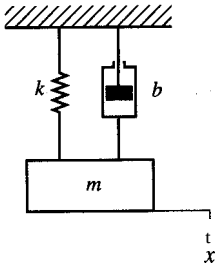


Figura 4-46
Sistema de masa-resorte-amortiguador.

Solución. La ecuación de movimiento para el sistema es

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

Sustituir los valores numéricos para m, b y k en esta ecuación produce

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 100x = 0$$

en donde las condiciones iniciales son x(O) = 0.05 y $\dot{x}(0) = 0$. A partir de esta última ecuación, la frecuencia natural no amortiguada ω_n y el factor de amortiguamiento relativo ζ resultan

$$\omega_n = 10, \qquad \zeta = 0.1$$

La frecuencia observada en realidad en la vibración es la frecuencia natural amortiguada ω_d.

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 10\sqrt{1-0.01} = 9.95 \text{ rad/seg}$$

En el análisis actual, $\dot{x}(0)$ se obtiene como cero. Por tanto, la solución $x(t)$ se escribe como

$$x(t) = x(0)\, e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\ \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\ sen\ \omega_d t\right)$$

de lo que se deduce que, en $t = nT$ en donde $T = 2\pi/\omega_d$,

$$x(nT) = x(0)e^{-\zeta\omega_n nT}$$

En consecuencia, la amplitud cuatro ciclos después se convierte en

$$x(4T) = x(0)e^{-\zeta\omega_n 4T} = x(0)e^{-(0.1)(10)(4)(0.6315)}$$
$$= 0.05e^{-2.526} = 0.05 \times 0.07998 = 0.004 \text{ m}$$

A-4-13. Considere un sistema cuyos polos y cero en lazo cerrado y se localizan en el plano s sobre una línea paralela al eje $j\omega$, como se aprecia en la figura 4-47. Demuestre que la respuesta impulso de tal sistema es una función coseno amortiguada.

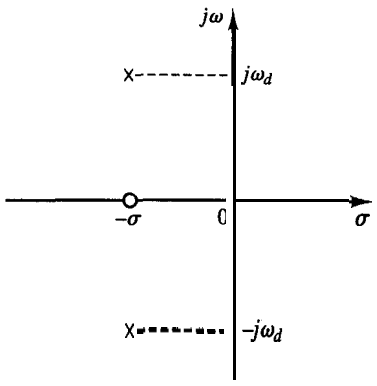


Figura 4-47
Configuración de polo y ceros en lazo cerrado del sistema cuya respuesta impulso es una función coseno amortiguada.

Solución. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s + \sigma)}{(s + \sigma + j\omega_d)(s + \sigma - j\omega_d)}$$

Para una entrada impulso unitario, $R(s) = 1$ y

$$C(s) = \frac{K(s + \sigma)}{(s + \sigma)^2 + \omega_d^2}$$

La transformada inversa de Laplace de C(s) es

$$c(t) = Ke^{-\sigma t}\cos \omega_d t \qquad \text{para } t \geq 0$$

que es una función coseno amortiguada.

A-4-14. Considere el sistema de control de nivel de líquido de la figura 4–48. El controlador es de tipo proporcional. El punto de ajuste del controlador está fijo.

Dibuje un diagrama de bloques del sistema, suponiendo que los cambios en las variables son pequeños. Obtenga la función de transferencia entre el nivel del segundo tanque y la entrada de perturbación q_d. Obtenga el error en estado estable cuando la perturbación q_d sea una función escalón unitario.

Solución. La figura 4–49(a) es un diagrama de bloques de este sistema cuando los cambios en las variables son pequeños. Dado que el punto de ajuste del controlador está fijo, $r = 0$. (Observe que r es el cambio en el punto de ajuste.)

Para investigar la respuesta del nivel del segundo tanque sujeto a una perturbación escalón unitario q_d, encontramos conveniente modificar el diagrama de bloques de la figura 4–49(a) al que aparece en la figura 4–49(b).

La función de transferencia entre $H_2(s)$ y $Q_d(s)$ se obtiene como

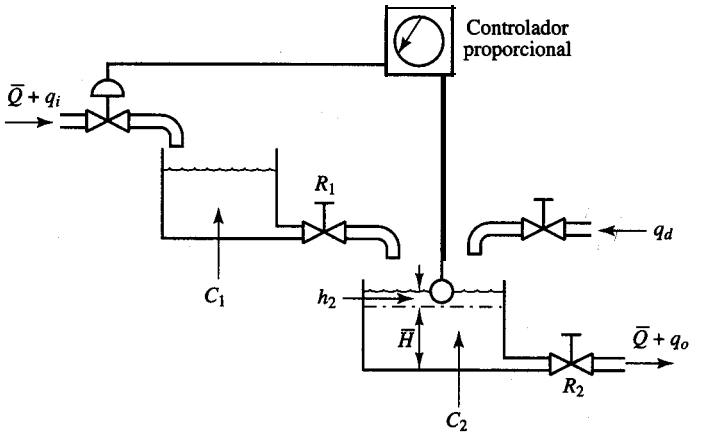


Figura 4–48
Sistema de control de nivel de líquido.

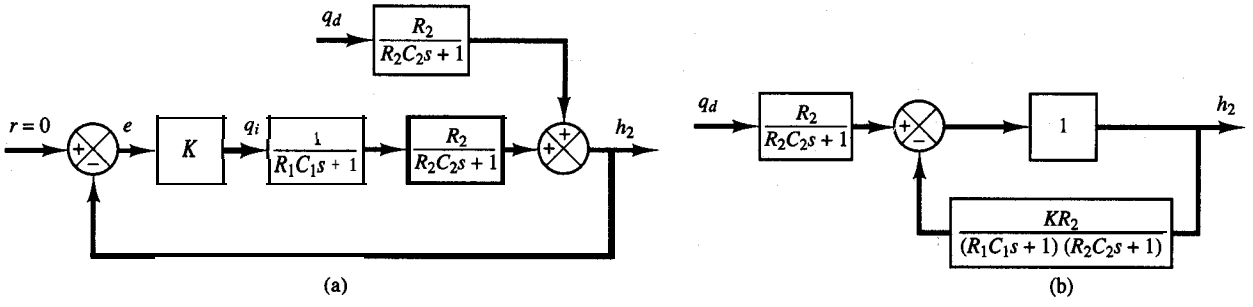


Figura 4-49
(a) Diagrama de bloques del sistema de la figura 4-48; (b) diagrama de bloques modificado.

$$\frac{H_2(s)}{Q_d(s)} = \frac{R_2(R_1C_1s + 1)}{(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1) + KR_2}$$

A partir de esta ecuación, se encuentra la respuesta $H_2(s)$ para la perturbación $Q_d(s)$. El efecto del controlador se observa por la presencia de K en el denominador de esta última ecuación.

Para la perturbación escalón unitario $Q_d(s)$, obtenemos

$$h_2(\infty) = \frac{R_2}{1 + KR_2}$$

o bien

$$\text{Error en estado estable} = -\frac{R_2}{1 + KR_2}$$

El sistema exhibe un desplazamiento (*offset*) en la respuesta para una perturbación escalón unitario.

Observe que las ecuaciones características para la entrada de perturbación y para la entrada de referencia son iguales. La ecuación característica para este sistema es

$$(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1) + KR_2 = 0$$

que se modifica a

$$s^2 + \left(\frac{R_1C_1 + R_2C_2}{R_1C_1R_2C_2}\right)s + \frac{1 + KR_2}{R_1C_1R_2C_2} = 0$$

La frecuencia natural no amortiguada ω_n y el factor de amortiguamiento relativo ζ se obtienen mediante

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1 + KR_2}{R_1C_1R_2C_2}}, \qquad \zeta = \frac{R_1C_1 + R_2C_2}{2\sqrt{R_1C_1R_2C_2}\,\sqrt{1 + KR_2}}$$

Tanto la frecuencia natural no amortiguada como el factor de amortiguamiento relativo dependen del valor de la ganancia K. Esta ganancia debe ajustarse para que las respuestas transitorias de la entrada de referencia y de la entrada de perturbación muestren un amortiguamiento y una velocidad razonables.

A-4-15. Considere el sistema de control de nivel de líquido de la figura 4-50. Un controlador integral hidráulico maneja la válvula de entrada. Suponga-que el flujo de entrada en estado estable es $\bar{Q}$y que el flujo de salida en estado estable también es Q, que la altura en estado estable es H, que el desplazamiento de la válvula piloto en estado estable es $\bar{X} = 0$, y que la posición de la válvula en estado estable es $\bar{Y}$. Suponemos que el punto de ajuste $\bar{R}$ corresponde ala altura en estado estable $\bar{H}$. El punto de ajuste está fijo. Suponga también que el flujo de entrada de perturbación q_d, que es una cantidad pequeña, se aplica al tanque del agua en $t = 0$. Esta perturbación provoca que la altura cambie de $\bar{H}$ a $\bar{H} + h$. Este cambio provoca un cambio en el flujo de salida mediante q_o. A través del controlador hidráulico, el cambio en la altura provoca una modificación en el flujo de entrada de $\bar{Q}$ a $\bar{Q} + q_i$. (El controlador integral tiende a conservar la altura lo más constante posible en presencia de perturbaciones.) Suponemos que todos los cambios son de cantidades pequeñas

Suponiendo los siguientes valores numéricos para el sistema,

$$C = 2\ \text{m}^2, \qquad R = 0.5\ \text{seg/m}^2, \qquad k_v = 1\ \text{m}^2/\text{seg}$$
$$a = 0.25\ \text{m}, \qquad b = 0.75\ \text{m}, \qquad k_1 = 4\ \text{seg}^{-1}$$

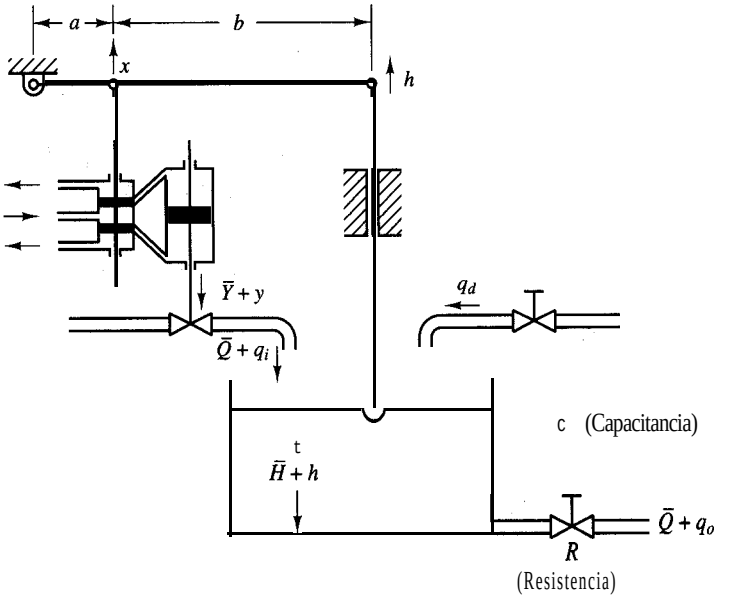


Figura 4–50
Sistema de control de nivel de líquido.

obtenga la respuesta $h(t)$ cuando la entrada de perturbación q_d es una función de escalón unitario. Asimismo obtenga esta respuesta $h(t)$ con MATLAB.

Solución. Dado que el aumento de agua en el tanque durante dt segundos es igual al flujo de entrada neto hacia el tanque durante los mismos dt segundos, tenemos que

$$C\,dh = (q_i - q_o + q_d)\,dt \tag{4-71}$$

en donde

$$q_o = \frac{h}{R} \tag{4-72}$$

Para el mecanismo de la palanca de realimentación, tenemos que

$$x = \frac{a}{a+b}h \tag{4-73}$$

Suponemos que la velocidad del pistón de potencia (la válvula) es proporcional al desplazamiento de la válvula piloto x, o bien,

$$\frac{dy}{dt} = K_1 x \tag{4-74}$$

en donde K_1 es una constante positiva.También suponemos que el cambio en el flujo de entrada q_i es negativamente proporcional al cambio en la apertura de la válvula y, o bien,

$$q_i = -K_v y \tag{4-75}$$

en donde K_v es una constante positiva.

Ahora determinamos las ecuaciones para el sistema del modo siguiente. A partir de las ecuaciones (4-71), (4-72) y (4-7.5) obtenemos

$$C\frac{dh}{dt} = -K_v y - \frac{h}{R} + q_d \tag{4-76}$$

A partir de las ecuaciones (4-73) y (4-74), tenemos que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{K_1 a}{a+b}h \tag{4-77}$$

Sustituyendo los valores numéricos determinados en las ecuaciones (4-76) y (4-77), obtenemos

$$2\frac{dh}{dt} = -y - 2h + q_d$$

$$\frac{dy}{dt} = h$$

Si tomamos la transformada de Laplace de las dos ecuaciones anteriores y suponemos condiciones iniciales de cero, obtenemos

$$2sH(s) = -Y(s) - 2H(s) + Q_d(s)$$

$$sY(s) = H(s)$$

Eliminando Y(s) de las dos últimas ecuaciones y considerando que la entrada de perturbación es una función escalón unitario o que $Q_d(s) = 1/s$, obtenemos

$$H(s) = \frac{s}{2s^2 + 2s + 1}\frac{1}{s} = \frac{0.5}{(s + 0.5)^2 + 0.52}$$

La transformada inversa de Laplace de $H(s)$ da la respuesta en el tiempo h(t).

$$h(t) = 1 - e^{-0.5t} \operatorname{sen} 0.5t$$

Observe que la entrada de perturbación escalón unitario q_d provocó un error transitorio en la altura, mismo que se convierte en cero en estado estable. Por tanto, el controlador integral eliminó el error provocado por la entrada de perturbación q_d.

Graficación de la curva de respuesta h(t) con **MATLAB.** Dado que la respuesta $H(s)$ se obtiene mediante

$$H(s) = \frac{s}{2s^2 + 2s + 1}\frac{1}{s}$$

se usa el programa MATLAB 4-13 para obtener la respuesta a la entrada de perturbación escalón unitario. La curva de respuesta resultante aparece en la figura 4-51.

```
Programa MATLAB 4-13
%------ Respuesta escalón unitario ------
% ***** Introducir el numerador y el denominador de la
% función de transferencia *****
num = [0  1  0];
den = [2  2  1];
% ***** Introducir el comando *****
step(num,den)
grid
title('Respuesta escalón unitario')
```

A-4-16. Considere la respuesta impulso del sistema estándar de segundo orden definido mediante

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Para una entrada impulso unitario, $R(s) = 1$. Por tanto

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2 s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\frac{1}{s}$$

Considere el sistema normalizado en donde $\omega_n = 1$. En tal caso

$$C(s) = \frac{s}{s^2 + 2\zeta s + 1}\frac{1}{s}$$

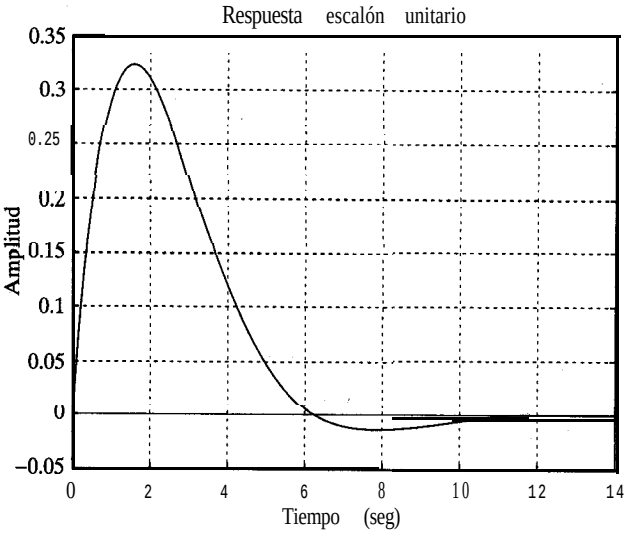
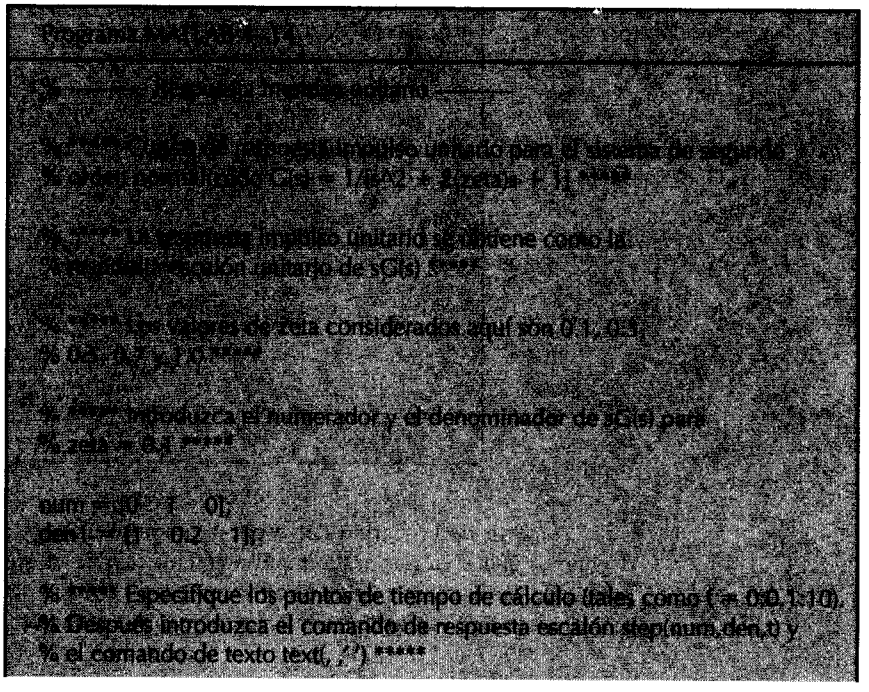


Figura 4–51
Respuesta a la entrada de perturbación escalón unitario.

Considere cinco valores diferentes de zeta: $\zeta = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ y 1.0. Obtenga las curvas de respuesta impulso unitario para cada zeta con MATLAB.

Solución. El programa MATLAB 4-14 contiene una forma de graficar las cinco curvas de respuesta impulso unitario en un mismo par de ejes. La gráfica resultante aparece en la figura 4-52.



```
t = 0:0.1:10;
step(num,den1,t);
text(2.2,0.88,'Zeta = 0.1')

% ***** Retenga esta gráfica y agréguele otras curvas de respuesta
% impulso unitario *****

hold

Current plot held

% ***** Introduzca los denominadores de sG(s) para zeta = 0.3, 0.5,
% 0.7 y 1.0 *****

den2 = [1   0.6   1]; den3 = [1   1   1]; den4 = [1   1.4   1];
den5 = [1   2   1];

% ***** Sobreimponga en la gráfica retenida las curvas de
% respuesta impulso unitario para zeta = 0.3, 0.5, 0.7 y 1.0 introduciendo
% sucesivamente el comando de respuesta escalón step(num,den,t)
% y el comando de texto text( , ,' ') *****

step(num,den2,t);
text(1.33,0.72,'0.3')
step(num,den3,t);
text(1.15,0.58,'0.5')
step(num,den4,t);
text(1.1,0.46,'0.7')
step(num,den5,t);
text(0.8,0.28,'1.0')

% ***** Introduzca la retícula y el título de la gráfica *****

grid
title('Curvas de respuesta impulso para G(s) = 1/[s^2 + 2(zeta)s + 1]')

% ***** Limpie el comando hold de la gráfica *****

hold

Current plot released
```

A partir de las curvas de respuesta impulso unitario para diferentes valores de zeta, concluimos que, si la respuesta impulso c(t) no cambia de signo, el sistema es críticamente amortiguado o sobreamortiguado, en cuyo caso la respuesta escalón correspondiente no tiene sobrepaso pero aumenta o decrementa en forma monotónica y tiende a un valor constante.

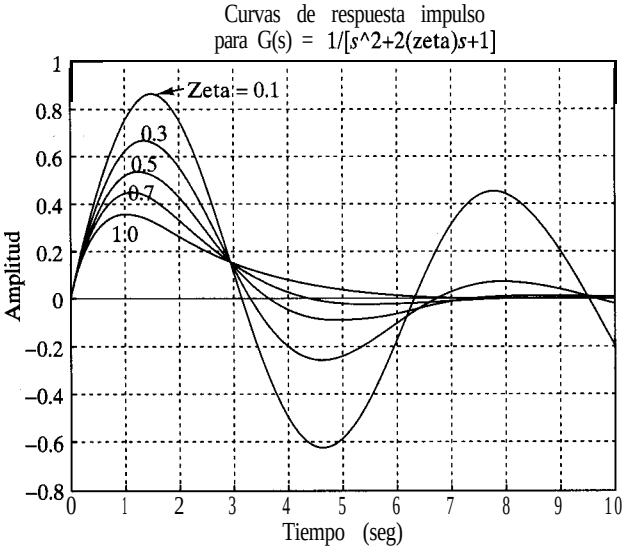


Figura 4-52
Curvas de respuesta impulso unitario.

PROBLEMAS

B-4-1. Un termómetro requiere de un minuto para alcanzar el 98% del valor final de la respuesta a una entrada escalón. Suponiendo que el termómetro es un sistema de primer orden, encuentre la constante de tiempo.

Si el termómetro se coloca en un baño, cuya temperatura cambia en forma lineal a una velocidad de 10°/min, ¿cuánto error muestra el termómetro?

B-4-2. Considere el sistema de la figura 4-53. Un servomotor de cd controlado por armadura, maneja una carga formada por el momento de inercia J_L. El par que desarrolla el motor es T. El desplazamiento angular del rotor del motor y del elemento de carga son θ_m y θ, respectivamente. La relación de engranes es $n = \theta/\theta_m$. Obtenga la función de transferencia $\Theta(s)/E_i(s)$.

B-4-3. Considere el sistema de la figura 4–54(a). El factor de amortiguamiento relativo de este sistema es 0.158 y la frecuencia natural no amortiguada es de 3.16 radlseg. Para mejorar la estabilidad relativa, se emplea una realimentación de tacómetro. La figura 4–54(b) muestra tal sistema de realimentación de tacómetro.

Determine el valor de K_h para que el factor de amortiguamiento relativo del sistema sea 0.5. Dibuje curvas de respuesta escalón unitario tanto del sistema original como del sistema de realimentación de tacómetro. También dibuje las curvas de error contra el tiempo para la respuesta rampa unitaria de ambos sistemas.

B-4-4. Obtenga la respuesta escalón unitario de un sistema realimentado unitariamente, cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{4}{s(s + 5)}$$

B-4-5. Considere la respuesta escalón unitario de un sistema de control realimentado unitariamente cuya función de transferencia en lazo abierto es

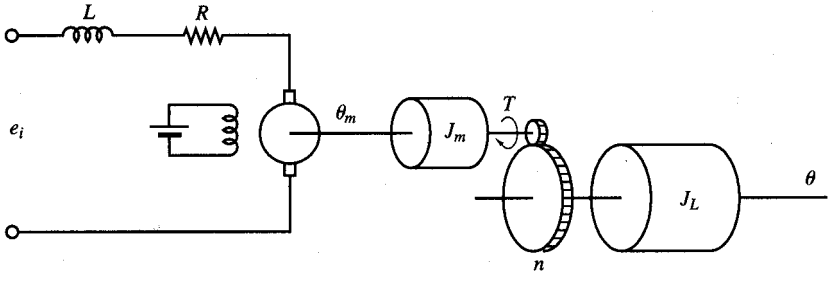
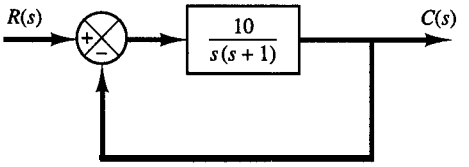
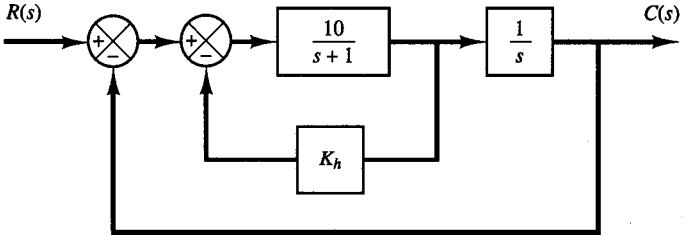


Figura 4–53
Sistema servomotor de cd controlado por armadura.



(a)



(b)

Figura 4–54
(a) Sistema de control; (b) sistema de control con realimentación de tacómetro.

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 1)}$$

Obtenga el tiempo de levantamiento, el tiempo pico, el sobrepaso máximo y el tiempo de asentamiento.

B-4-6. Considere el sistema en laxo cerrado obtenido mediante

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Determine los valores de ζ y ω_n para que el sistema responda a una entrada escalón con un sobrepaso de aproximadamente 5% y con un tiempo de asentamiento de 2 seg. (Use el criterio del 2% .)

B-4-7. La figura 4–55 es un diagrama de bloques de un sistema de control de posición de un vehículo espacial. Suponiendo que la constante de tiempo T del controlador es de 3 seg y que la razón entre el par y la inercia K/J es de $\frac{2}{3}$ rad²/seg², encuentre el factor de amortiguamiento relativo del sistema.

B-4-8. Considere el sistema de la figura 4–56. Inicialmente el sistema está en reposo. Suponga que el carro se pone en movimiento mediante una fuerza de impulso unitario. ¿Puede detenerse mediante otra fuerza de impulso equivalente?

B-4-9. Obtenga la respuesta impulso unitario y la respuesta escalón unitario de un sistema realimentado unitariamente cuya función de transferencia en laxo abierto sea

$$G(s) = \frac{2s + 1}{s^2}$$

B-4-10. Considere el sistema de la figura 4-57. Demuestre que la función de transferencia $Y(s)/X(s)$ tiene un cero en

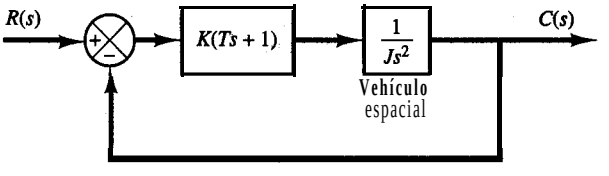


Figura 4–55
Sistema de control de la posición de un vehículo espacial.

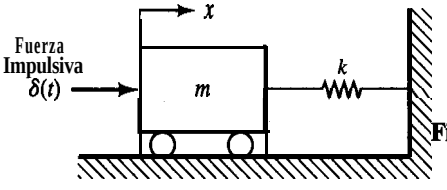


Figura 4–56
Sistema mecánico.

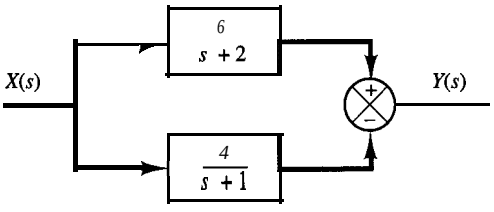


Figura 4–57
Sistema con un cero en el simiplano derecho del plano s.

el semiplano derecho del plano s. A continuación obtenga y(t) cuando x(t) sea escalón unitario. Grafique y(t) contra *t*.

B-4-11. Se sabe que un sistema oscilatorio tiene la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Suponga que existe un registro de una oscilación amortiguada, tal como aparece en la figura 4-58. Determine el factor de amortiguamiento relativo ζ del sistema a partir de la gráfica.

B-4-12. Remitiéndonos al sistema de la figura 4-59, determine los valores de K y k tales que el sistema tenga un factor de amortiguamiento relativo ζ de 0.7 y una frecuencia natural no amortiguada ω_n de 4 rad/seg.

B-4-13. Considere el sistema de la figura 4-60. Determine el valor de k de modo que el factor de amortiguamiento relativo ζ sea 0.5. Después obtenga el tiempo de levantamiento t_r, el tiempo pico t_p, el sobrepaso máximo M_t y el tiempo de asentamiento t_s, en la respuesta escalón unitario.

B-4-14. Use MATLAB para obtener la respuesta escalón unitario, la respuesta rampa unitaria y la respuesta impulso unitario del sistema siguiente:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$$

en donde $R(s)$ y C(s) son transformadas de Laplace de la entrada $R(t)$ y la salida $c(t)$, respectivamente.

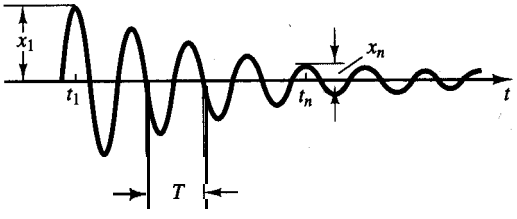


Figura 4–58
Oscilación amortiguada.

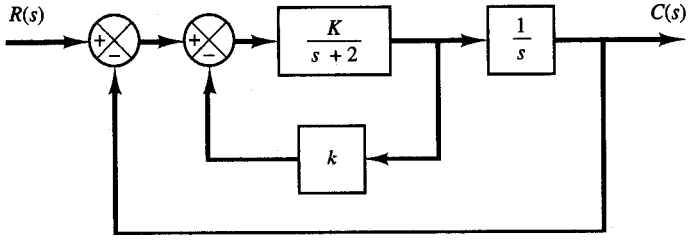


Figura 4-59
Sistema en lazo cerrado.

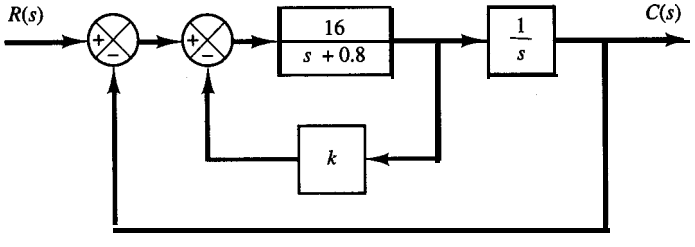


Figura 4-60
Diagrama de bloques de un sistema.

B-4-15. Con MATLAB, obtenga la respuesta escalón unitario, rampa unitaria e impulso unitario del sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

en donde u es la entrada y y es la salida.

B-4-16. Considere el mismo problema analizado en el ejercicio A416. Se pretende usar marcas distintas para curvas diferentes (tales como 'o', 'x', '--', '-', ':'). Modifique el programa MATLAB 4-14 para este propósito.

5

Acciones básicas de control y respuesta de sistemas de control

5-1 INTRODUCCIÓN

Un controlador automático compara el valor real de la salida de una planta con la entrada de referencia (el valor deseado), determina la desviación y produce una señal de control que reducirá la desviación a cero o a un valor pequeño. La manera en la cual el controlador automático produce la señal de control se denomina ***acción de control.***

En este capítulo analizaremos primero las acciones de control básicas que se usan en los sistemas de control industriales. Después revisaremos los efectos de las acciones de control integral y derivativa en la respuesta del sistema. A continuación consideraremos la respuesta de sistemas de orden superior. Cualquier sistema físico se volverá inestable si alguno de los polos en lazo cerrado se encuentra en el semiplano derecho del plano s. Para verificar la existencia o inexistencia de tales polos en el semiplano derecho del plano, es útil el criterio de estabilidad de Routh. En este capítulo incluiremos un análisis de este criterio de estabilidad.

Muchos controladores automáticos industriales son electrónicos, hidráulicos, neumáticos o alguna combinación de éstos. En este capítulo presentamos los principios de los controladores neumáticos, hidráulicos y electrónicos.

El panorama del capítulo es el siguiente: la sección 5-1 presentó el material de introducción. La sección 5-2 ofrece las acciones básicas de control que suelen usar los controladores automáticos industriales. La sección 5-3 analiza los efectos de las acciones de control integral y derivativa sobre el desempeño de un sistema. La sección 54 aborda los sistemas de orden superior y la sección 5-5 trata el criterio de estabilidad de Routh. Las secciones 5-6 y 5-7 analizan los controladores neumáticos e hidráulicos, respectivamente. En ellas se presenta el principio de la operación de los controladores neumáticos e hidráulicos y los métodos para generar diversas acciones de control. La sección 5-8 trata los controladores electrónicos que

usan los amplificadores operacionales. La sección 5-9 analiza el adelanto de fase y el atraso de fase en la respuesta senoidal. Se obtiene la función de transferencia senoidal y se muestra el adelanto de fase y el atraso de fase que pueden ocurrir en la respuesta senoidal. Por último, en la sección 5-10 tratamos los errores en estado estable en las respuestas de un sistema.

5-2 ACCIONES BÁSICAS DE CONTROL

En esta sección analizaremos los detalles de las acciones básicas de control que utilizan los controladores analógicos industriales. Empezaremos con una clasificación de los controladores analógicos industriales.

Clasificación de los controladores industriales. Los controladores industriales se clasifican, de acuerdo con sus acciones de control, como:

1. De dos posiciones o de encendido y apagado (*on/off*)
2. Proporcionales
3. Integrales
4. Proporcionales-integrales
5. Proporcionales-derivativos
6. Proporcionales-integrales-derivativos

Casi todos los controladores industriales emplean como fuente de energía la electricidad o un fluido presurizado, tal como el aceite o el aire. Los controladores también pueden clasificarse, de acuerdo con el tipo de energía que utilizan en su operación, como neumáticos, hidráulicos o electrónicos. El tipo de controlador que se use debe decidirse con base en la naturaleza de la planta y las condiciones operacionales, incluyendo consideraciones tales como seguridad, costo, disponibilidad, confiabilidad, precisión, peso y tamaño.

Controlador automático, actuador y sensor (elemento de medición). La figura 5-1 es un diagrama de bloques de un sistema de control industrial que consiste en un controlador automático, un actuador, una planta y un sensor (elemento de medición). El controlador detecta la señal de error, que por lo general, está en un nivel de potencia muy bajo, y la amplifica a un nivel lo suficientemente alto. La salida de un controlador automático se alimenta a un actuador, tal como un motor 0 una válvula neumáticos, un motor hidráulico, 0 un motor eléctrico. (El ac-

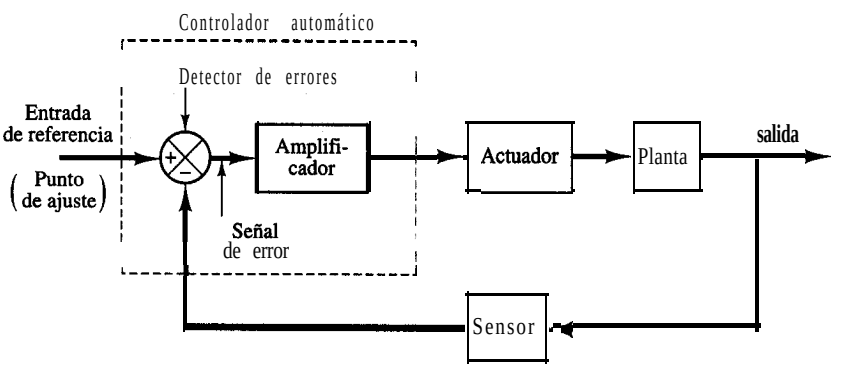


Figura 5-1
Diagrama de bloques de un sistema de control industrial, formado por un controlador automático, un actuador, una planta y un sensor (elemento de medición).

tuador es un dispositivo de potencia que produce la entrada para la planta de acuerdo con la señal de control, a fin de que la señal de salida se aproxime a la señal de entrada de referencia.)

El sensor, o elemento de medición, es un dispositivo que convierte la variable de salida en otra variable manejable, tal como un desplazamiento, una presión, o un voltaje, que pueda usarse para comparar la salida con la señal de entrada de referencia. Este elemento está en la trayectoria de realimentación del sistema en lazo cerrado. El punto de ajuste del controlador debe convertirse en una entrada de referencia con las mismas unidades que la señal de realimentación del sensor o del elemento de medición.

Controladores autooperados. En la mayor parte de los controladores automáticos industriales, se usan unidades separadas para el elemento de medición y el actuador. Sin embargo, en algunos muy sencillos, como los controladores autooperados, estos elementos se integran en una unidad. Los controladores autooperados utilizan la potencia desarrollada por el elemento de medición, son muy sencillos y poco costosos. Un ejemplo de un controlador autooperado aparece en la figura 5-2. El punto de ajuste lo determina la modificación de la fuerza del resorte. El diafragma mide la presión controlada. La señal de error es la fuerza neta que actúa sobre el diafragma. Su posición determina la apertura de la válvula.

La operación del controlador autooperado es la siguiente: suponga que la presión de salida es más baja que la presión de referencia, determinada por el punto de ajuste. Por tanto, la fuerza de tensión hacia abajo es mayor que la fuerza de presión hacia arriba, lo cual produce un movimiento hacia abajo del diafragma. Esto aumenta la velocidad de flujo y eleva la presión de salida. Cuando la fuerza de presión hacia arriba es igual a la fuerza de tensión hacia abajo, el vástago de la válvula permanece estacionario y el de flujo es constante. Por el contrario, si la presión de salida es más alta que la presión de referencia, la apertura de la válvula se hace más pequeña y reduce el flujo que pasa a través de ella. Los controladores autooperados se usan mucho en el control de la presión del agua y el gas.

Acción de control de dos posiciones o de encendido y apagado (on/off). En un sistema de control de dos posiciones, el elemento de actuación sólo tiene dos posiciones fijas que, en muchos casos, son simplemente encendido y apagado. El control de dos posiciones o de encendido y apagado es relativamente simple y barato, razón por la cual su uso es extendido en sistemas de control tanto industriales como domésticos.

Supongamos que la señal de salida del controlador es u(t) y que la señal de error es e(t). En el control de dos posiciones, la señal u(t) permanece en un valor ya sea máximo o mínimo, dependiendo de si la señal de error es positiva o negativa. De este modo,

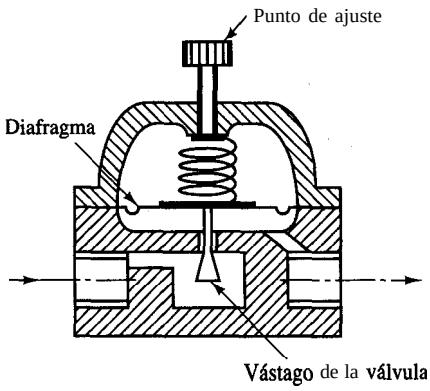


Figura 5-2 Controlador autooperado.

$$u(t) = U_1, \quad \text{para e(t)} > 0$$
$$= U_2, \quad \text{para e(t)} < 0$$

en donde U_1 y U_2 son constantes. Por lo general, el valor mínimo de U_2 es cero o $-U_1$. Es común que los controladores de dos posiciones sean dispositivos eléctricos, en cuyo caso se usa extensamente una válvula eléctrica operada por solenoides. Los controladores neumáticos proporcionales con ganancias muy altas funcionan como controladores de dos posiciones y, en ocasiones, se denominan controladores neumáticos de dos posiciones.

Las figuras 5–3(a) y (b) muestran los diagramas de bloques para dos controladores de dos posiciones. El rango en el que debe moverse la señal de error antes de que ocurra la conmutación se denomina ***brecha diferencial.*** En la figura 5–3(b) se señala una brecha diferencial. Tal brecha provoca que la salida del controlador $u(t)$ conserve su valor presente hasta que la señal de error se haya desplazado ligeramente más allá de cero. En algunos casos, la brecha diferencial es el resultado de una fricción no intencionada y de un movimiento perdido; sin embargo, con frecuencia se provoca de manera intencional para evitar una operación demasiado frecuente del mecanismo de encendido y apagado.

Considere el sistema de control del nivel de líquido de la figura 5–4(a), en donde se usa la válvula electromagnética de la figura 5–4(b) para controlar el flujo de entrada. Esta válvula está abierta o cerrada. Con este control de dos posiciones, el flujo de entrada del agua es una constante positiva o cero. Como se aprecia en la figura 5-5, la señal de salida se mueve continuamente entre los dos límites requeridos y provoca que el elemento de ac-

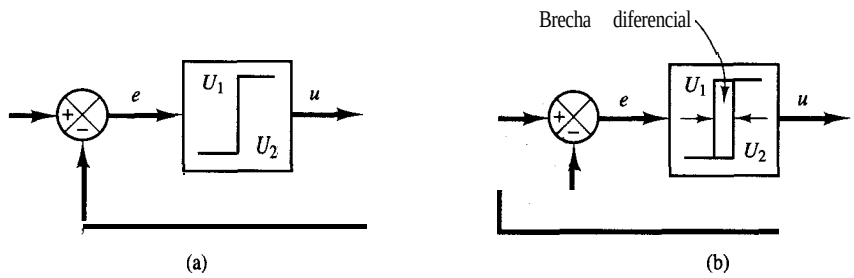


Figura 5–3
(a) Diagrama de bloques de un controlador de encendido y apagado; (b) diagrama de bloques de un controlador de encendido y apagado con una brecha diferencial.

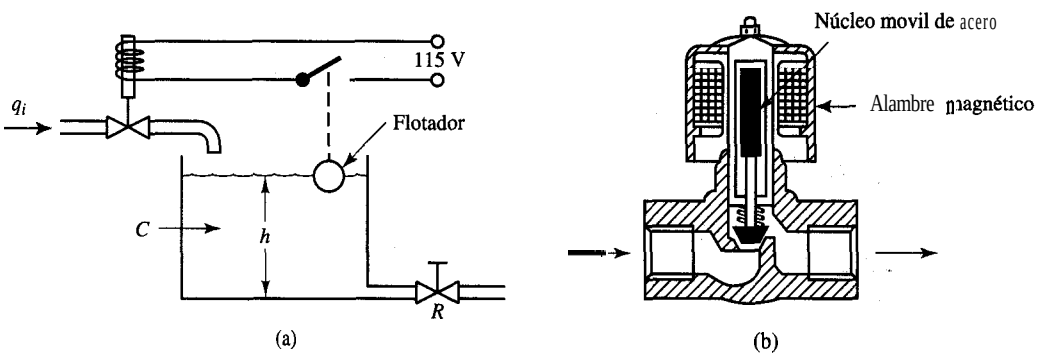


Figura 5-4
(a) Sistema del control del nivel de líquido; (b) válvula electromagnética.

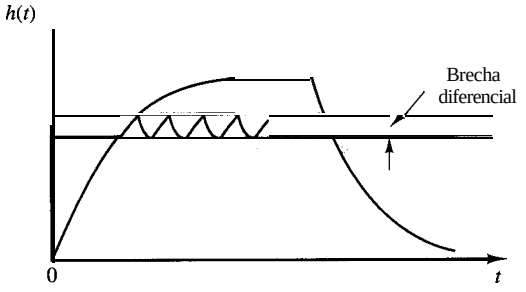


Figura 5-5
Nivel h(t) contra t para el sistema de la figura 5–4(a).

tuación se mueva de una posición fija a la otra. Observe que la curva de salida sigue una de las dos curvas exponenciales, una de las cuales corresponde a la curva de llenado y la otra a la curva de vaciado.Tal oscilación de salida entre dos límites es una respuesta común característica de un sistema bajo un control de dos posiciones.

En la figura 5-5 observamos que, para reducir la amplitud de la oscilación de salida, debe disminuirse la brecha diferencial. Sin embargo, la reducción de la brecha diferencial aumenta la cantidad de conmutaciones de encendido y apagado por minuto y reduce la vida útil del componente. La magnitud de la brecha diferencial debe determinarse a partir de consideraciones tales como la precisión requerida y la vida del componente.

Acción de control proporcional. Para un controlador con acción de control proporcional, la relación entre la salida del controlador $u(t)$ y la señal de error e(t) es:

$$u(t) = K_p e(t)$$

o bien, en cantidades transformadas por el método de Laplace,

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

en donde K_p se considera la ganancia proporcional.

Cualquiera que sea el mecanismo real y la forma de la potencia de operación, el controlador proporcional es, en esencia, un amplificador con una ganancia ajustable. En la figura 5-6 se presenta un diagrama de bloques de tal controlador.

Acción de control integral. En un controlador con acción de control integral, el valor de la salida del controlador $u(t)$ se cambia a una razón proporcional a la señal de error e(t). Es decir,

$$\frac{du(t)}{dt} = K_i e(t)$$

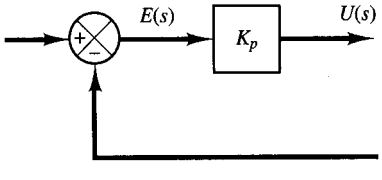


Figura 5–6
Diagrama de bloques de un controlador proporcional.

o bien

$$u(t) = K_i \int_0^t e(t)\, dt$$

en donde K_i es una constante ajustable. La función de transferencia del controlador integral es

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

Si se duplica el valor de $e(t)$, el valor de $u(t)$ varía dos veces más rápido. Para un error de cero, el valor de $u(t)$ permanece estacionario. En ocasiones, la acción de control integral se denomina control de reajuste (*reset*). La figura 5-7 muestra un diagrama de bloques de tal controlador.

Acción de control proporcional-integral. La acción de control de un controlador proporcional-integral (PI) se define mediante

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t)\, dt$$

o la función de transferencia del controlador es

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

en donde K_p es la ganancia proporcional y T_i se denomina ***tiempo integral.*** Tanto K_p como T_i son ajustables. El tiempo integral ajusta la acción de control integral, mientras que un cambio en el valor de K_p afecta las partes integral y proporcional de la acción de control. El inverso del tiempo integral T_i se denomina ***velocidad de reajuste.*** La velocidad de reajuste es la cantidad de veces por minuto que se duplica la parte proporcional de la acción de control. La velocidad de reajuste se mide en términos de las repeticiones por minuto. La figura 5–8(a) muestra un diagrama de bloques de un controlador proporcional más integral. Si la señal de error $e(t)$ es una función escalón unitario, como se aprecia en la figura 5–8(b), la salida del controlador $u(t)$ se convierte en lo que se muestra en la figura 5–8(c).

Acción de control proporcional-derivativa. La acción de control de un controlador proporcional-derivativa (PD) se define mediante

$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

y la función de transferencia es

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s)$$

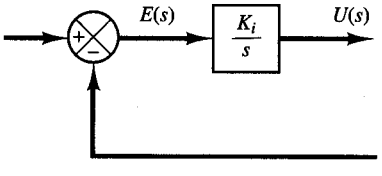


Figura 5–7
Diagrama de bloques de un controlador integral.

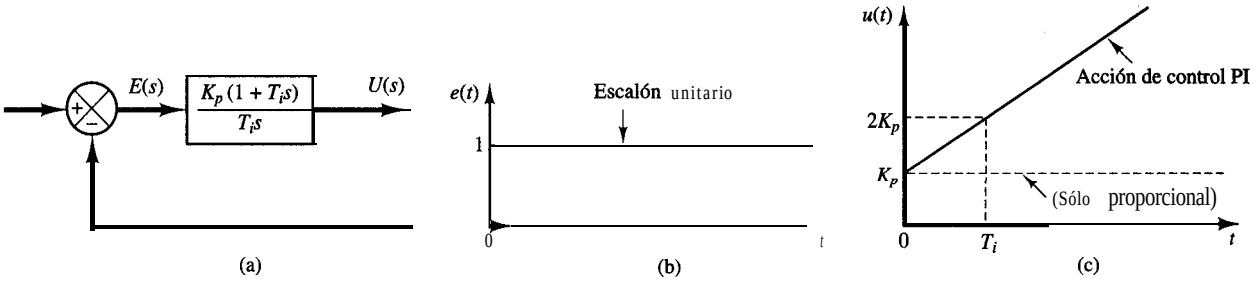


Figura 5-8
(a) Diagrama de bloques de un controlador proporcional-integral; (b) y (c) diagramas que muestran una entrada escalón unitario y la salida del controlador.

en donde K_p es la ganancia proporcional y T_d es una constante denominada ***tiempo derivativo.*** Tanto K_p como T_d son ajustables. La acción de control derivativa, en ocasiones denominada ***control de velocidad,*** ocurre donde la magnitud de la salida del controlador es proporcional a la velocidad de cambio de la señal de error. El tiempo derivativo T_d ***es*** el intervalo de tiempo durante el cual la acción de la velocidad hace avanzar el efecto de la acción de control proporcional. La figura 5–9(a) muestra un diagrama de bloques de un controlador proporcional-derivativo. Si la señal de error ***e(t)*** es una función rampa unitaria como se aprecia en la figura 5–9(b), la salida del controlador $u(t)$ se convierte en la que se muestra en la figura 5–9(c). La acción de control derivativa tiene un carácter de previsión. Sin embargo, es obvio que una acción de control derivativa nunca prevé una acción que nunca ha ocurrido.

Aunque la acción de control derivativa tiene la ventaja de ser de previsión, tiene las desventajas de que amplifica las señales de ruido y puede provocar un efecto de saturación en el actuador.

Observe que la acción de control derivativa no se usa nunca sola, debido a que sólo es eficaz durante periodos transitorios.

Acción de control proporcional-integral-derivativa. La combinación de una acción de control proporcional, una acción de control integral y una acción de control derivativa se denomina acción de control proporcional-integral-derivativa (PID). Esta acción

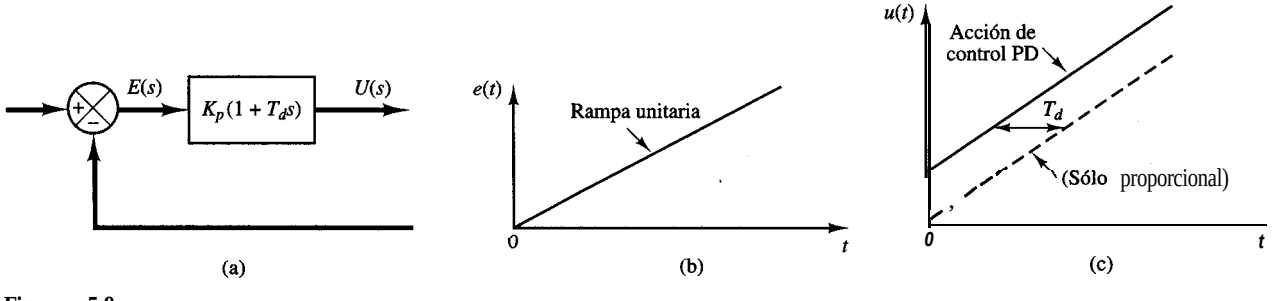


Figura 5-9
(a) Diagrama de bloques de un controlador proporcional-derivativo; (b) y (c) diagramas que muestran una entrada rampa unitaria y la salida del controlador.

combinada tiene las ventajas de cada una de las tres acciones de control individuales. La ecuación de un controlador con esta acción combinada se obtiene mediante

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i}\int_0^t e(t)\,dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

o la función de transferencia es

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

en donde K_p es la ganancia proporcional, T_i es el tiempo integral y T_d es el tiempo derivativo. El diagrama de bloques de un controlador proporcional-integral-derivativo aparece en la figura 5–10(a). Si **e(t)** es una función rampa unitaria, como la que se observa en la figura 5–10(b), la salida del controlador $u(t)$ se convierte en la de la figura 5–10(c).

Efectos del sensor (elemento de medición) sobre el desempeño del sistema. Dado que las características dinámica y estática del sensor o del elemento de medición afecta la indicación del valor real de la variable de salida, el sensor cumple una función importante para determinar el desempeño general del sistema de control. Por lo general, el sensor determina la función de transferencia en la trayectoria de realimentación. Si las constantes de tiempo de un sensor son insignificantes en comparación con otras constantes de tiempo del sistema de control, la función de transferencia del sensor simplemente se convierte en una constante. Las figuras 5-ll(a), (b) y (c) muestran diagramas de bloques de controladores automáticos con un sensor de primer orden, un sensor de segundo orden sobreamortiguado y un sensor de segundo orden subamortiguado, respectivamente. Con frecuencia la respuesta de un sensor térmico es del tipo de segundo orden sobreamortiguado.

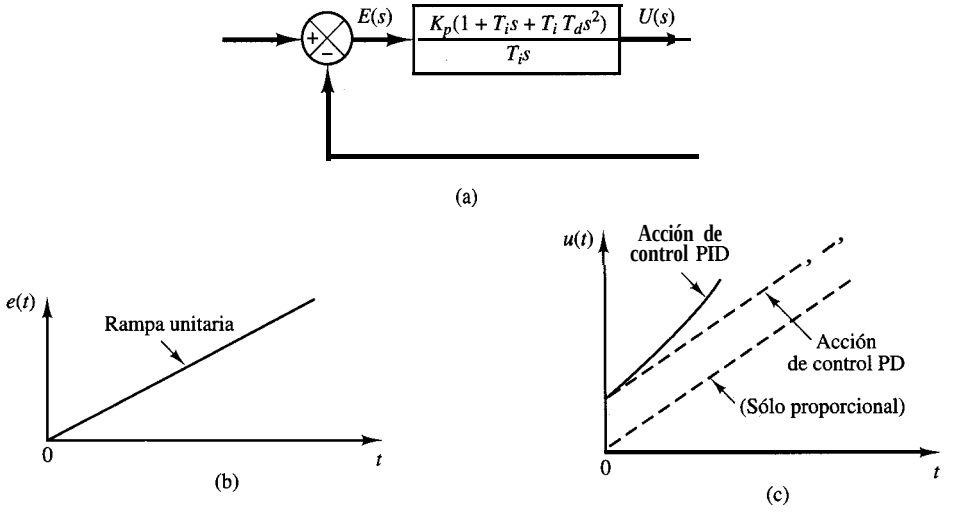


Figura 5-10
(a) Diagrama de bloques de un controlador proporcional-integral-derivativo; (b) y (c) diagramas que muestran una entrada rampa unitaria y la salida del controlador.

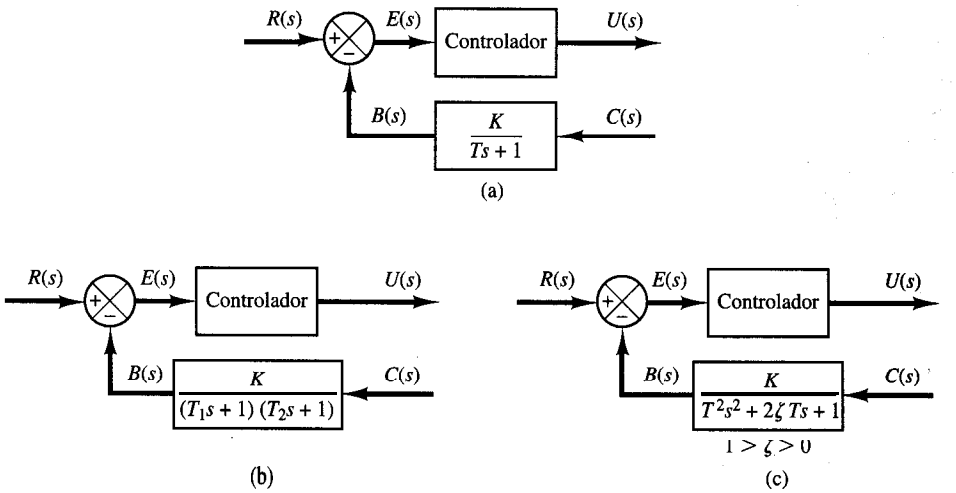


Figura 5–11
Diagramas de bloques de controladores automáticos con: (a) un sensor de primer orden; (b) un sensor de segundo orden sobreamortiguado; (c) un sensor de segundo orden subamortiguado.

5-3 EFECTOS DE LAS ACCIONES DE CONTROL INTEGRAL Y DERIVATIVO SOBRE EL DESEMPEÑO DE UN SISTEMA

En esta sección investigaremos los efectos de las acciones de control integral y derivativa sobre el desempeño de un sistema. Aquí sólo consideraremos los sistemas simples, para apreciar con claridad los efectos de las acciones de control integral y derivativa sobre el desempeño de un sistema.

Acción de control integral. En el control proporcional de una planta, cuya función de transferencia no posee un integrador $1/s$, hay un error en estado estable, o desplazamiento (offset), en la respuesta para una entrada escalón. Tal offset se elimina si se incluye la acción de control integral en el controlador.

En el control integral de una planta, la señal de control, que es la señal de salida a partir del controlador, es, en todo momento el área bajo la curva de la señal de error hasta tal momento. La señal de control $u(t)$ tiene un valor diferente de cero cuando la señal de error e(t) es cero, como se aprecia en la figura 5–12(a). Esto es imposible en el caso del controlador proporcional, dado que una señal de control diferente de cero requiere de una señal de error diferente de cero. (Una señal de error diferente de cero en estado estable significa que hay una equivalencia.) La figura 5–12(b) muestra la curva e(t) contra t y la curva u(t) correspondiente contra t cuando el controlador es de tipo proporcional.

Observe que la acción de control integral, aunque elimina el offset o el error en estado estable, puede conducir a una respuesta oscilatoria de amplitud decreciente lenta o, incluso, de amplitud creciente, y ambos casos, por lo general, se consideran inconvenientes.

Control integral de los sistemas de control del nivel de liquido. En la sección 4-2 encontramos que el control proporcional de un sistema del nivel de líquido provoca un error en estado estable con una entrada escalón. Ahora mostraremos que tal error se elimina si se incluye en el controlador una acción de control integral.

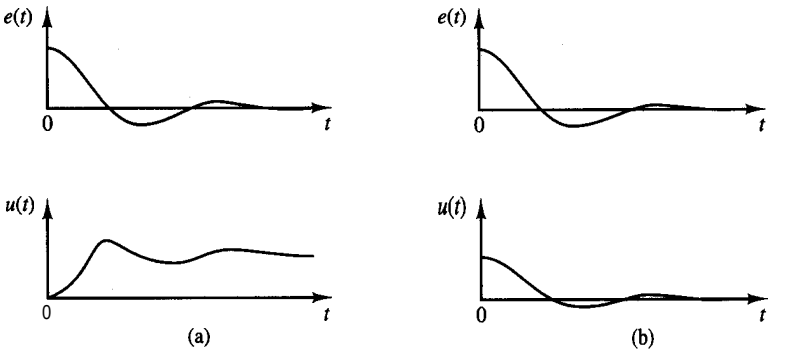


Figura **5–12**
(a) Gráficas de las curvas e(t) y u(t) que muestran una señal de control diferente de cero cuando la señal de error es cero (control integral); (b) gráficas de las curvas e(f) y $u(t)$ que muestran una señal de control de cero cuando la señal de error es cero (control proporcional).

La figura 5–13(a) muestra un sistema del control del nivel de líquido. Suponemos que el controlador es integral. También suponemos que las variables x, q_i, h y q_o, que se miden a partir de sus valores en estado estable respectivos $\bar{X}$, $\bar{Q}$, $\bar{H}$ y $\bar{Q}$, son cantidades pequeñas, por lo que el sistema se considera lineal. Bajo estas suposiciones, el diagrama de bloques del sistema se obtiene como el de la figura 5–13(b). A partir de la figura 5–13(b), la función de transferencia en lazo cerrado entre $H(s)$ y X(s) es

$$\frac{H(s)}{X(s)} = \frac{KR}{RCs^2 + s + KR}$$

Por tanto

$$\frac{E(s)}{X(s)} = \frac{X(s) - H(s)}{X(s)}$$

$$= \frac{RCs^2 + s}{RCs^2 + s + KR}$$

Dado que el sistema es estable, el error en estado estable para la respuesta escalón unitario se obtiene aplicando el teorema de valor final, del modo siguiente:

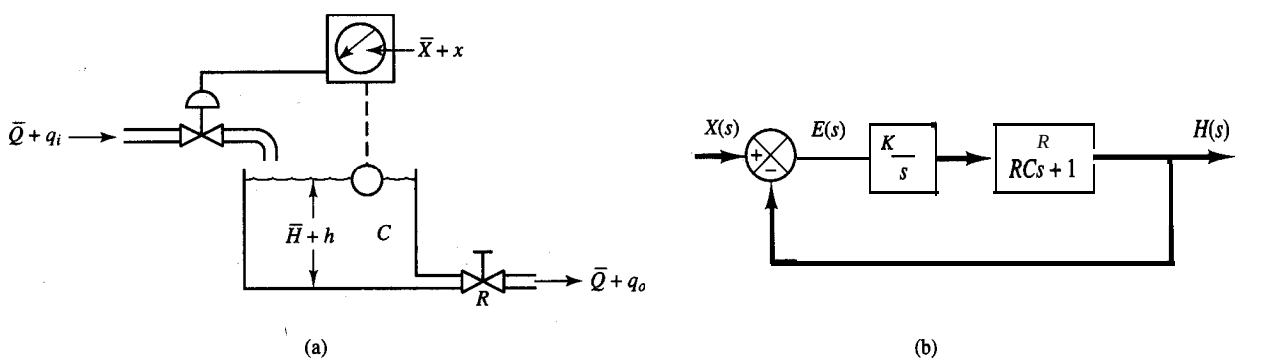


Figura 5–13
(a) Sistema de control del nivel de líquido; (b) diagrama de bloques del sistema.

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s)$$
$$= \lim_{s\to 0} \frac{s(RCs^2 + s)}{RCs^2 + s + KR}\frac{1}{s}$$
$$= 0$$

Por consiguiente, el control integral del sistema del nivel de líquido elimina el error en estado estable en la respuesta a la entrada escalón. Éste es un mejoramiento importante sobre el control proporcional solo, que produce un *offset.*

Respuesta a perturbaciones de par (control proporcional). Investiguemos el efecto de una perturbación de par que ocurre en el elemento de carga. Considere el sistema de la figura 5-14. El controlador proporcional produce un par t para posicionar el elemento de carga, que consiste en el momento de inercia y una fricción viscosa. La perturbación de par se representa mediante D.

Suponiendo que la entrada de referencia es cero, o $R(s) = 0$, la función de transferencia entre $C(s)$ y $D(s)$ se obtiene mediante

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{1}{Js^2 + bs + K_p}$$

Por tanto

$$\frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{C(s)}{D(s)} = -\frac{1}{Js^2 + bs + K_p}$$

El error en estado estable producido por un par de perturbación escalón de magnitud T_d se obtiene mediante

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s)$$
$$= \lim_{s\to 0} \frac{-s}{Js^2 + bs + K_p}\frac{T_d}{s}$$
$$= -\frac{T_d}{K_p}$$

En el estado estable, el controlador proporcional aporta el par $-T_d$, que tiene igual magnitud pero signo opuesto que el par de perturbación T_d. La salida en estado estable producida por el par de perturbación escalón es

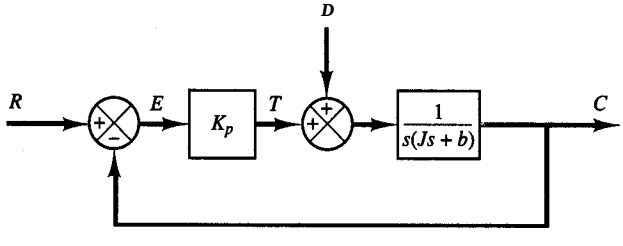


Figura 5-14
Sistema de control con una perturbación de par.

$$c_{ss} = -e_{ss} = \frac{T_d}{K_p}$$

El error en estado estable se reduce si se incrementa el valor de la ganancia K_p. Sin embargo, acrecentar este valor provocará que la respuesta del sistema sea más oscilatoria.

Obtención de respuestas con MATLAB. En las secciones siguientes, obtendremos las curvas de respuesta del sistema de la figura 5-14 cuando está sujeto a una perturbación escalón unitario. Específicamente, obtendremos curvas de respuesta escalón para un valor pequeño de K_p y un valor grande de K_p.

Consideremos dos casos:

Caso 1: $J = 1, b = 0.5, K_p = 1$ (sistema 1):

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1}$$

Caso 2: $J = 1, b = 0.5, K_p = 4$ (sistema 2):

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 4}$$

Observe que, para el sistema 3

```
numl = [0  0  1]
denl = [1  0.5  1]
```

Para el sistema 2

```
num2 = [0  0  1]
den2 = [1  0.5  41
```

En el programa MATLAB 5-1, usamos notaciones **yl** y y2 para la respuesta. **yl** es la respuesta c(t) del sistema 1 y y2 es la respuesta c(t) del sistema 2.

Observe que, en el programa MATLAB 5-1, usamos el comando plot (graficar) con argumentos múltiples, en lugar de usar el comando **hold** (mantener). (Se obtiene el mismo resultado de cualquier forma.) Para usar el comando **plot** con argumentos múltiples, el tamaño de los vectores **yl** y y2 no necesita ser el mismo. Sin embargo, es conveniente que los dos vectores sean de la misma longitud. Por ende, especificamos la misma cantidad de puntos de cálculo determinando los puntos de tiempo de cálculo (tales como t = 0:0.1:20). El comando **step** debe incluir este tiempo t especificado por el usuario. De este modo, en el programa MATLAB 5-1 usamos el siguiente comando **step:**

```
[y, x, t] = step(num, den,t)
```

Las curvas de respuesta escalón unitario obtenidas mediante el programa MATLAB 5-1 aparecen en la figura 5-15.

Programa MATLAB 5–1

```
% --------- Graficar dos curvas de respuesta escalón en
% un solo par de ejes ----------

% *****Introducir los numeradores y los denominadores de
% dos funciones de transferencia*****

num1 = [0   0   1];
den1 = [1   0.5   1];
num2 = [0   0   1];
den2 = [1   0.5   4];

% *****Introducir los comandos siguientes para graficar dos
% curvas de respuesta escalón y1 contra t y y2 contra t en un
% diagrama y escribir los textos 'sistema uno' y 'sistema dos' para
% diferenciar dos curvas *****

t = 0:0.1:20;
[y1,x1,t] = step(num1,den1,t);
[y2,x2,t] = step(num2,den2,t);
plot(t,y1,t,y2)
grid
text(11,0.75, 'Sistema uno'), text(11.2,0.16, 'Sistema dos').

% ***** Agregar el título de la gráfica xlabel y ylabel *****

title('Respuestas escalón de dos sistemas')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salidas y1 y y2')
```

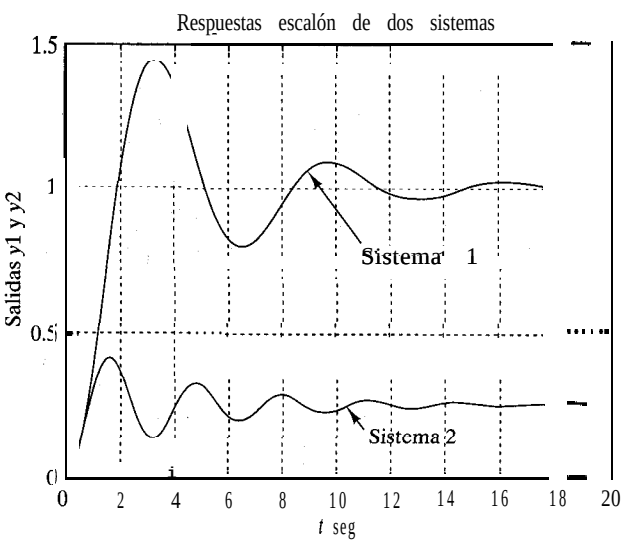


Figura5-15
Curvas de respuesta escalón unitario.

Respuesta a perturbaciones de par (control proporcional-integral). Para eliminar el offset debido a una perturbación de par, el controlador proporcional se sustituye con un controlador proporcional-integral, y luego, mientras existe una señal de error, el controlador desarrolla un par para reducir este error, siempre y cuando el sistema de control sea estable.

La figura 5-16 muestra el control proporcional-integral del elemento de carga, formado por el momento de inercia y una fricción viscosa.

La función de transferencia en lazo cerrado entre C(s) y $D(s)$ es

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{s}{Js^3 + bs^2 + K_p s + \dfrac{K_p}{T_i}}$$

Ante la ausencia de la entrada de referencia, o r(t) = 0, la señal de error se obtiene de

$$E(s) = -\frac{s}{Js^3 + bs^2 + K_p s + \dfrac{K_p}{T_i}} D(s)$$

Si este sistema de control es estable, es decir, si las raíces de la ecuación característica

$$Js^3 + bs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i} = 0$$

tienen partes reales negativas, el error en estado estable en la respuesta a un par de perturbación escalón unitario se obtiene aplicando el teorema de valor final del modo siguiente:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \to 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{-s^2}{Js^3 + bs^2 + K_p s + \dfrac{K_p}{T_i}} \frac{1}{s} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, el error en estado estable para el par de perturbación escalón se elimina si el controlador es del tipo proporcional-integral.

Observe que la acción de control integral agregada al control proporcional convirtió el sistema, originalmente de segundo orden, en uno de tercer orden. Por ende, el sistema de control puede volverse inestable para un valor grande de K_p, dado que las raíces de la ecuación característica pueden tener partes reales positivas. (El sistema de segundo orden

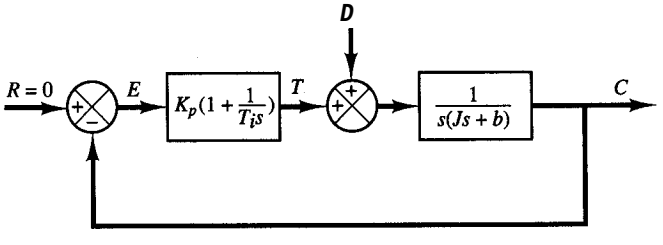


Figura 5-16
Control proporcional-integral de un elemento de carga formado por un momento de inercia y una fricción viscosa.

siempre es estable si los coeficientes de la ecuación diferencial del sistema son todos positivos.)

Es importante señalar que, si el controlador fuera integral, como en la figura 5-17, el sistema siempre se volvería inestable, porque la ecuación característica

$$Js^3 + bs^2 + K = 0$$

tendría raíces con partes reales positivas. Tal sistema inestable no se puede usar en la práctica.

Observe que, en el sistema de la figura 5-16, la acción de control proporcional tiende a estabilizar el mismo, en tanto que la acción de control integral tiende a eliminar o reducir el error en estado estable en respuesta a diversas entradas.

Acción de control derivativa. Cuando una acción de control derivativa se agrega a un controlador proporcional, aporta un medio de obtener un controlador con alta sensibilidad. Una ventaja de usar una acción de control derivativa es que responde a la velocidad del cambio del error y produce una corrección significativa antes de que la magnitud del error se vuelva demasiado grande. Por tanto, el control derivativo prevé el error, inicia una acción correctiva oportuna y tiende a aumentar la estabilidad del sistema.

Aunque el control derivativo no afecta en forma directa el error en estado estable, añade amortiguamiento al sistema y, por tanto, permite el uso de un valor más grande que la ganancia K, lo cual provoca una mejora en la precisión en estado estable.

Debido a que el control derivativo opera sobre la velocidad de cambio del error, y no sobre el error mismo, este modo nunca se usa solo. Siempre se emplea junto con una acción de control proporcional o proporcional-integral.

Control proporcional de sistemas con carga de inercia. Antes de analizar el efecto de una acción de control derivativa sobre el desempeño de un sistema, analizaremos el control proporcional de una carga de inercia.

Considere el sistema de la figura 5–18(a). La función de transferencia en lazo cerrado se obtiene mediante

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{Js^2 + K_p}$$

Dado que las raíces de la ecuación característica

$$Js^2 + K_p = 0$$

son imaginarias, la respuesta a una entrada escalón unitario oscila indefinidamente, como se observa en la figura 5–18(b).

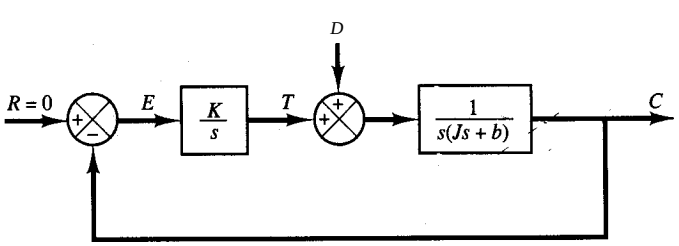


Figura 5-17
Control integral de un elemento de carga formado por un momento de inercia y una fricción viscosa.

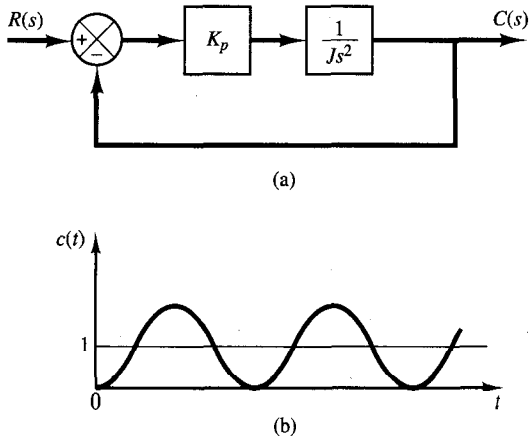


Figura 5–18
(a) Control proporcional de un sistema con carga de inercia; (b) respuesta para una entrada escalón unitario.

No son convenientes los sistemas de control que exhiben tales características de respuesta. Veremos que la adición de un control derivativo estabilizará el sistema.

Control proporcional-derivativo de un sistema con carga de inercia. Modifiquemos el controlador proporcional para obtener un controlador proporcional-derivativo cuya función de transferencia sea $K_p(1 + T_d s)$. El par que desarrolla el controlador es proporcional a $K_p(e + T_d \dot{e})$. El control derivativo es esencialmente de previsión, mide la velocidad instantánea del error, predice el sobrepaso significativo adelantándose en el tiempo y produce una respuesta adecuada antes de que ocurra un sobrepaso demasiado grande.

Considere el sistema de la figura 5–19(a). La función de transferencia en lazo cerrado se obtiene mediante

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p(1 + T_d s)}{Js^2 + K_p T_d s + K_p}$$

La ecuación característica

$$Js^2 + K_p T_d s + K_p = 0$$

tiene ahora dos raíces con partes reales negativas para valores positivos de J, K_p y T_d. Por tanto, el control derivativo introduce un efecto de amortiguamiento. La figura 5–19(b) presenta una curva de respuesta común c(t) para una entrada escalón unitario. Es evidente que la curva de respuesta muestra un marcado mejoramiento sobre la curva de respuesta original de la figura 5–18(b).

Control proporcional-derivativo de sistemas de segundo orden. Si se usa una acción de control proporcional-derivativo, se obtiene un equilibrio entre un comportamiento aceptable para una respuesta transitoria y un comportamiento aceptable en un estado estable.

Considere el sistema de la figura 5–20. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p + K_d s}{Js^2 + (B + K_d)s + K_p}$$

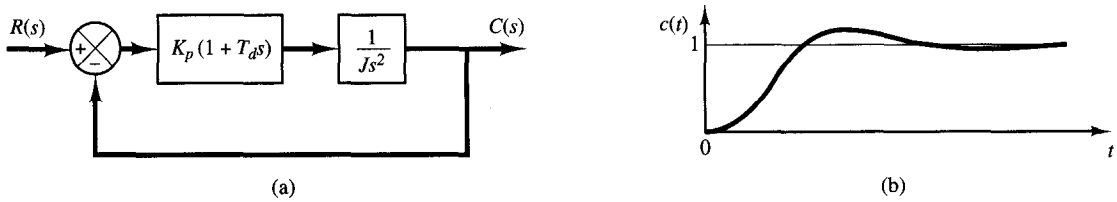


Figura 5-19
(a) Control proporcional-derivativo de un sistema con carga de inercia; (b) respuesta para una entrada escalón unitario.

El error en estado estable para una entrada rampa unitaria es

$$e_{ss} = \frac{B}{K_p}$$

La ecuación característica es

$$Js^2 + (B + K_d)s + K_p = 0$$

Por tanto, el coeficiente de amortiguamiento efectivo de este sistema es $B + K_d$, en lugar de B. Dado que el factor de amortiguamiento relativo ζ de este sistema es

$$\zeta = \frac{B + K_d}{2\sqrt{K_p J}}$$

es posible obtener tanto el error en estado estable e_{ss} para una entrada rampa, como el sobrepaso máximo para una entrada escalón pequeña, si hacemos que B sea pequeño, K_p sea grande y K_d lo suficientemente grande para que ζ esté entre 0.4 y 0.7.

A continuación examinaremos la respuesta escalón unitario del sistema de la figura 5–20. Definamos

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_p}{J}}, \qquad z = \frac{K_p}{K_d}$$

Por consiguiente, la función de transferencia en lazo cerrado se escribe como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{z} \frac{s + z}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Cuando un sistema de segundo orden tiene un cero cerca de los polos en lazo cerrado, el comportamiento de la respuesta transitoria se vuelve considerablemente diferente del de un sistema de segundo orden sin ceros.

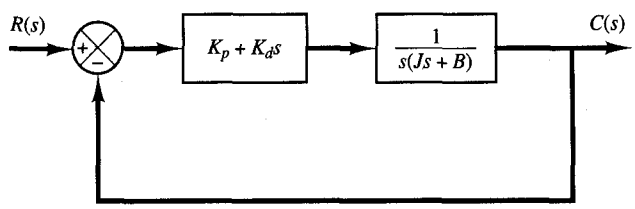


Figura 5 -20
Sistema de control.

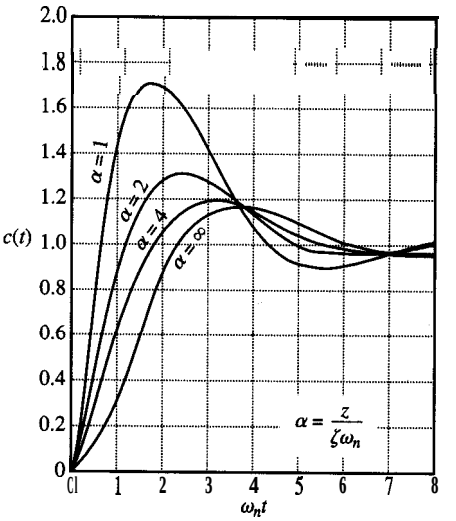


Figura5-21
Curvas de respuesta escalón unitario del sistema de segundo orden.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{z}\,\frac{s + z}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$\zeta = 0.5$

Si el cero en $s = -z$ se localiza cerca del eje@, es muy significativo el efecto del cero sobre la respuesta escalón unitario. La figura 5-21 presenta las curvas de respuesta escalón comunes de este sistema con $\zeta = 0.5$ y diversos valores de $z/(\zeta\omega_n)$.

5-4 SISTEMAS DE ORDEN SUPERIOR

En esta sección analizaremos, primero, la respuesta escalón unitario de un tipo específico de sistema de orden superior. Después, presentaremos un análisis de la respuesta transitoria de los sistemas de orden superior en términos generales. Por último, presentaremos el análisis de estabilidad en el plano complejo.

Respuesta transitoria de los sistemas de orden superior. Considere el sistema de la figura 5-22. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{5–1}$$

En general, G(s) y $H(s)$ se obtienen como cocientes de polinomios en s, o bien,

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \quad \text{Y} \quad H(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

en donde $p(s)$, $q(s)$, $n(s)$ y d(s) son polinomios en s. A continuación, la función de transferencia en lazo cerrado obtenida con la ecuación (5-1) se escribe como

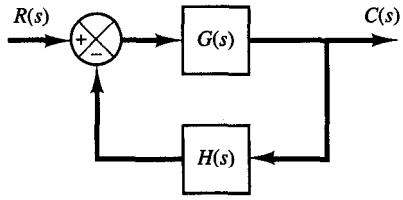


Figura 5–22
Sistema de control.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{p(s)d(s)}{q(s)d(s) + p(s)n(s)}$$

$$= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \qquad (m \leq n)$$

La respuesta transitoria de este sistema a cualquier entrada determinada se obtiene mediante una simulación por computadora (véase sección 4-4). Si se pretende una expresión analítica para la respuesta transitoria, es necesario factorizar el polinomio del denominador. [Puede usar MATLAB para encontrar las raíces del polinomio del denominador. Use el comando roots(den).] Una vez factorizados el numerador y el denominador, $C(s)/R(s)$ se escribe como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)\cdots(s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2)\cdots(s + p_n)} \qquad (5\text{–}2)$$

Examinemos el comportamiento de respuesta de este sistema para una entrada escalón unitario. Considere primero el caso en el que todos los polos en lazo cerrado son reales y distintos. Para una entrada escalón unitario, la ecuación (5-2) se escribe

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s + p_i} \qquad (5\text{–}3)$$

en donde a_i es el residuo del polo en $s = -p_i$.

Si todos los polos en lazo cerrado se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s, las magnitudes relativas de los residuos determinan la importancia relativa de los componentes en la forma expandida de C(s). Si hay un cero en lazo cerrado cerca de un polo en lazo cerrado, el residuo en este polo es pequeño y el coeficiente del término de respuesta transitoria que corresponde a este polo se vuelve pequeño. Un par polo-cero cercanos entre sí se cancelarán efectivamente uno al otro. Si un polo se localiza muy lejos del origen, su residuo puede ser pequeño. Los valores transitorios que corresponden a tal polo remoto son pequeños y duran un tiempo corto. Los términos en la forma expandida de C(s) que tienen residuos muy pequeños contribuyen poco a la respuesta transitoria, por lo que pueden pasarse por alto. Si se hace esto, el sistema de orden superior se aproxima mediante uno de orden inferior. (Tal aproximación nos permite con frecuencia estimar las características de respuesta de un sistema de orden superior a partir de las de uno simplificado.)

A continuación, considere el caso en el que los polos de C(s) están formados por polos reales y pares de polos complejos conjugados. Un par de polos complejos conjugados produce un término de segundo orden en s. Dado que la forma factorizada de la ecuación característica de orden superior está formada por términos de primer y segundo orden, la ecuación (5-3) se vuelve a escribir como

$$C(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{m}(s + z_i)}{s\prod_{j=1}^{a}(s + p_j)\prod_{k=1}^{r}(s^2 + 2\zeta_k\omega_k s + \omega_k^2)} \qquad (5\text{-}4)$$

en donde $q + 2r = n$. Si los polos en lazo cerrado son distintos, la ecuación (5-4) se expande en fracciones parciales, del modo siguiente:

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{j=1}^{q}\frac{a_j}{s + p_j} + \sum_{k=1}^{r}\frac{b_k(s + \zeta_k\omega_k) + c_k\omega_k\sqrt{1 - \zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k\omega_k s + \omega_k^2}$$

A partir de esta última ecuación, observamos que la respuesta de un sistema de orden superior está compuesta de varios términos que contienen las funciones simples encontradas en las respuestas de los sistemas de primer y segundo orden. Por tanto, la respuesta escalón unitario c(t), la transformada inversa de Laplace de C(s), es

$$c(t) = a + \sum_{j=1}^{q} a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^{r} b_k e^{-\zeta_k\omega_k t}\cos\omega_k\sqrt{1 - \zeta_k^2}\,t + \sum_{k=1}^{r} c_k e^{-\zeta_k\omega_k t}\operatorname{sen}\omega_k\sqrt{1 - \zeta_k^2}\,t, \quad \text{para } t \geq 0 \qquad (5\text{-}5)$$

En este caso, la curva de respuesta de un sistema estable de orden superior es la suma del número de curvas exponenciales y curvas senoidales amortiguadas.

Si todos los polos en lazo cerrado se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s, los términos exponenciales y los términos senoidales amortiguados de la ecuación (5-5) se aproximaran a cero, conforme el tiempo t aumente. Por tanto, la salida en estado estable es $c(\infty) = a$.

Supongamos que el sistema que se considera es estable. Por tanto, los polos en lazo cerrado que se localizan lejos del eje $j\omega$ tienen partes reales grandes y negativas. Los términos exponenciales que corresponden a estos polos llegan a cero con mucha rapidez. (Observe que la distancia horizontal del polo en lazo cerrado al eje $j\omega$ determina el tiempo de asentamiento de los transitorios producidos por tal polo. Entre más pequeña es la distancia, más prolongado es el tiempo de asentamiento.)

Recuerde que los polos en lazo cerrado determinan el tipo de respuesta transitoria, en tanto que los ceros en lazo cerrado determinan principalmente la forma de la respuesta transitoria. Como vimos antes, los polos de la entrada R(s) producen los términos de la respuesta en estado estable en la solución, en tanto que los polos de $C(s)/R(s)$ se introducen en los términos exponenciales de la respuesta transitoria y/o en los términos senoidales amortiguados de la respuesta transitoria. Los ceros de $C(s)/R(s)$ no afectan los exponentes en los términos exponenciales, pero afectan las magnitudes y los signos de los residuos.

Polos dominantes en lazo cerrado. La dominancia relativa de los polos en lazo cerrado se determina mediante el cociente de las partes reales de los polos en lazo cerrado, al igual que mediante las magnitudes relativas de los residuos evaluados en los polos en lazo cerrado. Las magnitudes de los residuos dependen tanto de los polos en lazo cerrado como de los ceros.

Si los cocientes de las partes reales son superiores a 5 y no hay ceros cerca, los polos en lazo cerrado más cercanos al eje $j\omega$ dominarán el comportamiento de la respuesta transitoria, debido

a que corresponden a los términos de la respuesta transitoria que se disminuyen lentamente. Los polos en lazo cerrado que tienen efectos dominantes sobre el comportamiento de la respuesta transitoria se denominan polos ***dominantes*** en lazo ***cerrado.*** Con mucha frecuencia, los polos dominantes en lazo cerrado aparecen en forma de un par complejo conjugado. Los polos dominantes en lazo cerrado son los más importantes entre todos los polos en lazo cerrado.

Es frecuente que la ganancia de un sistema de orden superior se ajuste para que exista un par de polos dominantes complejos conjugados en lazo cerrado. La presencia de tales polos en un sistema estable reduce el efecto de las no linealidades, tales como la zona muerta, el juego o bamboleo (backlash) y la fricción de coulomb.

Recuerde que, aunque el concepto de los polos dominantes en lazo cerrado es útil para estimar el comportamiento dinámico de un sistema en lazo cerrado, se debe tener cuidado de observar que se cumplan las suposiciones implícitas antes de usarlo.

Análisis de estabilidad en el plano complejo. La estabilidad de un sistema lineal en lazo cerrado se determina a partir de la ubicación de los polos en lazo cerrado en el plano s. Si alguno de estos polos se encuentra en el semiplano derecho del plano s, entonces conforme aumenta el tiempo, producirá el modo dominante y la respuesta transitoria aumentará en forma monotónica u oscilará con una amplitud creciente. Esto representa un sistema inestable. Para tal sistema, tan pronto como se conecta la alimentación, la salida aumenta con el tiempo. Si no ocurre una saturación en el sistema y no se incluye una detención mecánica, el sistema puede terminar por dañarse y fallar, dado que la respuesta de un sistema físico real no puede aumentar indefinidamente. Por ende, en el sistema de control lineal normal no se permiten los polos en lazo cerrado en el semiplano derecho del plano s. Si todos los polos en lazo cerrado se encuentran a la izquierda del eje jo, cualquier respuesta transitoria termina por alcanzar el equilibrio. Esto representa un sistema estable.

Que un sistema lineal sea estable o inestable es una propiedad del sistema mismo y no depende de la entrada ni de la función de excitación del sistema. Los polos de la entrada, o de la función de excitación, no afectan la propiedad de estabilidad del sistema, sino sólo contribuyen a los términos de respuesta en estado estable en la solución. Por tanto, el problema de estabilidad absoluta se soluciona con facilidad al no elegir polos en lazo cerrado en el semiplano derecho del plano s, incluyendo el eje $j\omega$. (Matemáticamente, los polos en lazo cerrado sobre el eje jo producirán oscilaciones, cuya amplitud no se reduce ni crece con el tiempo. Sin embargo, en los casos prácticos en los que hay ruido, la amplitud de las oscilaciones aumenta a una velocidad determinada por el nivel de la potencia del ruido. Por tanto, un sistema de control no debe tener polos en lazo cerrado en el eje jo.)

Observe que el solo hecho de que todos los polos en lazo cerrado se encuentren en el semiplano izquierdo del plano s no garantiza características satisfactorias de respuesta transitoria. Si los polos dominantes complejos conjugados en lazo cerrado se encuentran cerca del eje jo, la respuesta transitoria exhibirá oscilaciones excesivas o será muy lenta. Por tal razón, a fin de garantizar características de respuesta transitoria rápidas y bien amortiguadas, es necesario que los polos en lazo cerrado del sistema se encuentren en una región determinada del plano complejo, tal como la región delimitada por el área sombreada de la figura 5-23.

Dado que la estabilidad relativa y el desempeño transitorio de un sistema de control en lazo cerrado se relacionan directamente con el patrón de polos y ceros en lazo cerrado en el plano s, con frecuencia es necesario ajustar uno o más parámetros para obtener los patrones convenientes. Los efectos de los parámetros que varían sobre los polos de un sistema en lazo cerrado se analizarán con detalle en el capítulo 6.

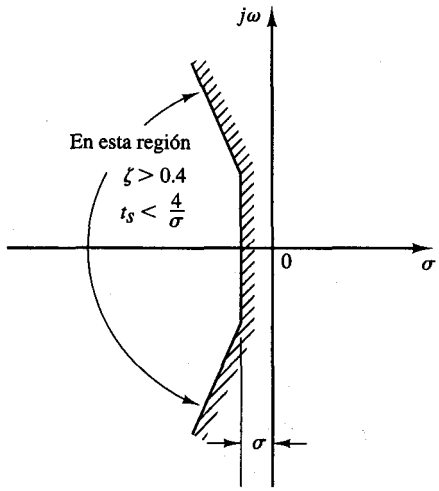


Figura **5–23**
Región del plano complejo que satisface las condiciones $\zeta > 0.4$ y $t_s < 4/\sigma$.

5-5 CRITERIO DE ESTABILIDAD DE ROUTH

El problema más importante de los sistemas de control lineal tiene que ver con la estabilidad. Es decir, ¿bajo qué condiciones se vuelve inestable un sistema? Si es inestable, ¿cómo se estabiliza? En la sección 5-4 se plante6 que un sistema de control es estable si y sólo si todos los polos en lazo cerrado se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s. Dado que casi todos los sistemas lineales en lazo cerrado tienen funciones de transferencia en lazo cerrado de la forma

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

en donde las ay las b son constantes y $m \leq n$, primero debemos factorizar el polinomio $A(s)$ para encontrar los polos en lazo cerrado. Un criterio simple, conocido como el criterio de estabilidad de Routh, permite determinar la cantidad de polos en lazo cerrado que se encuentran en el semiplano derecho del plano s sin tener que factorizar el polinomio.

Criterio de estabilidad de Routh. El criterio de estabilidad de Routh nos dice si existen o no raíces inestables en una ecuación polinomial, sin tener que obtenerlas en realidad. Este criterio de estabilidad sólo se aplica a los polinomios con una cantidad finita de términos. Cuando se aplica el criterio a un sistema de control, la información acerca de la estabilidad absoluta se obtiene directamente de los coeficientes de la ecuación característica.

El procedimiento en el criterio de estabilidad de Routh es el siguiente:

1. Escriba el polinomio en s en la forma siguiente:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \qquad (5\text{–}6)$$

en donde los coeficientes son cantidades reales. Suponemos que $a_n \neq 0$; es decir, se elimina cualquier raíz cero.

2. Si alguno de los coeficientes es cero o negativo, ante la presencia de al menos un coeficiente positivo, hay una raíz, o raíces imaginarias o que tiene partes reales positivas. En

tal caso, el sistema no es estable. Si sólo nos interesa la estabilidad absoluta, no es necesario continuar con el procedimiento. Observe que todos los coeficientes deben ser positivos. Ésta es una condición necesaria, como se aprecia a partir del argumento siguiente: un polinomio en s con coeficientes reales siempre puede factorizarse en factores lineales y cuadráticos tales como $(s + a)$ y $(s^2 + bs + c)$, en donde a, b y c son números reales. Los factores lineales producen las raíces reales y los factores cuadráticos producen las raíces complejas del polinomio. El factor $(s^2 + bs + c)$ produce las raíces con partes reales negativas sólo si b y c son ambas positivas. Para todas las raíces que tienen partes reales negativas, las constantes $a, b, c,...$ deben ser positivas en todos los factores. El producto de cualquier cantidad de factores lineales y cuadráticos que contengan sólo coeficientes positivos siempre produce un polinomio con coeficientes positivos. Es importante señalar que la condición de que todos los coeficientes sean positivos no es suficiente para asegurar la estabilidad. La condición necesaria, pero no suficiente, para la estabilidad es que todos los coeficientes de la ecuación (5-6) estén presentes y tengan un signo positivo. (Si todas las a son negativas, se hacen positivas multiplicando ambos miembros de la ecuación por -1.)

3. Si todos los coeficientes son positivos, ordene los coeficientes del polinomio en renglones y columnas de acuerdo con el patrón o arreglo siguiente:

$$
\begin{array}{llllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}
$$

Los coeficientes b_1, b_2, b_3, etc., se evalúan del modo siguiente:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

La evaluación de las b continúa hasta que todas las restantes son cero. Se sigue el mismo patrón de multiplicación cruzada de los coeficientes de los dos renglones anteriores al evaluar las c, las d, las e, etc. Es decir,

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$$

Y

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{c_1 b_3 \quad b_1 c_3}{c_1}$$

Este proceso continúa hasta que se completa el n-ésimo renglón. El arreglo completo de los coeficientes es triangular. Observe que, al desarrollar el arreglo, un renglón completo se divide entre, o se multiplica por, un número positivo para simplificar el cálculo numérico subsecuente sin alterar la conclusión de la estabilidad.

El criterio de estabilidad de Routh plantea que el número de raíces de la ecuación (5-6) con partes reales positivas es igual al número de cambios de signo de los coeficientes de la primera columna del arreglo. Debe señalarse que no es necesario conocer los valores exactos de los términos de la primera columna; sólo se necesitan los signos. La condición necesaria y suficiente para que todas las raíces de la ecuación (5-6) se encuentren en el semiplano izquierdo del plano s es que todos los coeficientes de la ecuación (5-6) sean positivos y que todos los términos de la primera columna del arreglo tengan signo positivo.

EJEMl?LO 5-1 Apliquemos el criterio de estabilidad de Routh al siguiente polinomio de tercer orden:

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

en donde todos los coeficientes son números positivos. El arreglo de coeficientes se convierte en

s^3	a_0	a_2
s^2	a_1	a_3
s^1	$\frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	
s^0	a_3	

La condición de que todas las raíces tengan partes reales negativas se obtiene mediante

$$a_1 a_2 > a_0 a_3$$

EJEMPLO 5-2 Considere el polinomio siguiente:

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

Sigamos el procedimiento que se acaba de presentar y construyamos el arreglo de coeficientes. (Los primeros dos renglones se obtienen directamente del polinomio dado. Los términos restantes se obtienen de éstos. Si faltan coeficientes en el arreglo, se sustituyen con ceros.)

s^4	1	3	5	s^4	1	3	5	
s^3	2	4	0	s^3	~~2~~	~~4~~	~~0~~	El segundo renglón se divide entre 2.
					1	2	0	
s^2	1	5		s^2	1	5		
s^1	-6			s^1	**-3**			
s_0	5			s^0	**5**			

En este ejemplo, hay dos cambios de signo en los coeficientes de la primera columna. Esto significa que existen dos raíces con partes reales positivas. Observe que el resultado no se modifica cuando los coeficientes de cualquier renglón se multiplican por, o se dividen entre, un número positivo para simplificar el cálculo.

Casos especiales. Si el término de la primera columna de cualquier renglón es cero, pero los términos restantes no son cero, o no hay términos restantes, el término cero se sustituye con un número positivo muy pequeño ϵ y se evalúa el resto del arreglo. Por ejemplo, considere la ecuación

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0 \tag{5-7}$$

El arreglo de coeficientes es

s^3	1	1
s^2	2	2
s^1	$0 \approx \epsilon$	
s^0	2	

Si el signo del coeficiente que está encima del cero (E) es igual al signo que está abajo de él, quiere decir que hay un par de raíces imaginarias. En realidad, la ecuación (5-7) tiene dos raíces en $s = \pm j$.

Sin embargo, si el signo del coeficiente que está encima del cero (E) es opuesto al del que está abajo, quiere decir que hay un cambio de signo. Por ejemplo, para la ecuación

$$s^3 - 3s + 2 = (s - 1)^2(s + 2) = 0$$

el arreglo de coeficientes es

	s^3	1	-3
Un cambio de signo:	s^2	$0 \approx \epsilon$	2
Un cambio de signo:	s^1	$-3 - \frac{2}{\epsilon}$	
	s^0	2	

Hay dos cambios de signo en los coeficientes de la primera columna. Esto coincide con el resultado correcto indicado por la forma factorizada de la ecuación polinomial.

Si todos los coeficientes de cualquier renglón son cero significa que existen raíces de igual magnitud que se encuentran radialmente opuestas en el plano s, es decir, dos raíces con magnitudes iguales y signos opuestos y/o dos raíces imaginarias conjugadas. En este caso, la evaluación del resto del arreglo continúa mediante la formación de un polinomio

auxiliar con los coeficientes del último renglón y mediante el empleo de los coeficientes de la derivada de este polinomio en el renglón siguiente. Tales raíces con magnitudes iguales y radialmente opuestas en el plano s se encuentran despejando el polinomio auxiliar, que siempre es par. Para un polinomio auxiliar de grado $2n$, existen n pares de raíces iguales y opuestas. Por ejemplo, considere la ecuación:

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

El arreglo de coeficientes es

$$\begin{array}{llll} s^5 & 1 & 24 & -25 \\ s^4 & 2 & 48 & -50 \leftarrow \text{Polinomio auxiliar P(s)} \\ s^3 & 0 & 0 & \end{array}$$

Todos los términos del renglón s^3 son cero. Después se forma el polinomio auxiliar a partir de los coeficientes del renglón s^4. El polinomio auxiliar P(s) es

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$$

lo cual indica que hay dos pares de rafces de igual magnitud y signo opuesto. Estos pares se obtienen resolviendo la ecuación del polinomio auxiliar P(s) = 0. La derivada de P(s) con respecto a s es

$$\frac{dP(s)}{ds} = 8s^3 + 96s$$

Los coeficientes de la ultima ecuación, es decir, 8 y 96, sustituyen los términos del renglón s^3. Por consiguiente, el arreglo de coeficientes se convierte en

$$\begin{array}{llll} s^5 & 1 & 24 & -25 \\ s^4 & 2 & 48 & -50 \\ s^3 & 8 & 96 & \leftarrow \text{Coeficientes de } dP(s)/ds \\ s^2 & 24 & -50 & \\ s^1 & 112.7 & 0 & \\ s^0 & -50 & & \end{array}$$

Vemos que hay un cambio de signo en la primera columna del arreglo nuevo. Por tanto,la ecuación original tiene una raíz con una parte real positiva. Despejando las raíces de la ecuación del polinomio auxiliar

$$2s^4 + 48s^2 - 50 = 0$$

obtenemos

$$s^2 = 1, \qquad s^2 = -25$$

o bien

$$s = \pm 1, \qquad s = \pm j5$$

Estos dos pares de raíces son una parte de las rafces de la ecuación original. De hecho, la ecuación original se escribe en forma factorizada del modo siguiente:

$$(s + 1)(s - 1)(s + j5)(s - j5)(s + 2) = 0$$

Es evidente que la ecuación original tiene una raíz con una parte real positiva.

Análisis de estabilidad relativa. El criterio de estabilidad de Routh proporciona la respuesta a la pregunta de la estabilidad absoluta. Esto, en muchos casos prácticos, no es suficiente. Por lo general, se requiere información acerca de la estabilidad relativa del sistema. Un enfoque útil para examinar la estabilidad relativa es cambiar el eje del plano s y aplicar el criterio de estabilidad de Routh. Es decir, escribimos

$$s = \hat{s} - \sigma \qquad (\sigma = \text{constante})$$

en la ecuación característica del sistema, escribimos el polinomio en términos de $\hat{s}$, y aplicamos el criterio de estabilidad de Routh al nuevo polinomio en $\hat{s}$. La cantidadde cambios de signo en la primera columna del arreglo desarrollado para el polinomio en $\hat{s}$ es igual a la cantidad de raíces que se localizan a la derecha de la línea vertical $s = -\sigma$. Por tanto, esta prueba revela la cantidad de raíces que se encuentran a la derecha de la línea vertical $s = -\sigma$.

Aplicación del criterio de estabilidad de Routh al análisis de un sistema de control. El criterio de estabilidad de Routh tiene una utilidad limitada en el análisis de un sistema de control lineal, sobre todo porque no sugiere cómo mejorar la estabilidad relativa ni cómo estabilizar un sistema inestable. Sin embargo, es posible determinar los efectos de cambiar uno o dos parámetros de un **sistema** si se examinan los valores que producen inestabilidad. A continuación consideraremos el problema de determinar el rango de estabilidad para el valor de un parámetro.

Considere el sistema de la figura 5-24. Determinemos el rango de valores de K para la estabilidad. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2) + K}$$

La ecuación característica es

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

El arreglo de coeficientes se convierte en

s^4	1	3	K
s^3	3	20	
s^2	$\frac{7}{3}$	K	
s^1	$2 - \frac{9}{7}K$		
s^0	K		

Para la estabilidad, K debe ser positiva, y todos los coeficientes de la primera columna deben serlo también. Por tanto,

$$\tfrac{14}{9} > K > 0$$

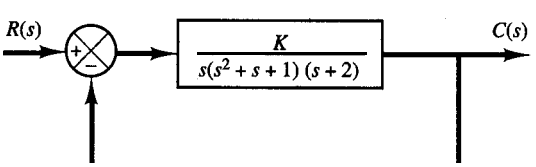


Figura 5–24
Sistema de control.

Cuando $K = \frac{1}{9}$, el sistema se vuelve oscilatorio y, matemáticamente, la oscilación se mantiene en una amplitud constante.

5-6 CONTROLADORES NEUMÁTICOS

Debido a que son el medio más versátil para transmitir señales y potencia,los fluidos, ya sean líquidos o gases, tienen un amplio uso en la industria. Los líquidos y los gases se diferencian entre sí básicamente por su falta de compresibilidad relativa y por el hecho de que un líquido puede tener una superficie libre, en tanto que un gas se expande para llenar su recipiente. En el campo de la ingeniería, el término *neumática* describe los sistemas de fluidos que usan aire o gases e *hidráulica* describe los sistemas que usan aceite.

Los sistemas neumáticos se usan mucho en la automatización de la maquinaria de producción y en el campo de los controladores automáticos. Por ejemplo, tienen un amplio uso los circuitos neumáticos que convierten la energía del aire comprimido en energía mecánica, y se encuentran diversos tipos de controladores neumáticos en la industria.

Dado que es frecuente equiparar los sistemas neumáticos y los sistemas hidráulicos, a continuación ofrecemos una breve comparación de estos dos tipos de sistemas.

Comparación entre sistemas neumáticos y sistemas hidráulicos. El fluido que suele encontrarse en los sistemas neumáticos es el aire; en los sistemas hidráulicos es el aceite. Y son principalmente las propiedades distintas de los fluidos incorporados las que caracterizan las diferencias entre estos dos sistemas. A continuación se listan estas diferencias:

1. El aire y los gases son comprimibles, en tanto que el aceite no lo es.
2. El aire carece de la propiedad lubricante y siempre contiene vapor de agua. El aceite funciona como un fluido hidráulico al igual que como lubricante.
3. La presión de operación normal de los sistemas neumáticos es mucho más baja que la de los sistemas hidráulicos.
4. Las potencias de salida de los sistemas neumáticos son considerablemente menores que las de los sistemas hidráulicos.
5. La precisión de los actuadores neumáticos es deficiente a bajas velocidades, en tanto que la precisión de los actuadores hidráulicos es satisfactoria en todas las velocidades.
6. En los sistemas neumáticos, se permite un cierto grado de escurrimiento externo, pero debe evitarse el escurrimiento interno debido a que la diferencia de presión efectiva es muy pequeña. En los sistemas hidráulicos se permite un cierto grado de escurrimiento interno, pero debe evitarse el escurrimiento externo.
7. En los sistemas neumáticos no se requiere de tubos de recuperación cuando se usa aire, en tanto que siempre se necesitan en los sistemas hidráulicos.
8. La temperatura de operación normal de los sistemas neumáticos es de 5 a 60°C (41 a 140°F). Sin embargo, el sistema neumático opera en el rango de 0 a 200°C (32 a 392°F). Los sistemas neumáticos son insensibles a los cambios de temperatura, a diferencia de los sistemas hidráulicos, en los cuales la fricción de los fluidos provocada por la viscosidad depende en gran parte de la temperatura. La temperatura de operación normal de los sistemas hidráulicos es de 20 a 70°C (68 a 158°F).
9. Los sistemas neumáticos no corren el riesgo de incendiarse o explotar, al contrario de los sistemas hidráulicos.

A continuación empezaremos un modelado matemático de los sistemas neumáticos. Después presentaremos los controladores neumáticos proporcionales. Ilustraremos el he-

cho de que los controladores proporcionales utilizan el principio de realimentación negativa sobre sí mismos. Ofreceremos un análisis detallado del principio mediante el cual operan los controladores proporcionales. Por último, trataremos los métodos para obtener acciones de control derivativa e integral. En todos los análisis, enfatizaremos los principios fundamentales en lugar de los detalles de la operación de los mecanismos reales.

Sistemas neumáticos. Las últimas décadas han visto un gran desarrollo de los controladores neumáticos de baja presión para sistemas de control industrial, que en la actualidad se usan ampliamente en los procesos industriales. Entre las razones para que estos controladores resulten atractivos están que son a prueba de explosiones, son sencillos y es fácil darles mantenimiento.

Resistencia y capacitancia de los sistemas de presión. Muchos procesos industriales y controladores neumáticos incluyen el flujo de un gas, que puede ser aire, en recipientes a presión conectados a través de tuberías.

Considere el sistema a presión de la figura 5–25(a). El flujo del gas a través de la restricción es una función de la diferencia de presión del gas $p_i - p_o$. Tal sistema de presión se caracteriza en términos de una resistencia y una capacitancia.

La resistencia del flujo de gas R se define del modo siguiente:

$$R = \frac{\text{cambio en la diferencia de presión del gas, lb}_f/\text{pie}^2}{\text{cambio en el flujo del gas, lb/seg}}$$

o bien

$$R = \frac{d\,(\Delta P)}{dq} \tag{5–8}$$

en donde d(A P) es un cambio pequeño en la diferencia de presión del gas y dq es un cambio pequeño en el flujo del gas. El cálculo del valor de la resistencia de flujo del gas R puede tomar mucho tiempo. Sin embargo, experimentalmente se determina con facilidad a partir de una gráfica de la diferencia de presión contra flujo, calculando la pendiente de la curva en una condición de operación determinada, como se aprecia en la figura 5–25(b).

La capacitancia del recipiente a presión se define mediante

$$\text{c} = \frac{\text{cambio en el gas almacenado, lb}}{\text{cambio en la presión del gas, lb}_f/\text{pie}^2}$$

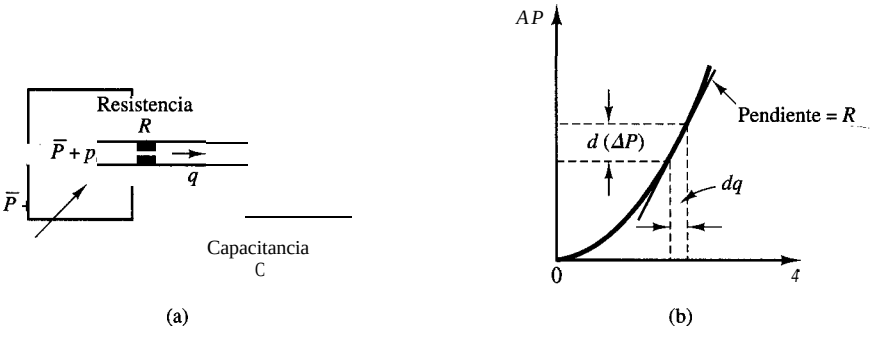


Figura 5-25
(a) Diagrama esquemático de un sistema a presión; (b) curva de la diferencia de presión contra flujo.

o bien

$$C = \frac{dm}{dp} = V\frac{d\rho}{dp} \tag{5–9}$$

en donde C = capacitancia, $lb\text{-}pie^2/lb_f$
m = masa del gas en el recipiente, lb
p = presión del gas, lb_f/pie^2
V = volumen del recipiente, pie^3
ρ = densidad, lb/pie^3

La capacitancia del sistema de presión depende del tipo de proceso de expansión implícito. La capacitancia se calcula mediante la ley de los gases ideales. Si el proceso de expansión del gas es politrópico y el cambio de estado del mismo está entre isotérmico y adiabático, entonces

$$p\left(\frac{V}{m}\right)^n = \frac{p}{\rho^n} = \text{constante} \tag{5–10}$$

en donde n = exponente politrópico.
Para los gases ideales,

$$p\bar{v} = \bar{R}T \qquad o \qquad pv = \frac{R}{M}T$$

en donde p = presión absoluta, lb_f/pie^2
$\bar{v}$ = volumen ocupado por un mol de un gas, $pie^3/lb\text{-}mol$
$\bar{R}$ = constante universal de los gases, $pie\text{-}lb_f/lb\text{-}mol\ °R$
T = temperatura absoluta, °R
v = volumen específico del gas, pie^3/lb
M = peso molecular del gas por mol, lb/lb-mol

Por tanto

$$pv = \frac{p}{\rho} = \frac{\bar{R}}{M}T = R_{gas}T \tag{5–11}$$

en donde R_{gas} = constante de gas, $pie\text{-}lb_f/lb$ "R.

El exponente politrópico n es unitario para la expansión isotérmica. Para la expansión adiabática, n es igual al cociente entre los calores específicos c_p/c_v, en donde c_p es el calor específico a presión constante y c_v es el calor específico a volumen constante. En muchos casos prácticos, el valor de n es aproximadamente constante y, por ende, la capacitancia se considera constante. El valor de dp/dp se obtiene a partir de las ecuaciones (5-10) y (5-11) como

$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{nR_{gas}T}$$

Después, la capacitancia se obtiene como

$$C = \frac{V}{nR_{gas}T} \tag{5-12}$$

La capacitancia de un recipiente determinado es constante si la temperatura permanece constante. (En muchos casos prácticos, el exponente politrópico n es aproximadamente 1.0 ~ 1.2 para gases en recipientes metálicos sin aislamiento.)

Sistemas de presión. Considere el sistema de la figura 5–25(a). Si sólo suponemos desviaciones pequeñas en las variables a partir de sus valores en estado estable respectivos, este sistema se considera lineal.

Definamos

$\bar{P}$ = presión del gas en el recipiente en estado estable (antes de que ocurran cambios en la presión), lb_f/pie^2

p_i = cambio pequeño en la presión del gas que entra, lb_f/pie^2

p_o = cambio pequeño en la presión del gas en el recipiente, lb_f/pie^2

V = volumen del recipiente, pie^3

m = masa del gas en el recipiente, lb

q = flujo del gas, lb/seg

ρ = densidad del gas, lb/pie^3

Para valores pequeños de p_i y p_o, la resistencia R obtenida mediante la ecuación (5-8) se vuelve constante y se escribe como

$$R = \frac{p_i - p_o}{q}$$

La capacitancia C se obtiene mediante la ecuación (5–9), o bien,

$$C = \frac{dm}{dp}$$

Dado que el cambio de presión dp_o multiplicado por la capacitancia C es igual al gas añadido al recipiente durante dt segundos, obtenemos

$$C\,dp_o = q\,dt$$

o bien

$$C\frac{dp_o}{dt} = \frac{p_i - p_o}{R}$$

lo cual se escribe como

$$RC\frac{dp_o}{dt} + p_o = p_i$$

Si p_i y p_o se consideran la entrada y la salida, respectivamente, la función de transferencia del sistema es

$$\frac{P_o(s)}{P_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

en donde RC tiene la dimensión del tiempo y es la constante de tiempo del sistema.

Amplificadores neumáticos de tobera-aleta. La figura 5–26(a) contiene un diagrama esquemático de un amplificador neumático de tobera-aleta. La fuente de potencia para este amplificador es un suministro de aire a una presión constante. El amplificador de tobera-aleta convierte los cambios pequeños en la posición de la aleta en cambios grandes en la presión trasera de la tobera. Por tanto, una salida de energía grande se controla por medio de la pequeña cantidad de energía necesaria para posicionar la aleta.

En la figura 5–26(a) el aire presurizado se alimenta a través del orificio y se expulsa de la tobera hacia la aleta. En general, la presión de suministro P_s para tal controlador es de 20 psig (una gravitacional de 1.4 kg_f/cm^2). El diámetro del orificio está en el orden de 0.01 plg (0.25 mm) y el de la tobera está en el orden de 0.016 plg (0.4 mm). Para asegurar un funcionamiento adecuado del amplificador, el diámetro de la tobera debe ser más grande que el diámetro del orificio.

Al operar este sistema, la aleta se posiciona contra la abertura de la tobera. La presión trasera de la tobera P_b se controla mediante la distancia X tobera-aleta. Conforme la aleta se acerca a la tobera, aumenta la oposición al flujo del aire a través de la tobera, aumenta la presión trasera P_b de la tobera. Si la tobera está completamente cerrada por medio de la aleta, su presión trasera P_b se vuelve igual a la presión de suministro P_s. Si la aleta se aleja de la tobera, de modo que la distancia tobera-aleta sea amplia (en el orden de 0.01 plg), prácticamente no hay restricción para el flujo y la presión trasera Pb de la tobera adquiere un valor mínimo que depende del dispositivo tobera-aleta. (La presión posible más baja será la presión ambienta1 P_a.)

Observe que, debido a que el chorro de aire opone una fuerza contra la aleta, es necesario hacer 10 más pequeño posible el diámetro de la tobera.

La figura 5–26(b) contiene una curva típica que relaciona la presión trasera Pb de la tobera con la distancia X tobera-aleta. La parte con gran inclinación y casi lineal de la curva se utiliza en la operación real del amplificador de tobera-aleta. Debido a que el rango de los desplazamientos de la aleta está limitado a un valor pequeño, también es pequeño el cambio en la presión de salida, a menos que la curva esté muy inclinada.

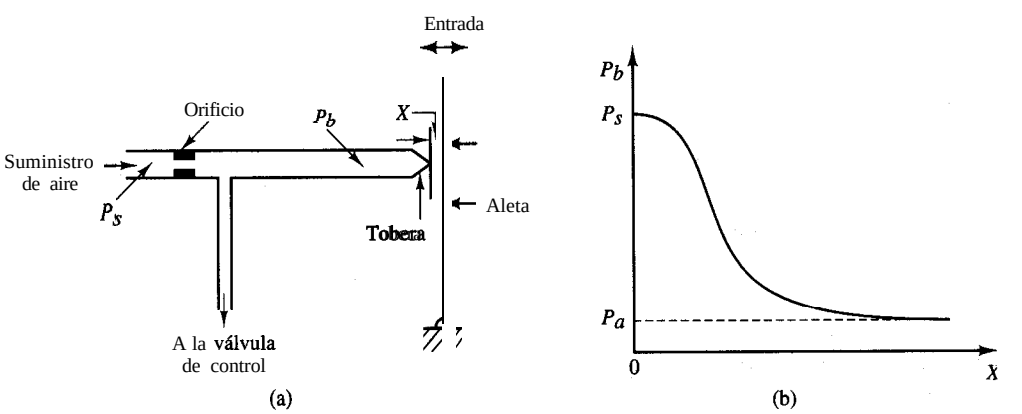


Figura 5-26
(a) Diagrama esquemático del amplificador neumático de tobera-aleta; (b) curva característica que relaciona la presión trasera de la tobera y la distancia tobera-aleta.

El amplificador de tobera-aleta convierte el desplazamiento en una señal de presión. Dado que los sistemas de control de procesos industriales requieren de una potencia de salida grande para operar válvulas con actuadores neumáticos grandes, por lo general es insuficiente el incremento de potencia del amplificador de tobera-aleta. En consecuencia, un relevador neumático funciona por lo general como un amplificador de potencia en la conexión con el amplificador de tobera-aleta.

Relevadores neumáticos. En la práctica, en un controlador neumático, el amplificador de tobera-aleta actúa como el amplificador de primera etapa y el relevador neumático como el amplificador de segunda etapa. El relevador neumático es capaz de manejar un flujo de aire grande.

La figura 5–27(a) contiene un diagrama esquemático de un relevador neumático. Conforme aumenta la presión trasera de la tobera P_b, la válvula del diafragma se mueve hacia abajo. La apertura hacia la atmósfera disminuye y la apertura para la válvula neumática aumenta, por lo cual aumenta la presión de control P_c. Cuando la válvula de diafragma cierra la abertura hacia la atmósfera, la presión de control P_c se vuelve igual a la presión de suministro P_s. Cuando disminuye la presión trasera de la tobera P_b y la válvula de diafragma se mueve hacia arriba y cierra el suministro de aire, la presión de control P_c disminuye hasta la presión ambiental P_a. Por tal razón, se hace que varíe la presión de control P_c de 0 psig a una presión de suministro completa, por lo general de 20 psig.

El movimiento total de la válvula de diafragma es muy pequeño. En todas las posiciones de la válvula, excepto en la posición que se cierra el suministro de aire, el aire continúa escapando a la atmósfera, incluso después de que se obtiene la condición de equilibrio entre la presión trasera de la tobera y la presión de control. Por tanto, el de la figura 5–27(a) es un tipo de relevador con escape.

Existe otro tipo de relevador, sin escape. En éste, el escape del aire se detiene cuando se obtiene la condición de equilibrio y, por tanto, no hay una pérdida de aire presurizado en una operación en estado estable. Sin embargo, observe que el relevador sin escape debe tener un alivio atmosférico para liberar la presión de control P_c de la válvula con actuador neumático. La figura 5–27(b) muestra un diagrama esquemático de un relevador sin escape.

En cualquier tipo de relevador, el suministro de aire se controla mediante una válvula, que a su vez, se controla mediante la presión trasera de la tobera. Por tanto, la presión trasera de la tobera se convierte en una presión de control con la amplificación de la potencia.

Dado que la presión de control P_c cambia casi instantáneamente con las modificaciones en la presión trasera de la tobera P_b, la constante del tiempo del relevador neumático es in-

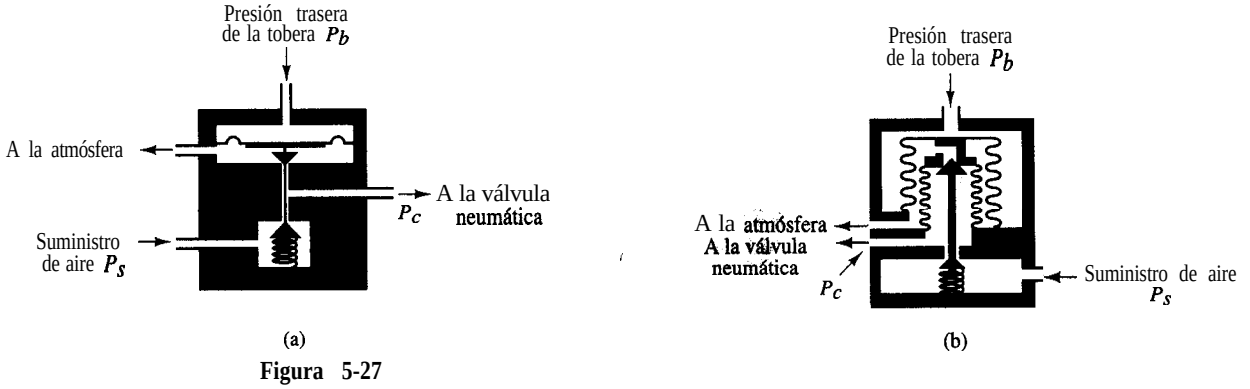


Figura 5-27
(a) Diagrama esquemático de un relevador con escape; (b) Diagrama esquemático de un relevador sin escape.

significante en comparación con las otras constantes de tiempo más grandes del controlador neumático y la planta.

Observe que algunos relevadores neumáticos funcionan en acción inversa. Por ejemplo, el relevador de la figura 5-28 es un relevador de acción inversa. En él, conforme aumenta la presión trasera de la tobera Pb, la **válvula** de esfera es impulsada hacia el asiento inferior, por lo cual disminuye la presión de control P_c. Por consiguiente, se trata de un relevador de acción inversa.

Controladores neumáticos proporcionales (de tipo fuerza-distancia). En la industria se usan dos tipos de controladores neumáticos, el denominado de fuerza-distancia y el de fuerza-balance. Sin tomar en cuenta qué tan distintos parezcan los controladores neumáticos industriales, un estudio cuidadoso mostrara la estrecha similitud en las funciones del circuito neumático. Aquí consideraremos controladores neumáticos del tipo de fuerza-distancia.

La figura **5–29(a)** muestra un diagrama esquemático de semejante controlador proporcional. El amplificador de tobera-aleta es el amplificador de la primera etapa y la presión trasera de la tobera se controla mediante la distancia de la tobera-aleta. El amplificador de tipo relevador constituye el amplificador de la segunda etapa. La presión trasera de la tobera determina la posición de la válvula de diafragma para el amplificador de la segunda etapa, que es capaz de manejar una cantidad grande de flujo de aire.

En la mayor parte de los controladores neumáticos, se emplea algún tipo de realimentación neumática. La realimentación de la salida neumática reduce la cantidad de movimiento real de la aleta. En lugar de montar la aleta en un punto fijo, como se aprecia en la figura **5–29(b),** suele colocarse como pivote en los fuelles de realimentación, como se observa en la figura **5–29(c).** La cantidad de realimentación se regula introduciendo un enlace variable entre el fuelle de realimentación y el punto de conexión de la aleta. A su vez la aleta se convierte en un enlace flotante. Se mueve tanto por la señal de error como por la señal de realimentación.

La operación del controlador de la **figura 5–29(a)** es la siguiente. La señal de entrada para el amplificador neumático de dos etapas es la señal de error. El incremento en la señal de error mueve la aleta hacia la izquierda. Este movimiento, a su vez, aumenta la presión trasera de la tobera y la válvula de diafragma se mueve hacia abajo. Esto provoca un aumento en la presión de control. Este incremento provoca que el fuelle Fse **expanda** y mueva la aleta hacia la derecha, con lo cual se abre la tobera. Debido a esta realimentación, el desplazamiento de tobera-aleta es muy pequeño, pero el cambio en la presión de control puede ser grande.

Debe señalarse que la operación adecuada del controlador requiere que el fuelle de realimentación mueva la aleta menos que el movimiento provocado por la pura señal de error. (Si estos dos movimientos son iguales, no se producirá una acción de control.)

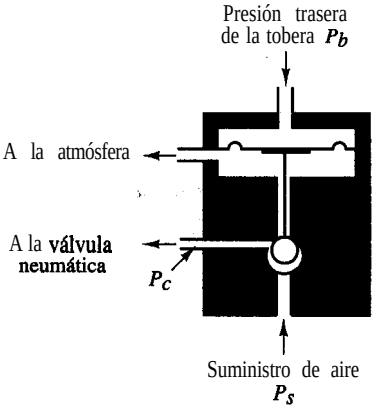


Figura 5-28
Relevador de acción inversa.

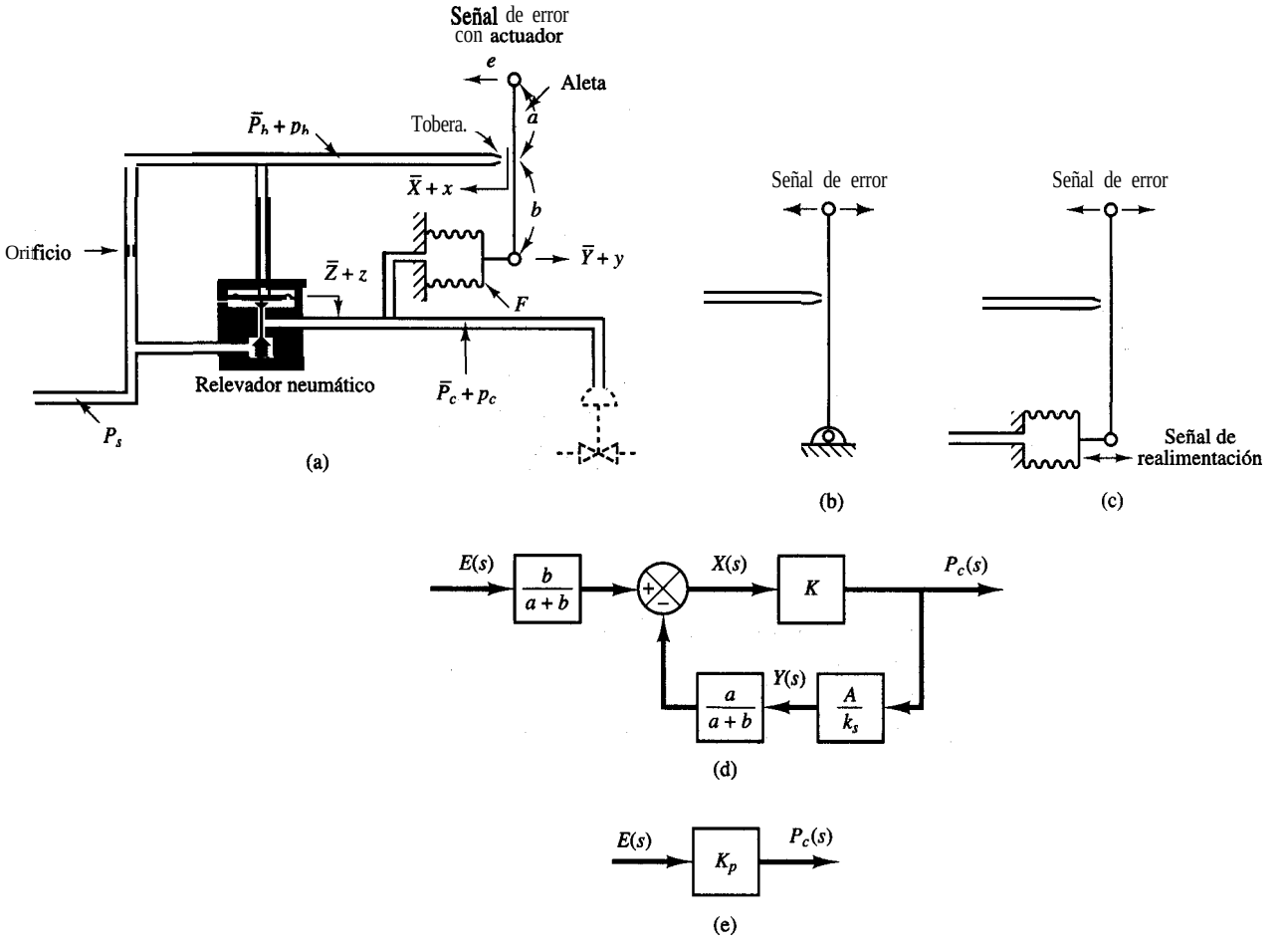


Figura 5-29
(a) Diagrama esquemático de un controlador proporcional neumático de tipo fuerza-distancia; (b) aleta montada en un punto fijo; (c) aleta montada en un fuelle de realimentación; (d) diagrama de bloques para el controlador: (e) diagrama de bloques simplificado para el controlador.

Las ecuaciones para este controlador se obtienen del modo siguiente. Cuando el error es cero, o e = 0, existe un estado de equilibrio con la distancia tobera-aleta igual a $\bar{X}$, el desplazamiento del fuelle igual a $\bar{Y}$, el desplazamiento del diafragma igual a $\bar{Z}$, la presión trasera de la tobera igual a $\bar{P}_b$, y la presión de control igual a $\bar{P}_c$. Cuando existe un error, la distancia tobera-aleta, el desplazamiento del fuelle, el desplazamiento del diafragma, la presión trasera de la tobera y la presión de control se desvían de sus valores de equilibrio respectivos. Supongamos que estas desviaciones son x, y, z, p_b y p_c, respectivamente. (La dirección positiva para cada variable de desplazamiento se indica mediante una punta de flecha en el diagrama.)

Suponiendo que la relación entre la variación en la presión trasera de la tobera y la variación en la distancia tobera-aleta es lineal, tenemos que

$$p_b = K_1 x \tag{5-13}$$

en donde K_1 es una constante positiva. Para la válvula de diafragma,

$$p_b = K_2 z \tag{5-14}$$

en donde K_2 es una constante positiva. La posición de la válvula de diafragma determina la presión de control. Si la válvula de diafragma es tal que la relación entre p_c y z es lineal, entonces

$$p_c = K_3 z \tag{5-15}$$

en donde K_3 es una constante positiva. A partir de las ecuaciones (5–13), (5-14) y (5–15), obtenemos

$$p_c = \frac{K_3}{K_2} p_b = Kx \tag{5-16}$$

en donde $K = K_1K_3/K_2$ es una constante positiva. Para el movimiento de la aleta, tenemos que

$$x = \frac{b}{a+b} e - \frac{a}{a+b} y \tag{5-17}$$

El fuelle funciona como un resorte y la ecuación siguiente es pertinente:

$$Ap_c = k_s y \tag{5-18}$$

en donde A es el área efectiva del fuelle y k_s es la constante de elasticidad equivalente, que es la rigidez provocada por la acción del lado corrugado del fuelle.

Suponiendo que todas las variaciones de las variables están dentro de un rango lineal, obtenemos un diagrama de bloques para este sistema a partir de las ecuaciones (5–16), (5-17) y (5-18) como se aprecia en la figura 5–29(d). En la figura 5–29(d) se aprecia con claridad que el mismo controlador neumático de la figura 5–29(a) es un sistema de realimentación. La función de transferencia entre p_c y e se obtiene mediante

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\dfrac{b}{a+b} K}{1 + K \dfrac{a}{a+b} \dfrac{A}{k_s}} = K_p \tag{5-19}$$

La figura 5–29(e) contiene un diagrama de bloques simplificado. Dado que p_c y e son proporcionales, el controlador neumático de la figura 5–29(a) se denomina un ***controlador neumático proporcional.*** Como se observa en la ecuación (5–19), la ganancia del controlador neumático proporcional varía en gran medida si se ajusta el enlace que conecta la aleta. [El enlace que conecta la aleta no aparece en la figura 5–29(a).] En casi todos los controladores proporcionales comerciales existe una perilla de ajuste u otro mecanismo para variar la ganancia ajustando este enlace.

Como se señaló antes, la señal de error movió la aleta en una dirección y el fuelle de realimentación lo movió en la dirección opuesta, pero en un grado más pequeño. Por tanto, el efecto del fuelle de realimentación es reducir la sensibilidad del controlador. El principio de realimentación se usa con frecuencia para obtener controladores de banda proporcional amplia.

Los controladores neumáticos que no tienen mecanismos de realimentación [lo que significa que un extremo de la aleta está fijo, tal como en la figura 5–30(a)] tienen una alta sensibilidad y se denominan ***controladores neumáticos de dos posiciones o controladores neumáticos de encendido y apagado.*** En semejante tipo de controlador, sólo se requiere de

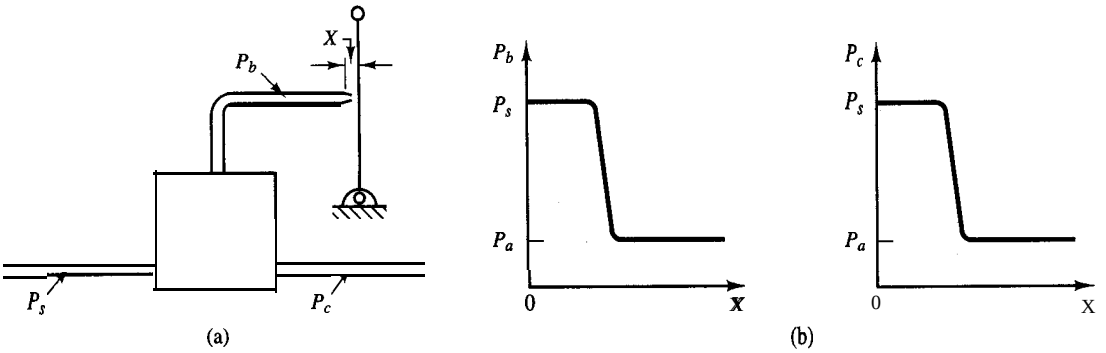


Figura 530
(a) Controlador neumático sin un mecanismo de realimentación; (b) curvas P_b contra X y P_c contra X.

un pequeño movimiento entre la tobera y la aleta para generar un cambio completo de la presión de control máxima a la mínima. Las curvas que relacionan P_b con X, y P_c con Xse presentan en la figura 5–30(b). Observe que un cambio pequeño en X provoca un cambio grande en Pb, lo que hace que la válvula de diafragma quede completamente abierta o cerrada.

Controladores neumáticos proporcionales (del tipo fuerza-balance). La figura 5-31 muestra un diagrama esquemático de un controlador neumático proporcional de fuerza-balance. Los controladores de fuerza-balance se usan ampliamente en la industria. Se les conoce como controladores apilados. El principio de operación básico no es diferente del que emplea el controlador de fuerza-distancia. La principal ventaja del controlador fuerza-balance es que elimina muchos enlaces mecánicos y uniones de pivote, con lo cual reduce los efectos de la fricción.

A continuación consideraremos el principio del controlador de fuerza-balance. En el controlador de la figura 5-31, la presión de la entrada de referencia P_r y la presión de salida P_o se alimentan hacia grandes cámaras de diafragma. Observe que un controlador neumático de fuerza-balance sólo opera sobre señales de presión. Por tanto, es necesario convertir la entrada de referencia y la salida del sistema en las señales de presión correspondientes.

Al igual que en el caso del controlador de fuerza-distancia, este controlador emplea una aleta, una tobera y algunos orificios En la figura 5-31, la abertura perforada en la cámara inferior es la tobera. El diafragma que aparece justo encima de la tobera funciona como una aleta.

La operación del controlador fuerza-balance de la figura 5-31 se resume así: 20 psig de aire fluyen desde un suministro a través de un orificio, provocando una presión reducida en la cámara

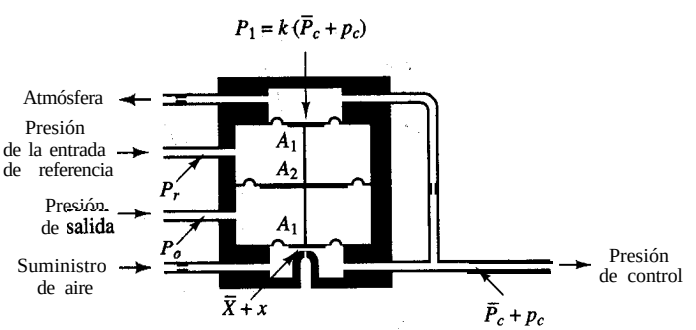


Figura 531
Diagrama esquemático de un controlador neumático proporcional de tipo fuerza-balance.

inferior. El aire de esta cámara escapa a la atmósfera a través de la tobera. El flujo a través de la tobera depende de la brecha y la disminución de la presión a través de la misma. Un incremento en la presión de la entrada de referencia P_r, al tiempo que la presión de salida P_o permanece igual, provoca que el vástago de la válvula se mueva hacia abajo, disminuyendo la brecha entre la tobera y el diafragma de la aleta. Esto provoca que la presión de control P_c aumente. Suponga que

$$p_e = P_r - P_o \tag{5-20}$$

Si $p_c = 0$, existe un estado de equilibrio con la distancia tobera-aleta igual a $\bar{X}$ y la presión de control igual a $\bar{P}_c$. En este estado de equilibrio, $P_1 = \bar{P}_c k$, (en donde $K < 1$) y

$$\bar{X} = \alpha(\bar{P}_c A_1 - \bar{P}_c k A_1) \tag{5-21}$$

en donde α es una constante.

Supongamos que $p_e \neq 0$ y definamos las pequeñas variaciones en la distancia tobera-aleta y la presión de control como x y p_c, respectivamente. En este caso obtenemos la ecuación siguiente:

$$\bar{X} + x = \alpha[(\bar{P}_c + p_c)A_1 - (\bar{P}_c + p_c)kA_1 - p_e(A_2 - A_1)] \tag{5-22}$$

De las ecuaciones (5-21) y (5–22), obtenemos

$$x = \alpha[p_c(1 - k)A_1 - p_e(A_2 - 41 \tag{5-23}$$

En este punto, debemos examinar la cantidad x. En el diseño de los controladores neumáticos, la distancia tobera-aleta se hace muy pequeña. En vista de que x/α es un término de orden mayor que p_c (1 – k)A_1 o $p_e(A_2 - A_1)$, es decir, parap, $\neq$ 0,

$$\frac{x}{\alpha} \ll p_c(1 - k)A_1$$

$$\frac{x}{\alpha} \ll p_e(A_2 - A_1)$$

es posible no considerar el término x en nuestro análisis. A continuación se vuelve a escribir la ecuación (5-23) para que refleje esta suposición del modo siguiente:

$$p_c(1 - k)A_1 = p_e(A_2 - A_1)$$

y la función de transferencia entre p_c y p_e se convierte en

$$\frac{P_c(s)}{P_e(s)} \frac{A_2 - A_1}{A_1} \frac{}{1 - k} = K_p$$

en dondep, se define mediante la ecuación (5-20). El controlador de la figura 5-31 es proporcional. El valor del aumento K_p se incrementa conforme k tiende a uno. Observe que el valor de k depende de los diámetros de los orificios de los tubos de entrada y salida de la cámara de realimentación. (El valor de k tiende a la unidad conforme la resistencia al flujo en el orificio de tubo de entrada se hace más pequeña.)

Válvulas con actuador neumático. Una característica de los controles neumáticos es que emplean casi exclusivamente válvulas con actuador neumático. Una válvula con actuador neumático proporciona una gran potencia de salida. (Dado que un actuador neumático requiere de una entrada de potencia grande para producir una salida de potencia grande, es necesario contar con una cantidad suficiente de aire presurizado.) En las válvu-

las con actuador neumático prácticas, las características de la válvula tal vez no sean lineales; es decir, es posible que el flujo no sea directamente proporcional a la posición del vástago de la válvula y también pueden existir otros efectos no lineales, tales como la histéreris.

Considere el diagrama esquemático de una válvula con actuador neumático como la de la figura 5-32. Suponga que el área del diafragma es A. También suponga que cuando el error es cero, la presión de control es igual a $\bar{P}_c$ y el desplazamiento de la válvula es igual a $\bar{X}$.

En el análisis siguiente, consideraremos algunas variaciones pequeñas en las variables y linealizaremos la válvula con actuador neumático. Definamos las variaciones pequeñas en la presión de control y en el desplazamiento de la válvula correspondiente como p_c y x, respectivamente. Dado que un cambio pequeño en la fuerza de presión neumática aplicada al diafragma vuelve a posicionar la carga, formada por el resorte, la fricción viscosa y la masa, la ecuación de balance de la fuerza se convierte en

$$Ap_c = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx \tag{5-24}$$

en donde m = masa de la válvula y vástago de la válvula
b = coeficiente de fricción viscosa
k = constante del resorte

Si las fuerzas producidas por la masa y la fricción viscosa son insignificantes, la ecuación (5-24) se simplifica a:

$$Ap_c = kx$$

Por ende, la función de transferencia entre x y p_c se convierte en

$$\frac{X(s)}{P_c(s)} = \frac{A}{k} = K_c$$

en donde X(s) = $\mathcal{L}[x]$ y $P_c(s) = \mathcal{L}[p_c]$. Si q_i, el cambio en el flujo a través de la válvula con actuador neumático, es proporcional a x, el cambio en el desplazamiento del vástago de la válvula es, entonces

$$\frac{Q_i(s)}{X(s)} = K_q$$

en donde $Q_i(s) = \mathcal{L}[q_i]$ y K_q es una constante. La función de transferencia entre q_i y p_c se convierte en

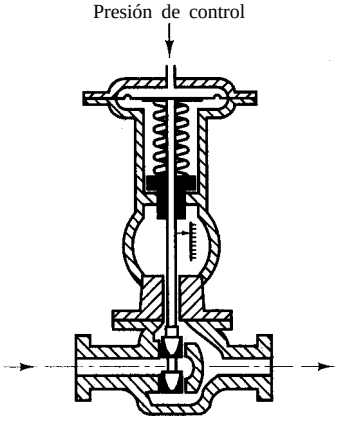


Figura 5-32
Diagrama esquemático de una válvula con actuador neumático.

$$\frac{Q_i(s)}{P_c(s)} = K_c K_q = K_v$$

en donde K_v es una constante.

La presión de control estándar para este tipo de válvula con actuador neumático está entre 3 y 15 psig. El desplazamiento del vástago de la válvula está limitado por la carrera que se permite al diafragma y sólo es de unas cuantas pulgadas. Si se necesita un viaje más largo, es posible emplear una combinación de pistón-resorte.

En las válvulas con actuador neumático, la fuerza de fricción-estática debe limitarse a un valor bajo para no provocar una histéresis excesiva. Debido a la compresibilidad del aire, la acción de control tal vez no sea positiva; es decir, puede ocurrir un error en la posición del vástago de la válvula. El uso de un posicionador de válvula mejora el desempeño de una válvula con actuador neumático.

Principio básico para obtener una acción de control derivativa. Ahora presentaremos los métodos para obtener una acción de control derivativa.Volveremos a enfatizar el principio y no los detalles del mecanismo real. El principio básico para generar la acción de control que se requiere es insertar el inverso de la función de transferencia deseada en la trayectoria de realimentación. Para el sistema de la figura 5-33, la función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Si $|G(s)H(s)| \gg 1$, entonces $C(s)/R(s)$ puede volverse

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{H(s)}$$

Por tanto, si se pretende una acción de control proporcional-derivativa, insertamos un elemento que tenga la función de transferencia $1/(Ts + 1)$ en la trayectoria de realimentación.

Considere el controlador neumático de la figura 5–34(a). Si se toman en cuenta cambios pequeños en las variables, podemos dibujar un diagrama de bloques de este controlador, como en la figura 5–34(b). A partir del diagrama de bloques observamos que el controlador es de tipo proporcional.

Ahora mostraremos que la adición de una restricción en la trayectoria de realimentación negativa modifica el controlador proporcional en un controlador proporcional-derivativo, el cual se conoce como controlador PD.

Considere el controlador neumático de la figura 5–35(a). Si suponemos una vez más cambios pequeños en el error, la distancia tobera-aleta y la presión de control, podemos

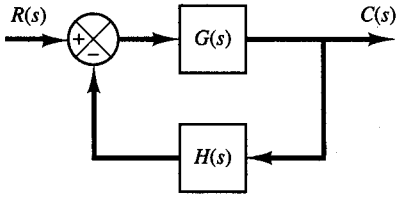


Figura 5–33
Sistema de control.

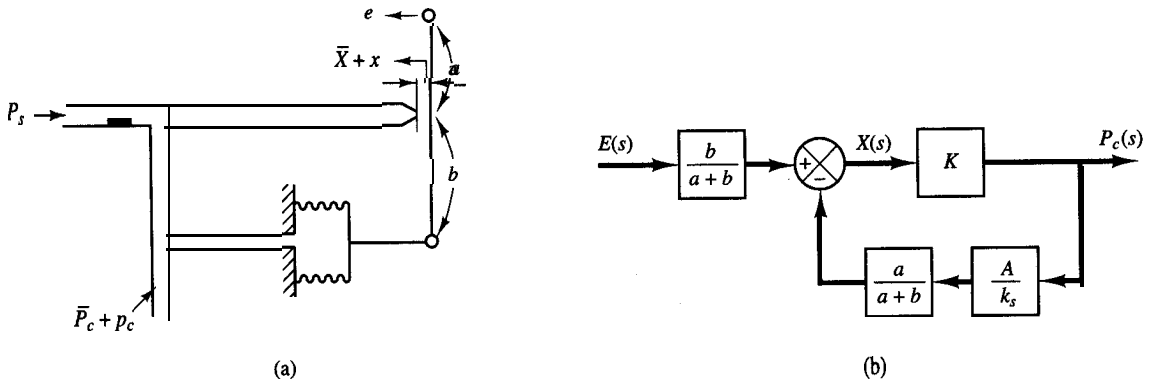


Figura 5-34
(a) Controlador neumático proporcional; (b) diagrama de bloques del controlador.

resumir la operación de este controlador del modo siguiente: supongamos primero un cambio escalón pequeño en e. En este caso, el cambio en la presión de control p_c será instantáneo. La restricción ***R*** evitará momentáneamente que el fuelle de realimentación detecte el cambio de presión p_c. Por tanto, el fuelle de realimentación no responderá momentáneamente y la válvula con **actuador** neumático detectará el efecto completo del movimiento de la aleta. Conforme pasa el tiempo, el fuelle de realimentación se expandirá o se contraerá. El cambio en la distancia tobera-aleta x y el cambio en la presión de control P_c **se grafican** contra el tiempo t, como en la figura **5–35(b).** En estado estable, el fuelle de **reali-**

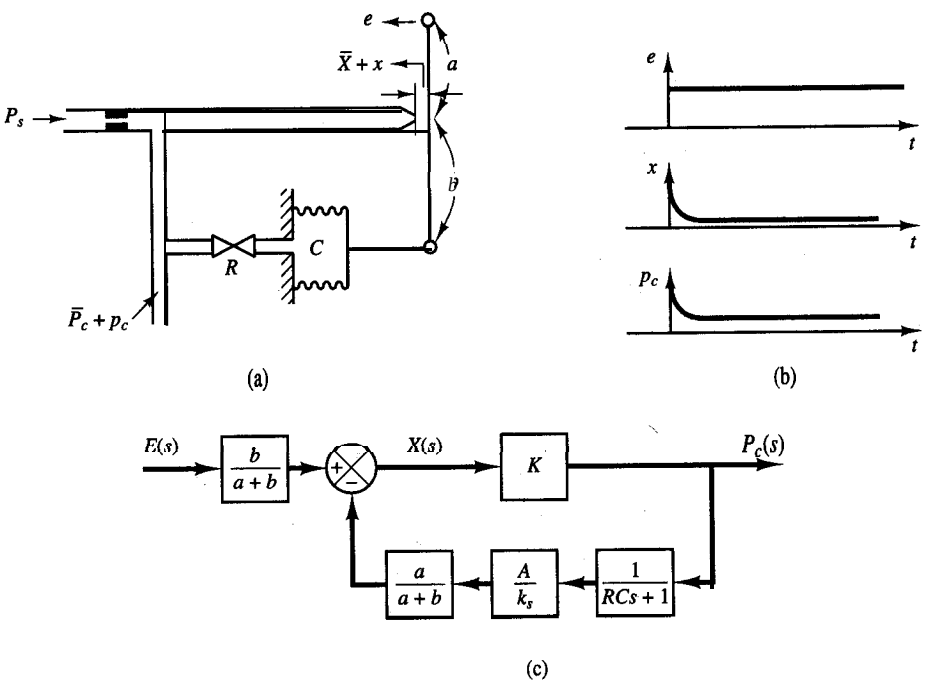


Figura 5–35
(a) Controlador neumático proporcional-derivativo; (b) cambio escalón en e y cambios correspondientes en x y P_c **graficados** contra t; (c) diagrama de bloques del controlador.

mentación funciona como un mecanismo de realimentación ordinario. La curva P_c contra t muestra claramente que este controlador es de tipo proporcional-derivativo.

La figura 5–35(c) contiene el diagrama de bloques que corresponde a este controlador neumático. En el diagrama de bloques, K es una constante, A es el área del fuelle y k_s es la constante del resorte equivalente del fuelle. La función de transferencia entre p_c y e se obtiene a partir del diagrama de bloques, del modo siguiente:

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\dfrac{b}{a+b}K}{1 + \dfrac{Ka}{a+b}\dfrac{A}{k_s}\dfrac{1}{RCs+1}}$$

En semejante controlador, la ganancia de lazo $|KaA/[(a + b)k_s(RCs + 1)]|$ suele ser mucho más grande que la unidad. Por tanto, la función de transferencia $P_c(s)/E(s)$ se simplifica para producir

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s)$$

en donde

$$K_p = \frac{bk_s}{aA}, \qquad T_d = RC$$

Por tanto, el retraso en la realimentación negativa, o la función de transferencia $1/(RCs + 1)$ en la trayectoria de realimentación, modifica el controlador proporcional en un controlador proporcional-derivativo.

Observe que, si la válvula de realimentación está completamente abierta, la acción de control se vuelve proporcional. Si la válvula de realimentación está completamente cerrada, la acción de control se vuelve proporcional (de encendido y apagado) de banda estrecha.

Obtención de una acción de control neumático proporcional-integral. Considere el controlador proporcional de la figura 5–34(a). Suponiendo cambios pequeños en las variables, demostraremos que la adición de un retraso en la realimentación positiva modifica este controlador proporcional en un controlador proporcional-integral, conocido como controlador PI.

Considere el controlador neumático de la figura 5–36(a), cuya operación es la siguiente: el fuelle representado por 1 se conecta a la fuente de presión de control sin ninguna restricción. El fuelle representado por II se conecta a la fuente de presión de control a través de una restricción. Supongamos un cambio escalón pequeño en el error. Esto provocará que la presión trasera en la tobera cambie de manera instantánea. Por ende, también ocurrirá instantáneamente un cambio en la presión de control p_c. Debido a la restricción de la válvula en la trayectoria al fuelle II, habrá un descenso en la presión a través de la válvula. Conforme pasa el tiempo, el aire fluirá a través de la válvula, de un modo tal que el cambio en la presión del fuelle II alcanzará el valor de p_c. Por lo tanto, el fuelle II se ex-

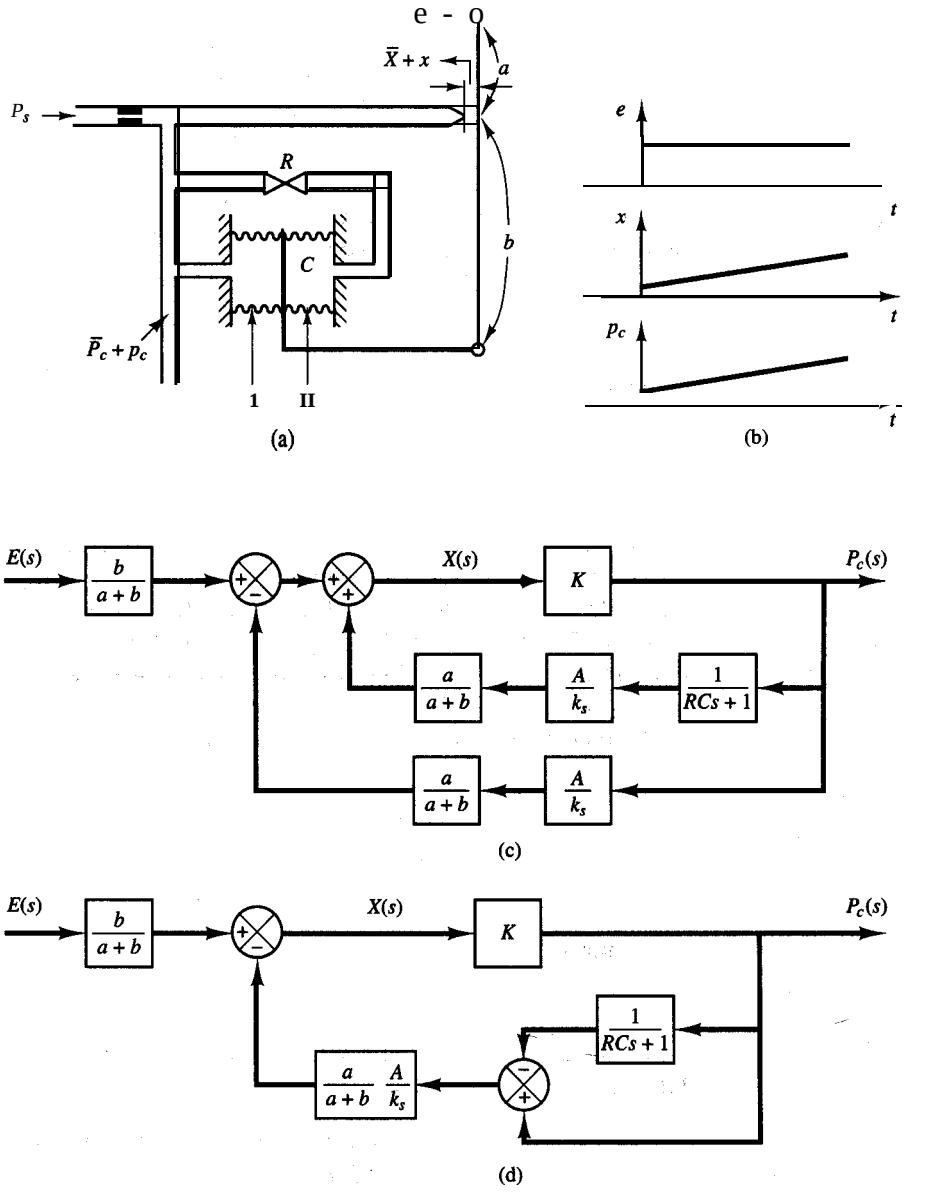


Figura 5-36
(a) Controlador neumático proporcional-integral; (b) cambio escalón en e y los cambios correspondientes en x y p_c graficados contra t; (c) diagrama de bloques del controlador; (d) diagrama de bloques simplificado.

pandirá o contraerá, de modo que moverá la aleta una cantidad adicional en la dirección del desplazamiento original e. Esto provocará que la presión trasera p_c en la tobera cambie en forma continua, como se observa en la figura 5–36(b).

Observe que la acción de control integral en el controlador adopta una forma tal que cancela lentamente la realimentación que aportó originalmente el control proporcional.

La figura 5–36(c) contiene un diagrama de bloques de este controlador, bajo la suposición de variaciones pequeñas en las variables. Una simplificación de este diagrama de bloques produce la figura 5–36(d). La función de transferencia de este controlador es

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\dfrac{b}{a+b}K}{1 + \dfrac{Ka}{a+b}\dfrac{A}{k_s}\left(1 - \dfrac{1}{RCs+1}\right)}$$

en donde K es una constante, A es la área del fuelle y k_s es la constante del resorte equivalente del fuelle combinado. Si $|KaARCs/[(a + b)k_s(RCs + 1)]| \gg 1$, lo cual ocurre con regularidad, la función de transferencia se simplifica a

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

en donde

$$K_p = \frac{bk_s}{aA}, \qquad T_i = RC$$

Obtención de una acción de control neumático proporcional-integral-derivativa. Una combinación de los controladores neumáticos de las figuras 5–35(a) y 5–36(a) produce un controlador proporcional-integral-derivativo, conocido como controlador PID. La figura 5–37(a) muestra un diagrama esquemático de dicho controlador. La figura 5–37(b) muestra un diagrama de bloques de este controlador bajo la suposición de variaciones pequeñas en las variables.

La función de transferencia de este controlador es

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\dfrac{bK}{a+b}}{1 + \dfrac{Ka}{a+b}\dfrac{A}{k_s}\dfrac{(R_iC - R_dC)s}{(R_dCs + 1)(R_iCs + 1)}}$$

Si definimos

$$T_i = R_iC, \qquad T_d = R_dC$$

y consideramos que bajo una operación normal, $|KaA(T_i - T_d)s/[(a + b)k_s(T_ds + 1)(T_is + 1)]| \gg 1$ y $T_i \gg T_d$, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{P_c(s)}{E(s)} &\doteqdot \frac{bk_s}{aA}\frac{(T_ds + 1)(T_is + 1)}{(T_i - T_d)s} \\ &\doteqdot \frac{bk_s}{aA}\frac{T_dT_is^2 + T_is + 1}{T_is} \\ &= K_p\left(1 + \frac{1}{T_is} + T_ds\right)\end{aligned} \tag{5-25}$$

en donde

$$K_p = \frac{bk_s}{aA}$$

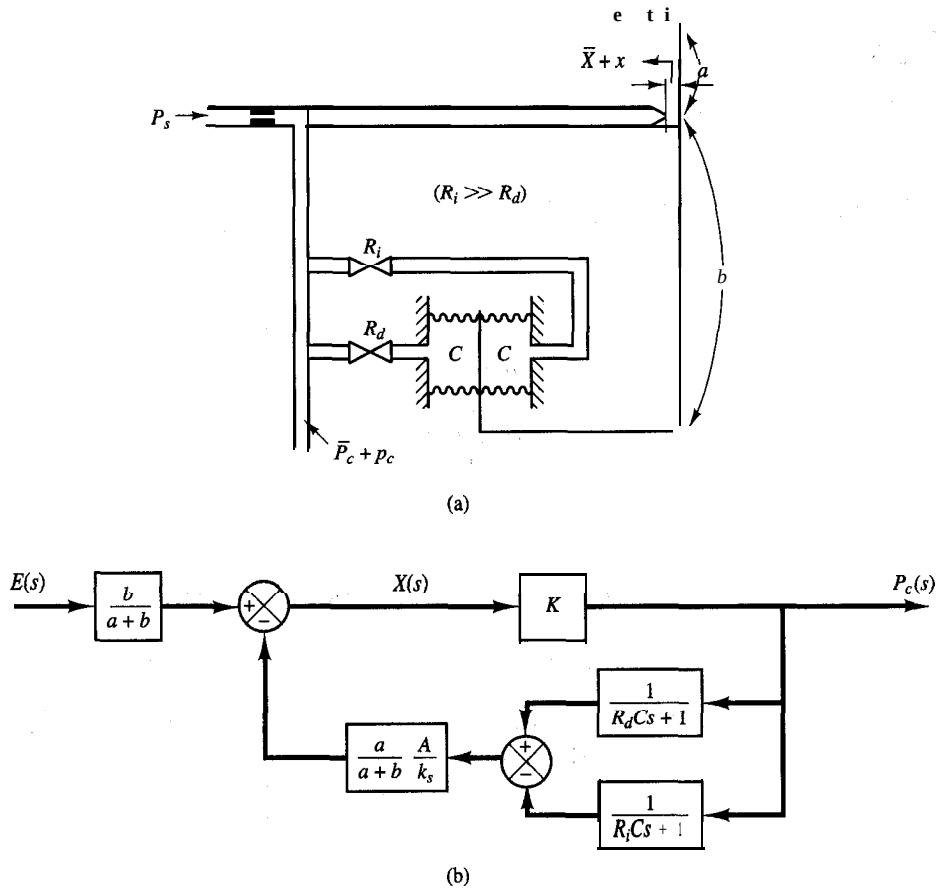


Figura 5-37
(a) Controlador neumático proporcional-integral-derivativo;
(b) diagrama de bloques del controlador.

La ecuación (5-25) indica que el controlador de la figura 5–37(a) es un controlador proporcional-integral-derivativo (un controlador PID).

5-7 CONTROLADORES HIDRÁULICOS

Excepto para los controladores neumáticos de baja presión, rara vez se ha usado el aire comprimido para el control continuo del movimiento de dispositivos que tienen masas significativas sujetas a fuerzas de carga externas. Para estos casos, por lo general se prefieren los controladores hidráulicos.

Sistemas hidráulicos. El uso de la circuitería hidráulica en las máquinas-herramienta, los sistemas de control de aeronaves y operaciones similares se ha extendido debido a factores tales como su positividad, precisión, flexibilidad, una alta razón de peso-potencia, sus rápidos arranque, paro y reversa, que realiza con suavidad y precisión, así como la simplicidad de sus operaciones.

La presión de operación en los sistemas hidráulicos está en algún punto entre 145 y 5000 lb_f/plg^2 (entre 1 y 35 MPa). En algunas aplicaciones especiales, la presión de operación puede subir hasta 10,000 lb_f/plg^2 (70 MPa). Por el mismo requerimiento de potencia, el peso y el tamaño de la unidad hidráulica se reducen a fin de aumentar la presión del suministro.

Los sistemas hidráulicos de alta presión, proporcionan una fuerza muy grande. Permiten un posicionamiento preciso de acción rápida de cargas pesadas. Es común una combinación de sistemas electrónicos e hidráulicos debido a que así se combinan las ventajas del control electrónico y la potencia hidráulica.

Ventajas y desventajas de los sistemas hidráulicos. Hay ciertas ventajas y desventajas en el uso de los sistemas hidráulicos en lugar de otros Algunas de las ventajas son las siguientes:

1. El fluido hidráulico funciona como lubricante, además de disipar el calor generado en el sistema hacia un intercambiador de calor conveniente.
2. Los actuadores hidráulicos de un tamaño comparativamente pequeño pueden desarrollar fuerzas o pares grandes.
3. Los actuadores hidráulicos tienen una velocidad de respuesta más alta para arranques, paros e inversiones de velocidad rápidos.
4. Los actuadores hidráulicos operan sin daño bajo condiciones continuas, intermitentes, invertidas y de pérdida de velocidad.
5. La disponibilidad de actuadores lineales y rotacionales aporta flexibilidad al diseño.
6. Debido a los bajos escurrimientos en los actuadores hidráulicos, la disminución de la velocidad cuando se aplica una carga es pequeña.

En cambio, varias desventajas tienden a limitar su uso.

1. No es tan sencillo contar con la potencia hidráulica como con la potencia eléctrica.
2. El costo de un sistema hidráulico puede ser más alto que el de un sistema eléctrico comparable que realice una función similar.
3. Existen riesgos de incendio y explosión, a menos que se usen fluidos resistentes al fuego.
4. Debido a que es difícil mantener un sistema hidráulico libre de escurrimientos, el sistema tiende a ser complicado.
5. El aceite contaminado puede provocar fallas en el funcionamiento adecuado de un sistema hidráulico.
6. Como resultado de las características no lineales y otras condiciones complejas implícitas, el diseño de los sistemas hidráulicos complejos es muy complicado.
7. Por lo general, los circuitos hidráulicos tienen características deficientes de amortiguamiento. Si un circuito hidráulico no se diseña en forma adecuada, pueden ocurrir o desaparecer fenómenos inestables, dependiendo de las condiciones de operación.

Comentarios. Es necesaria una atención especial a fin de asegurar que el sistema hidráulico sea estable y satisfactorio bajo todas las condiciones de operación. Dado que la viscosidad del fluido hidráulico afecta de manera significativa los efectos del amortiguamiento y la fricción de los circuitos hidráulicos, deben realizarse pruebas de estabilidad a la temperatura de operación más alta posible.

Observe que casi todos los sistemas hidráulicos son no lineales. Sin embargo, en ocasiones es posible linealizar los sistemas no lineales con el propósito de reducir su complejidad y permitir soluciones suficientemente precisas para gran parte de los propósitos. La sección 3-10 contiene una técnica de linealización útil para enfrentar los sistemas no lineales.

Controladores hidráulicos integrales. El servomotor hidráulico de la figura 5-38 es, en esencia, un amplificador y actuador de la potencia hidráulica, controlado por una válvula piloto. La válvula piloto está balanceada, en el sentido de que las fuerzas de presión

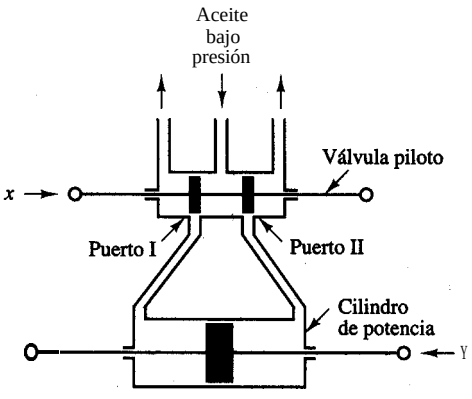


Figura 5-38
Servomotor hidráulico.

que actúan sobre ella están todas balanceadas. Una válvula piloto puede controlar una salida de potencia muy grande, y puede posicionarse con muy poca potencia.

A continuación se mostrará que, para masas de carga insignificante, el servomotor de la figura 5-38 funciona como un integrador o un controlador integral. Dicho servomotor constituye la base del circuito de control hidráulico.

En el servomotor hidráulico de la figura 5-38, la válvula piloto (una válvula de cuatro **vías)** tiene dos áreas en el carrete. Si el ancho del área es menor que el puerto de la manga de la válvula, se dice que esta última es ***subtraslapada.*** Las válvulas ***sobretraslapadas*** son más anchas que el puerto. Una válvula sin ***traslape*** tiene un área cuyo ancho es idéntico al del puerto. (Si la válvula piloto no es una **válvula** sin traslape, los análisis de los servomotores hidráulicos se vuelven muy complicados.)

En el análisis presente, suponemos que el fluido hidráulico es incompresible y que la fuerza de inercia del pistón de potencia y de la carga es insignificante en comparación con la fuerza hidráulica del pistón de potencia. También suponemos que la válvula piloto no tiene traslape y que la velocidad del flujo del aceite es proporcional al desplazamiento de la válvula piloto.

La operación de este servomotor hidráulico es la siguiente. Si la entrada x mueve la válvula piloto a la derecha, se descubre el puerto II y, por tanto, se introduce aceite a alta presión en el lado derecho del pistón de potencia. Dado que el puerto 1 está conectado al puerto de drenaje, el aceite del lado izquierdo del pistón de potencia regresa al drenaje. El aceite que fluye hacia el cilindro de potencia está a alta presión; el aceite que fuera del cilindro de potencia hacia el drenaje está a baja presión. La diferencia resultante en la presión de ambos lados del pistón de potencia provocará que se mueva a la izquierda.

Observe que el flujo de aceite q(kg/seg) por ***dt(seg)*** es igual al desplazamiento del pistón de potencia dy(m) por el área del pistón $A(\text{m}^2)$ por la densidad del aceite $\rho(\text{kg/m}^3)$. Por tanto,

$$Ap\,dy = q\,dt \tag{5-26}$$

Debido a la suposición de que el flujo de aceite q es proporcional al desplazamiento x de la válvula piloto, tenemos que

$$q = K_1 x \tag{5-27}$$

en donde K_1 es una constante positiva. A partir de las ecuaciones (5-26) y (5-27) obtenemos

$$A\rho \frac{dy}{dt} = K_1 x$$

La transformada de Laplace de esta última ecuación, suponiendo una condición inicial de cero, produce

$$A\rho s Y(s) = K_1 X(s)$$

o bien

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_1}{A\rho s} = \frac{K}{s}$$

en donde $K = K_1/(A\rho)$. Por ende, el servomotor hidráulico de la figura 5-38 funciona como un controlador integral.

Controladores hidráulicos proporcionales. Se ha demostrado que el servomotor de la figura 5-38 funciona como un controlador integral. Este servomotor se modifica en un controlador proporcional mediante un enlace de realimentación. Considere el controlador hidráulico de la figura 5–39(a). El lado izquierdo de la válvula piloto está unido al lado izquierdo del pistón de potencia mediante un enlace *ABC.* Este enlace es flotante y, por tanto, no se mueve alrededor de un pivote fijo.

En este caso, el controlador opera del modo siguiente. Si la entrada e mueve la válvula piloto a la derecha, se descubrirá el puerto II y el aceite a alta presión fluirá a través del puerto II hacia el lado derecho del pistón de potencia e impulsará éste a la izquierda. El pistón de potencia, al moverse a la izquierda, arrastrará con él el enlace de realimentación *ABC,* con lo cual moverá la válvula piloto a la izquierda. Esta-acción continúa hasta que el pistón del piloto cubre otra vez los puertos 1 y II. Un diagrama de bloques del sistema se dibuja en la figura 5–39(b). La función de transferencia entre $Y(s)$ y E(s) se obtiene mediante

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\dfrac{b}{a+b}\,\dfrac{K}{s}}{1 + \dfrac{K}{s}\,\dfrac{a}{a+b}} = \frac{bK}{s(a+b) + Ka}$$

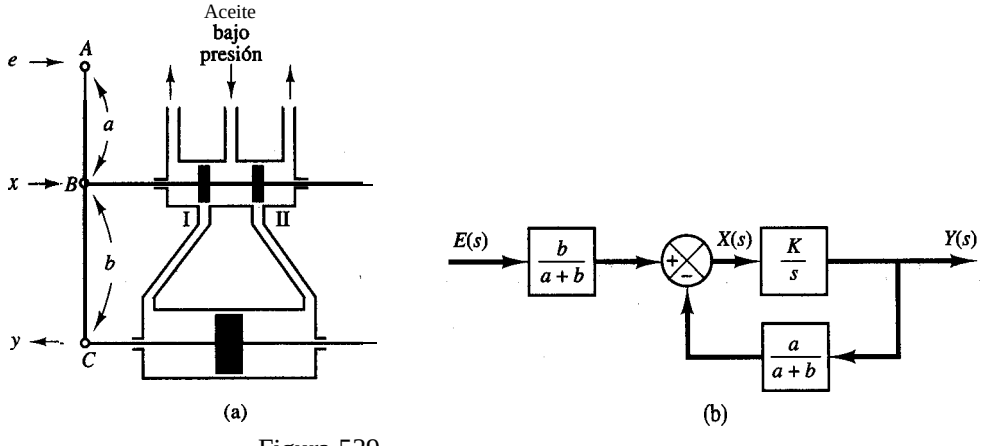


Figura 539
(a) Servomotor que funciona como controlador proporcional, (b) diagrama de bloques del servomotor.

Considerando que, bajo condiciones de operación normales, tenemos que $|Ka/[s(a + b)]| \gg 1$, esta última ecuación se simplifica a

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{b}{a} = K_p$$

La función de transferencia entre y y e se convierte en una constante. Por tanto, el controlador hidráulico de la figura 5–39(a) funciona como un controlador proporcional, cuya ganancia es K_p. Esta ganancia se ajusta modificando efectivamente la razón b/a de la palanca. (El mecanismo de ajuste no se muestra en el diagrama.)

De esta manera, hemos visto que la adición de un enlace de realimentación hace que el servomotor hidráulico funcione como un controlador proporcional.

Amortiguadores. El amortiguador de la figura 5–40(a) funciona como un elemento de diferenciación. Suponga que introducimos un desplazamiento escalón a la posición del pistón x. En este caso, el desplazamiento y iguala momentáneamente a x. Sin embargo, debido a la fuerza del resorte, el aceite fluirá a través de la resistencia R y el cilindro regresará a la posición original. Las curvas x contra t y y contra t se muestran en la figura 5–40(b).

Obtengamos la función de transferencia entre el desplazamiento y y el desplazamiento x. Definamos las presiones existentes en ambos lados del pistón como P_1(lb/plg²) y P_2 (lb/plg²), respectivamente. Suponga que la fuerza de inercia implícita es insignificante. Después, la fuerza que funciona sobre el pistón debe equilibrar la fuerza del resorte. Por tanto,

$$A(P_1 - P_2) = ky$$

en donde A = área de pistón, plg²
k = constante del resorte, lb_f/plg

El flujo q se obtiene mediante

$$q = \frac{P_1 - P_2}{R}$$

en donde q = flujo a través de la restricción, lb/seg
R = resistencia al flujo en la restricción, lb_f-seg/plg²-lb

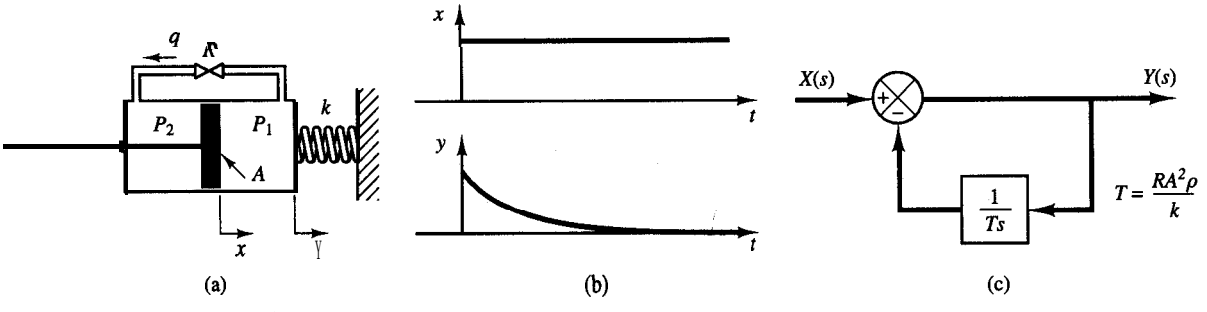


Figura 5–40
(a) Amortiguador; (b) cambio escalón en x y cambio correspondiente en y, graficados contra t; (c) diagrama de bloques del amortiguador.

Dado que el flujo a través de la restricción durante dt segundos debe ser igual al cambio en la masa del aceite del lado izquierdo del pistón durante los mismos dt segundos, obtenemos

$$q\,dt = A\rho(dx - dy)$$

en donde ρ = densidad, lb/plg^3. (Suponemos que el fluido es incompresible o que ρ = constante.) Esta última ecuación puede reescribirse como

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = \frac{4}{Ap} = \frac{P_1 - P_2}{RA\rho} = \frac{ky}{RA^2\rho}$$

o bien

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} + \frac{ky}{RA^2\rho}$$

Tomando las transformadas de Laplace de ambos miembros de esta ultima ecuación, y suponiendo condiciones iniciales de cero, obtenemos

$$sX(s) = sY(s) + \frac{k}{RA^2\rho}Y(s)$$

Por tanto, la función de transferencia de este sistema se convierte en

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s}{s\dfrac{k}{RA^2\rho}}$$

Definamos $RA^2\rho/k = T$. Entonces

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ts}{Ts + 1} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{Ts}}$$

La figura 5–40(c) muestra una representación en diagrama de bloques para este sistema.

Obtención de una acción de control hidráulico proporcional-integral. La figura 5–41(a) muestra un diagrama esquemático de un controlador hidráulico proporcional-integral. La figura 5–41(b) contiene un diagrama de bloques del mismo. La función de transferencia $Y(s)/E(s)$ se obtiene mediante

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\dfrac{b}{a+b}\dfrac{K}{s}}{1 + \dfrac{Ka}{a+b}\dfrac{T}{Ts+1}}$$

En un controlador semejante, bajo una operación normal, $|KaT/[(a + b)(Ts + 1)]| \gg 1$, con el resultado de que

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

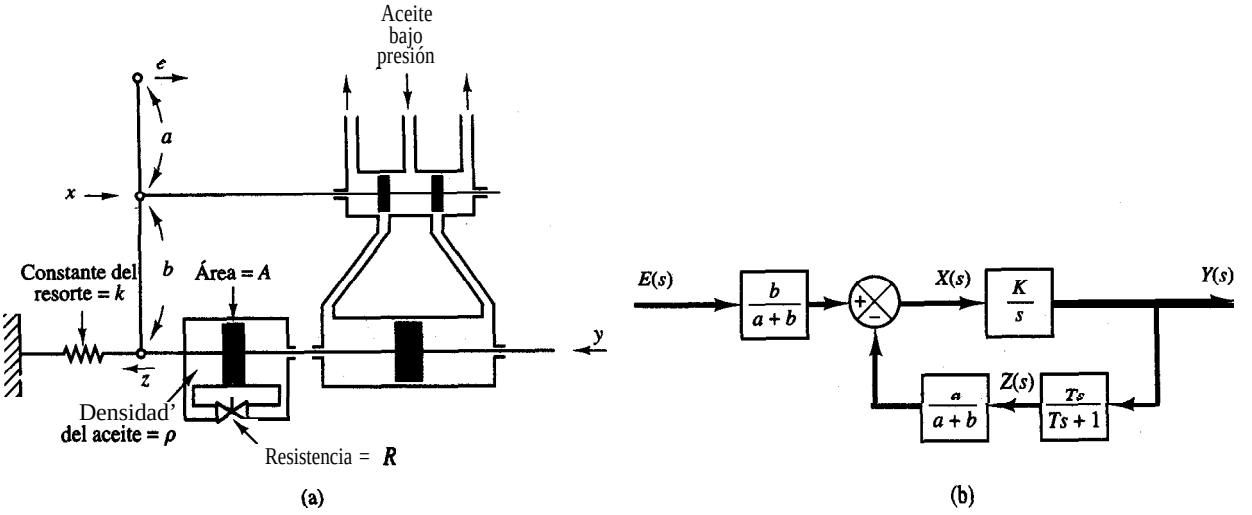


Figura 5–41
(a) Diagrama esquemático de un controlador hidráulico proporcional-integral; (b) diagrama de bloques del controlador.

en donde

$$K_p = \frac{b}{a}, \qquad T_i = T = \frac{RA^2\rho}{k}$$

Por lo tanto, el controlador de la figura 5–52(a) es un controlador proporcional-integral (un controlador PI).

Obtención de una acción de control hidráulico proporcional-derivativa. La figura 5–42(a) muestra un diagrama esquemático de un controlador hidráulico proporcional-

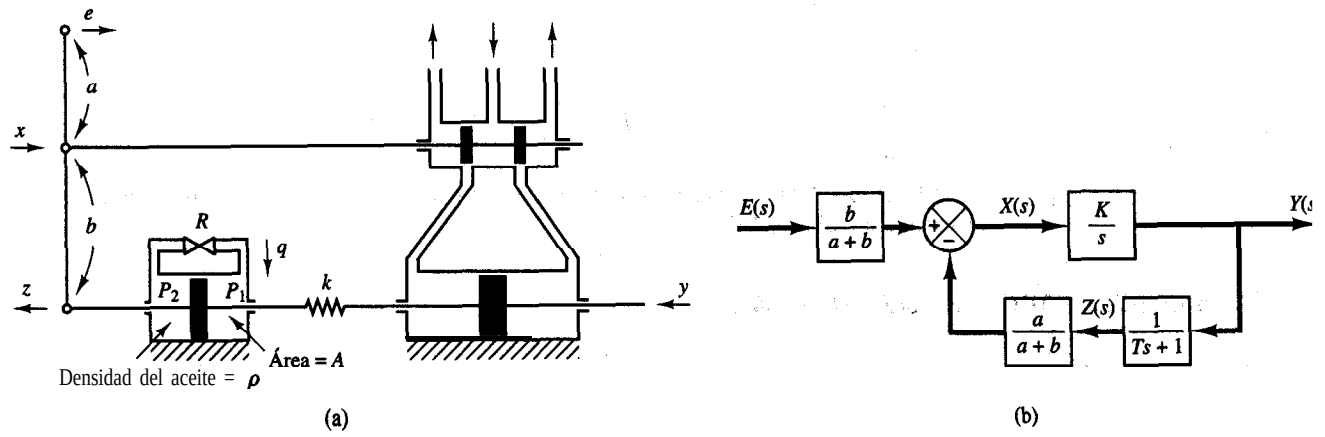


Figura 5–42
(a) Diagrama esquemático de un controlador hidráulico proporcional-derivativo;(b) diagrama de bloques del controlador.

derivativo. Los cilindros están fijos en el espacio y los pistones se mueven. Para este sistema, observe que

$$k(y - z) = A(P_2 - P_1)$$

$$q = \frac{P_2 - P_1}{R}$$

$$q\,dt = \rho A\,dz$$

Por tanto

$$y = z + \frac{A}{k}qR = z + \frac{RA^2\rho}{kdt}\frac{dz}{dt}\,dz$$

o bien

$$\frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

en donde

$$T = \frac{RA^2\rho}{k}$$

La figura 5–42(b) muestra un diagrama de bloques para este sistema. A partir del diagrama de bloques, la función de transferencia $Y(s)/E(s)$ se obtiene como

$$\frac{w}{E(s)} = \frac{\dfrac{b}{a+b}\dfrac{K}{s}}{1 + \dfrac{a}{a+b}\dfrac{K}{s}\dfrac{1}{Ts+1}}$$

Bajo una operación normal, tenemos que $|aK/[(a + b)s(Ts + 1)]| \gg 1$. Por tanto,

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = K_p(1 + Ts)$$

en donde,

$$K_p = \frac{b}{a}, \qquad T = \frac{RA^2\rho}{k}$$

De este modo, el controlador de la figura 5–42(a) es un controlador **proporcional-derivativo** (un controlador PD).

5-8 CONTROLADORES ELECTRÓNICOS

Esta sección analiza los controladores electrónicos que usan amplificadores operacionales. Empezaremos por obtener las funciones de transferencia de los circuitos con amplificadores operacionales simples. A continuación obtendremos las funciones de transferencia de algunos de los controladores con amplificadores operacionales. Pos último, proporcionaremos en una tabla. los controladores con amplificadores operacionales y sus funciones de transferencia.

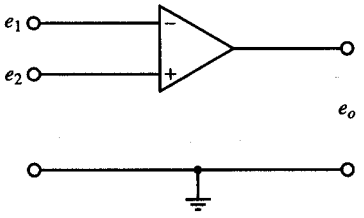


Figura 5–43
Amplificador operacional.

Amplificadores operacionales. Los amplificadores operacionales, también conocidos como amp ops, se usan con frecuencia para amplificar las señales de los circuitos sensores. Los amp ops también se usan con frecuencia en los filtros que sirven para compensación. La figura 5-43 muestra un amp op. Es una práctica común seleccionar la tierra como 0 volts y medir los voltajes de entrada e_1 y e_2 en relación con ella. La entrada e_1 hacia la terminal negativa del amplificador está invertida y la entrada e_2 hacia la terminal positiva no lo está. Por consiguiente, la entrada total al amplificador se convierte en $e_2 - e_1$. De este modo, para el circuito de la figura 5-54, tenemos que,

$$e_o = K(e_2 - e_1) = -K(e_1 - e_2)$$

en donde las entradas e_1 y e_2 pueden ser señales de cd o ca y K es la ganancia diferencial o la ganancia de voltaje. La magnitud de K es, aproximadamente de $10^5 \sim 10^6$ para las señales de cd y señales de ca tienen frecuencias menores que unos 10 Hz. (La ganancia diferencial disminuye con la frecuencia de la señal y se estabiliza alrededor de la unidad para frecuencias de 1 Mhz $\sim$ 50 Mhz.) Observe que el amp op amplifica la diferencia entre los voltajes e_1 y e_2. Tal amplificador se denomina amplificador diferencial. Dado que la ganancia del amp op es muy alta, es necesario tener una realimentación negativa de la salida hacia la entrada para hacer estable el amplificador. (La realimentación se lleva a cabo de la salida hacia la entrada inversora para que la realimentación sea negativa.)

En el amp op ideal no fluyen corrientes en las terminales de entrada y el voltaje de salida no se ve afectado por la carga conectada a la terminal de salida. En otras palabras, la impedancia de entrada es infinita y la impedancia de salida es cero. En un amp op real, fluye una corriente muy pequeña (casi insignificante) hacia una terminal de entrada y la salida no se carga demasiado. En el análisis que se hace aquí, suponemos que los amp ops son ideales.

Amplificador inversor. Considere el amplificador operacional de la figura 5–44. Obtengamos el voltaje de salida e_o.

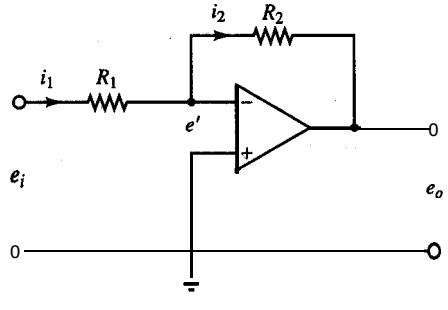


Figura 5–44
Amplificador inversor.

La ecuación para este circuito se obtiene del modo siguiente:

$$i_1 = \frac{e_i - e'}{R_1}, \qquad i_2 = \frac{e' - e_o}{R_2}$$

Dado que sólo fluye una corriente insignificante hacia el amplificador, la corriente i_1 debe ser igual a la corriente i_2. Por tanto

$$\frac{e_i - e' \quad - \quad e_o}{R_1 \qquad R_2}$$

Dado que $K(0 - e') = e_o$ y $K \gg 1$, e' debe ser casi cero, o e' $\doteqdot$ 0. Por tanto, tenemos que

$$\frac{e_i}{R_1} = \frac{-e_o}{R_2}$$

o bien

$$e_o = -\frac{R_2}{R_1} e_i$$

De esta manera el circuito que se muestra es un amplificador inversor. Si $R_1 = R_2$, el circuito amp op mostrado funciona como un inversor de signo.

Amplificador no inversor. La figura 5–45(a) muestra un amplificador no inversor. La figura 5–45(b) contiene un circuito equivalente a este último. Para el circuito de la figura 5–45(b), tenemos que

$$e_o = K\left(e_i - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e_o\right)$$

en donde K es la ganancia diferencial del amplificador. A partir de esta última ecuación, obtenemos

$$e_i = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{K}\right) e_o$$

Dado que $K \gg 1$, si $R_1/(R_1 + R_2) \gg 1/K$, entonces,.

$$e_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) e_i$$

Esta ecuación obtiene el voltaje de salida e_o. Dado que e_o y e_i tienen los mismos signos, el circuito amp op de la figura 5–45(a) es no inversor.

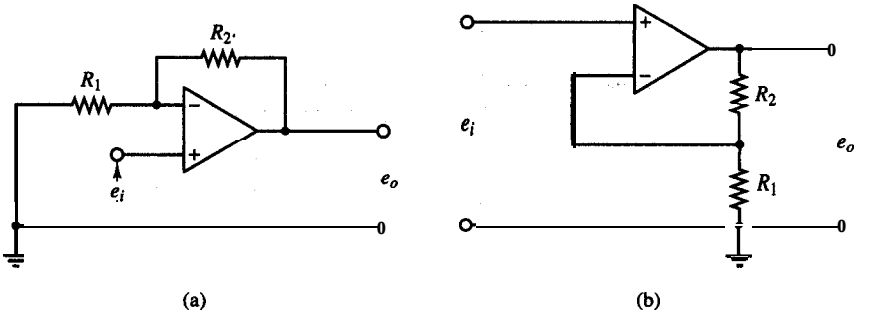


Figura 5–45
(a) Amplificador operacional no inversor; (b) circuito equivalente.

EJEMPLO 5-3 La figura 5–46 muestra un circuito eléctrico que contiene un amplificador operacional. Obtenga la salida e_o.

Definamos

$$i_1 = \frac{e_i - e'}{R_1}, \qquad i_2 = C\frac{d(e' - e_o)}{dt}, \qquad i_3 = \frac{e' - e_o}{R_2}$$

Considerando que el flujo de la corriente hacia el amplificador es insignificante, tenemos que

$$i_1 = i_2 + i_3$$

Por tanto,

$$\frac{e_i - e'}{R_1} = C\frac{d(e' - e_o)}{dt} + \frac{e' - e_o}{R_2}$$

Dado que $e' \doteqdot 0$, tenemos que

$$\frac{e_i}{R_1} = -C\frac{de_o}{dt} - \frac{e_o}{R_2}$$

Calculando la transformada de Laplace de esta última ecuación, y suponiendo una condición inicial cero, tenemos que

$$\frac{E_i(s)}{R_1} = -\frac{R_2Cs + 1}{R_2}E_o(s)$$

lo cual puede escribirse

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{R_2Cs + 1}$$

El circuito con amp op de la figura 5–46 es un circuito de retraso de primer orden. (La tabla 5-1 muestra varios otros circuitos que contienen amp ops junto con sus funciones de transferencia.)

Enfoque de impedancias para obtener funciones de transferencia. Considere el circuito con amp op de la figura 547. En forma similar al caso de los circuitos eléctricos que analizamos antes, el enfoque de impedancias se aplica a los circuitos con amp op para obtener sus funciones de transferencia. Para el circuito de la figura 547, tenemos que

$$E_i(s) = Z_1(s)I(s), \qquad E_o(s) = -Z_2(s)I(s)$$

Por tanto, la función de transferencia para el circuito se obtiene como

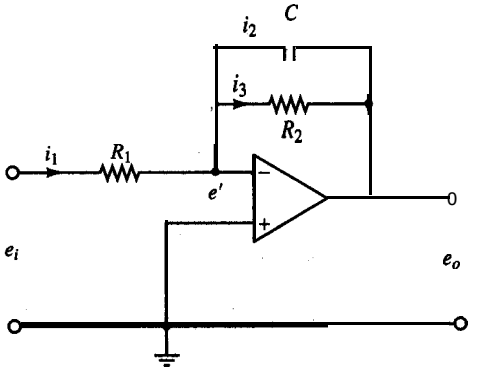


Figura 5-46
Circuito de retraso de primer orden usando un amplificador operacional.

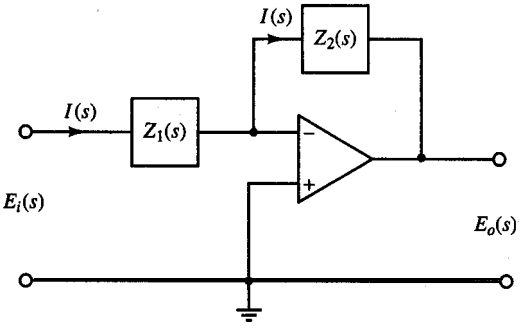


Figura 5-47
Circuito con amplificador operacional.

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

EJEMPLO 5-4 , Remítase al circuito con amp op de la figura 5-46 para obtener la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ mediante el enfoque de impedancias.

Las impedancias complejas $Z_1(s)$ y $Z_2(s)$ para el circuito son

$$Z_1(s) = R_1 \quad \text{y} \quad Z_2(s) = \frac{1}{Cs + \dfrac{1}{R_2}} = \frac{R_2}{R_2 Cs + 1}$$

Por tanto, $E_i(s)$ y $E_o(s)$ se obtienen como

$$E_i(s) = R_1 I(s), \qquad E_o(s) = -\frac{R_2}{R_2 Cs + 1} I(s)$$

Así, la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ se obtiene como

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{R_2 Cs + 1}$$

que es, por supuesto, igual a la qbtenida en el ejemplo 5–3.

Redes de adelanto o atraso usando amplificadores operacionales. La figura 5–48(a) muestra un circuito electrónico que usa un amplificador operacional. La función

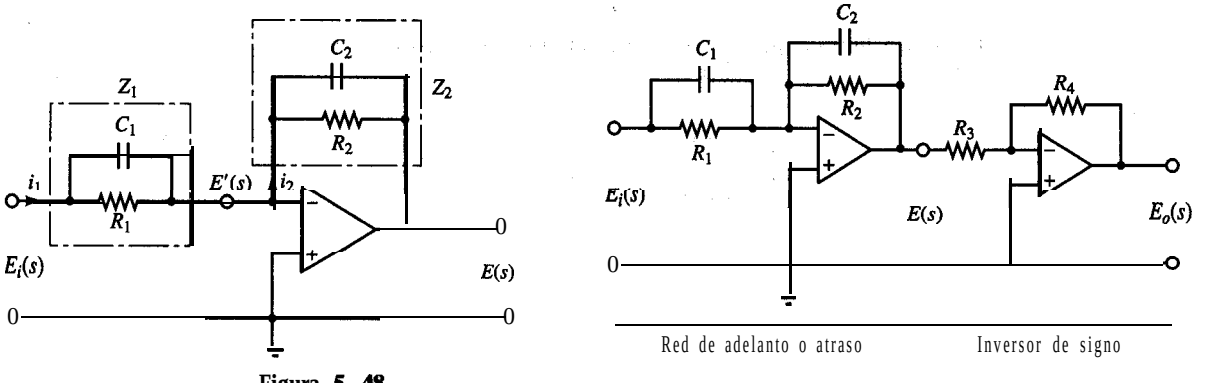


Figura 5–48
(a) Circuito con amplificador operacional; (b) circuito con amplificador operacional usado como compensador de adelanto o atraso.

de transferencia para este circuito se obtiene del modo siguiente: defina la impedancia de entrada y la impedancia de realimentación como Z_1 y Z_2, respectivamente. A continuación

$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1C_1s + 1}, \qquad Z_2 = \frac{R_2}{R_2C_2s + 1}$$

Dado que la corriente que fluye hacia el amplificador es insignificante, la corriente i_1 es igual a la corriente i_2. Por tanto, $i_1 = i_2$, o bien

$$\frac{E_i(s) - E'(s)}{Z_1} = \frac{E'(s) - E(s)}{Z_2}$$

Debido a que $E'(s) \doteqdot 0$, tenemos que

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{R_1C_1s + 1}{R_2C_2s + 1} = -\frac{C_1}{C_2}\frac{s + \frac{1}{R_1C_1}}{s + \frac{1}{R_2C_2}} \tag{5-28}$$

Observe que la función de transferencia de la ecuación (5-28) contiene un signo menos. En este caso, el circuito es de inversión de signo. Si tal inversión de signo no es conveniente en la aplicación actual, un inversor de signo se conecta a la entrada o a la salida del circuito de la figura 5–48(a). En la figura 5–48(b) se muestra un ejemplo. El inversor de signo tiene la función de transferencia de

$$\frac{E_o(s)}{E(s)} = -\frac{R_4}{R_3}$$

El inversor de signo tiene la ganancia de $-R_4/R_3$. Por lo tanto, la red de la figura 5–48(b) tiene la siguiente función de transferencia:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_2R_4}{R_1R_3}\frac{R_1C_1s + 1}{R_2C_2s + 1} = \frac{R_4C_1}{R_3C_2}\frac{s + \frac{1}{R_1C_1}}{s + \frac{1}{R_2C_2}}$$

$$= K_c\alpha\frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c\frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \tag{5-29}$$

en donde

$$T = R_1C_1, \qquad \alpha T = R_2C_2, \qquad K_c = \frac{R_4C_1}{R_3C_2}$$

Considere que

$$K_c\alpha = \frac{R_4C_1}{R_3C_2}\frac{R_2C_2}{R_1C_1} = \frac{R_2R_4}{R_1R_3}, \qquad \alpha = \frac{R_2C_2}{R_1C_1}$$

Esta red tiene una ganancia en de *cd* de $K_c\alpha = R_2R_4/(R_1R_3)$.

Remitiéndonos ala ecuación (5–29), ésta es una red de adelanto si $R_1C_1 > R_2C_2$, o $\alpha < 1$. Si $R_1C_1 < R_2C_2$ se trata de una red de atraso. (Para las definiciones de las redes de adelanto y atraso, consulte la sección 5-9.)

Controlador PID usando amplificadores operacionales. La figura 5–49 muestra un controlador electrónico proporcional-integral-derivativo (controlador PID) que usa amplificadores operacionales. La función de transferencia $E(s)/Ei(s)$ se obtiene mediante

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

en donde

$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1C_1s + 1}, \qquad Z_2 = \frac{R_2C_2s + 1}{C_2s}$$

Por tanto

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\left(\frac{R_2C_2s + 1}{C_2s}\right)\left(\frac{R_1C_1s + 1}{R_1}\right)$$

Considerando que

$$\frac{E_o(s)}{E(s)} = -\frac{R_4}{R_3}$$

tenemos que

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \left(\frac{E_o(s)}{E(s)}\right)\left(\frac{E(s)}{E_i(s)}\right) = \frac{1)(R_2C_2s +}{R_3R_1} \qquad 1)$$

$$= \frac{R_4R_2}{R_3R_1}\left(\frac{R_1C_1 + R_2C_2}{R_2C_2} + \frac{1}{R_2C_2s} + R_1C_1s\right)$$

$$= \frac{R_4(R_1C_1 + R_2C_2)}{R_3R_1C_2}\left[1 + \frac{1}{(R_1C_1 + R_2C_2)s} + \frac{R_1C_1R_2C_2}{R_1C_1 + R_2C_2}s\right] \qquad (5\text{–}30)$$

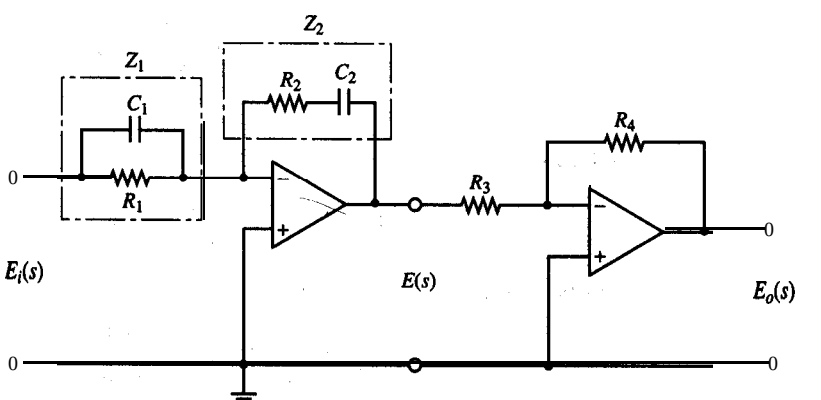


Figura 5-49
Controlador electrónico PID.

Por tanto

$$K_p = \frac{R_4(R_1C_1 + R_2C_2)}{R_3R_1C_2}$$

$$T_i = R_1C_1 + R_2C_2$$

$$T_d = \frac{R_1C_1R_2C_2}{R_1C_1 + R_2C_2}$$

En términos de la ganancia proporcional, ganancia integral y ganancia derivativa, tenemos

$$K_p = \frac{R_4(R_1C_1 + R_2C_2)}{R_3R_1C_2}$$

$$K_i = \frac{R_4}{R_3R_1C_2}$$

$$K_d = \frac{R_4R_2C_1}{R_3}$$

Observe que el segundo circuito con amplificador operacional funciona como un inversor de signo, al igual que como un ajustador de ganancia.

La tabla 5-1 muestra una lista de circuitos con amplificadores operacionales que se usan como controladores o compensadores.

5-9 ADELANTO DE FASE Y ATRASO DE FASE EN UNA RESPUESTA SENOIDAL

Para una entrada senoidal, la salida en estado estable de un sistema lineal e invariante con el tiempo es senoidal con un desfasamiento que es función de la frecuencia de la entrada. Este ángulo de fase varía conforme la frecuencia aumenta de cero a infinito. Si la salida senoidal en estado estable de una red adelanta (atrasa) la senoidal de entrada, se denomina una de adelanto (atraso). Primero obtendremos la salida en estado estable de una red lineal e invariante con el tiempo para una entrada senoidal.

Obtención de salidas en estado estable para entradas senoidales. Mostraremos que la salida en estado estable de un sistema de función de transferencia se obtiene directamente a partir de la función de transferencia senoidal, es decir, la función de transferencia en la cual s se sustituye por $j\omega$, en donde ω es una frecuencia.

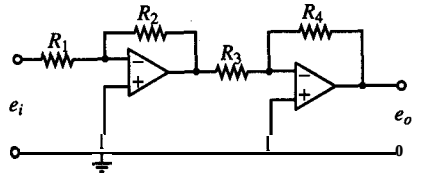
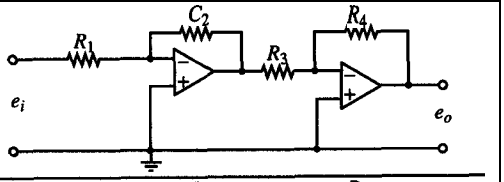
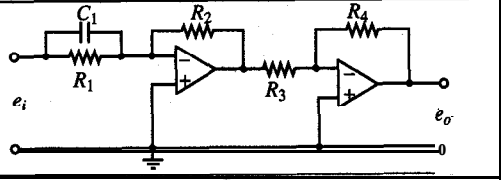
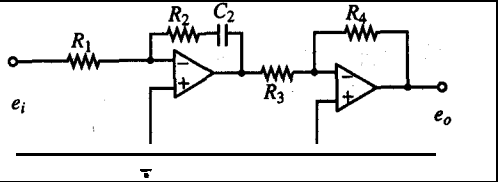
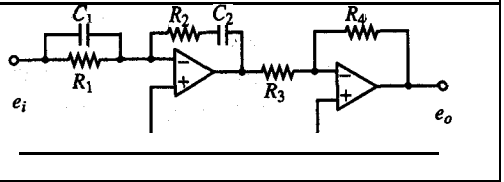
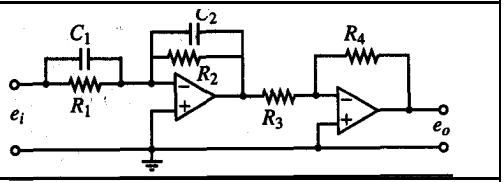
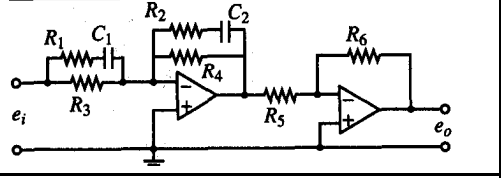
Considere el sistema estable, lineal e invariante con el tiempo de la figura 5–50. La entrada y la salida del sistema, cuya función de transferencia es G(s), se representan mediante x(t) y y(t), respectivamente. Si la entrada $x(t)$ es una señal senoidal, la salida en estado estable también será una señal senoidal de la misma frecuencia, pero tal vez con diferentes magnitud y ángulo de fase.

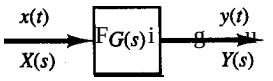
Supongamos que la señal de entrada se obtiene mediante

$$x(t) = X \text{ sen } \omega t$$

Suponga que la función de transferencia G(s) se escribe como un cociente de dos polinomios en s; es decir,

Tabla 5–1 Circuitos con amplificadores operacionales que se pueden usar como compensadores

	Acción de control	$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)}$	Circuitos con amplificadores operacionales
1	P	$\frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1}$	
2	I	$\frac{R_4}{R_3}\frac{1}{R_1C_2s}$	
3	PD	$\frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1}(R_1C_1s+1)$	
4	PI	$\frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1}\frac{R_2C_2s+1}{R_2C_2s}$	
5	PID	$\frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1}\frac{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}{R_2C_2s}$	
6	Adelanto o atraso	$\frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1}\frac{R_1C_1s+1}{R_2C_2s+1}$	
7	Atraso–adelanto	$\frac{R_6}{R_5}\frac{R_4}{R_3}\frac{[(R_1+R_3)C_1s+1](R_2C_2s+1)}{(R_1C_1s+1)[(R_2+R_4)C_2s+1]}$	



r a **5–50**
Sistema estable, lineal e invariante con el tiempo.

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{(s + s_1)(s + s_2)\cdots(s + s_n)}$$

En este caso, la salida transformada mediante el método de **Laplace** es

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{p(s)}{q(s)}X(s) \qquad (5\text{–}31)$$

en donde $X(s)$ es la transformada de **Laplace** de la entrada x(t).

Se mostrará que, después de esperar hasta que se alcancen las condiciones en estado estable, la respuesta en frecuencia se calcula sustituyendo s por $j\omega$ en la función de transferencia. También se comprobará que la respuesta en estado estable se obtiene mediante

$$G(jw) = Me^{j\phi} = M\angle\phi$$

en donde M es el cociente de las amplitudes de las senoidales de salida y de entrada y ϕ es el desfasamiento entre la senoide de entrada y la senoide de salida. En la prueba de respuesta en frecuencia, la frecuencia de entrada ω se hace variar hasta cubrir por completo el rango de frecuencia de interés.

La respuesta en estado estable de un sistema estable, lineal e invariante con el tiempo ante una entrada senoidal no depende de las condiciones iniciales. (Por tanto, suponemos una condición inicial cero.) Si Y(s) **sólo** tiene polos distintos, la expansión en fracciones parciales de la ecuación (5-31) produce

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s)\frac{\omega X}{s^2 + \omega^2}$$

$$= \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{b_1}{s + s_1} + \frac{b_2}{s + s_2} + \cdots + \frac{b_n}{s + s_n} \qquad (5\text{-}32)$$

en donde a **y** b_i **(para** $i = 1, 2, \ldots, n$**)** son constantes y $\bar{a}$ es el complejo conjugado de a. La transformada inversa de **Laplace** de la ecuación (5-32) produce

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1e^{-s_1t} + b_2e^{-s_2t} + \cdots + b_ne^{-s_nt} \qquad (t \geq 0) \qquad (5\text{-}33)$$

Para un sistema estable, $-s_1, -s_2, \ldots, -s_n$, tienen partes reales negativas. De este modo, conforme t tiende a infinito, los términos $e^{-s_1t}, e^{-s_2t}, \ldots$, y e^{-s_nt} tienden a cero. Por lo tanto, todos los términos en el segundo miembro de la ecuación **(5–33),** excepto los dos primeros, se descartan en estado estable.

Si Y(s) involucra polos múltiples s_j de multiplicidad m_j, entonces y(t) incluirá **términos tales** como $t^{h_j}e^{-s_jt}$ $(h_j = 0, 1, 2, \ldots, m_j - 1)$. Para un sistema estable, los términos $t^{h_j}e^{-s_jt}$ tienden a cero conforme t tiende a infinito.

Por tanto, sin considerar si el sistema tenga polos distintos, la respuesta en estado estable se convierte en

$$y_{ss}(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} \qquad (5\text{-}34)$$

en donde la constante a se evalúa a partir de la ecuación (5-32) del modo siguiente:

$$a = G(s)\frac{\omega X}{s^2 + \omega^2}(s + j\omega)\Big|_{s=-j\omega} = -\frac{XG(-j\omega)}{2j}$$

Observe que

$$\bar{a} = G(s)\frac{\omega X}{s^2+\omega^2}(s-j\omega)\Big|_{s=j\omega} = \frac{XG(j\omega)}{2j}$$

Dado que $G(j\omega)$ es una cantidad compleja, seescribe en la forma siguiente:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi}$$

en donde $|(Gj\omega)|$ representa la magnitud y ϕ representa el ángulo de $G(j\omega)$; es decir,

$$\phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left[\frac{\text{parte imaginaria de } G(j\omega)}{\text{parte real de } G(j\omega)}\right]$$

El ángulo ϕ puede ser negativo, positivo o cero. Asimismo, obtenemos la expresión siguiente para G(-jo):

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)|e^{-j\phi} = |G(j\omega)|e^{-j\phi}$$

Después, considerando que

$$a\ \frac{X|G(j\omega)|e^{-j\phi}}{2j}, \qquad \bar{a} = \frac{X|G(j\omega)|e^{j\phi}}{2j}$$

La ecuación (5-34) puede escribirse como

$$\begin{aligned} y_{ss}(t) &= X|G(j\omega)|\frac{e^{j(\omega t+\phi)} - e^{-j(\omega t+\phi)}}{2j} \\ &= X\,|G(j\omega)|\text{sen}\,(\omega t+\phi) \\ &= Y\,\text{sen}\,(\omega t+\phi) \end{aligned} \qquad \textbf{(5-35)}$$

en donde $Y = X|G(j\omega)|$. Observamos que un sistema estable, lineal e invariante con el tiempo sujeto a una entrada senoidal tendrá, en estado estable, una salida senoidal de la misma frecuencia que la entrada. Pero la amplitud y la fase de la salida serán, en general, diferentes de las de la entrada. De hecho, la amplitud de la salida se obtiene mediante el producto de la de la entrada por $|G(j\omega)|$, en tanto que el ángulo de fase difiere del de la entrada por la cantidad $\phi = \angle G(j\omega)$. Un ejemplo de las señales senoidales de entrada y salida aparece en la figura 5-51.

Con base en esto, obtenemos este importante resultado: Para las entradas senoidales,

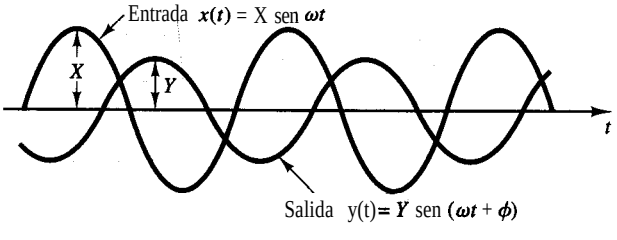


Figura 5–51
Señales senoidales de entrada y salida.

$$|G(j\omega)| = \left|\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\right| = \text{cociente de las amplitudes de la senoide de salida entre la senoide de entrada}$$

$$\underline{/G(j\omega)} = \underline{/\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}} = \text{desfasamiento de la senoide de salida con respecto) a la senoide de entrada}$$

Por tanto, las características de respuesta de un sistema para una entrada senoidal se obtienen directamente de

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = G(j\omega)$$

La función $G(j\omega)$ se denomina ***función de transferencia senoidul.*** Es el cociente entre $Y(j\omega)$ y $X(j\omega)$. Es una cantidad compleja y se representa mediante una magnitud y un ángulo de fase con la frecuencia como parámetro. (Un ángulo de fase negativo se denomina ***atraso de fase*** y un ángulo de fase positivo se denomina ***adelanto de fase.)*** La función de transferencia senoidal de cualquier sistema lineal se obtiene sustituyendo jo por s en la función de transferencia del sistema.

Una red que tenga características de adelanto de fase se denomina, comúnmente, red de adelanto. Asimismo, una red con características de atraso de fase se denomina una red de atraso.

EJEMPLO 5-5 Considere el sistema de la figura 5-52. La función de transferencia $G(s)$ es

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

Para la entrada senoidal x(t) = X sen ωt, la salida en estado estable $y_{ss}(t)$ se encuentra del modo siguiente

$$G(j\omega) = \frac{K}{jT\omega + 1}$$

El cociente entre la amplitud de la salida y la de la entrada es

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$$

en tanto que el ángulo de fase ϕ es

$$\phi = \underline{/G(\ j\omega)} = -\tan^{-1} T\omega$$

Por lo tanto, para la entrada $x(t)$ = X sen ωt, la salida en estado estable $y_{ss}(t)$ se obtiene a partir de la ecuación (5–35) del modo siguiente:

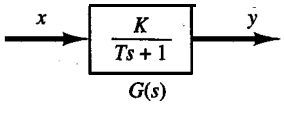


Figura 5–52
Sistema de primer orden.

$$y_{ss}(t) = \frac{XK}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \text{ sen } (\omega t - \text{tan-l } T\omega) \qquad (5\text{-}36)$$

A partir de la ecuación (5-36) se observa que, para una ω pequeña, la amplitud de la salida en estado estable $y_{ss}(t)$ es casi igual a K veces la amplitud de la entrada. El cambio de fase de la salida es pequeño para una ω pequeña. Para una ω grande, la amplitud de la salida es pequeña y casi inversamente proporcional a ω. El cambio de fase tiende a -90" conforme ω tiende a infinito. Ésta es una red de atraso de fase.

EJEMPLO 5-6 Considere la red obtenida mediante

$$G(s) = \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{T_2}}$$

Compruebe si se trata de una red de adelanto o de atraso.

Para la entrada senoidal x(t) = X sen ωt, la salida en estado estable $y_{ss}(t)$ se encuentra del modo siguiente: dado que

$$G(j\omega) = \frac{j\omega + \frac{1}{T_1}}{j\omega + \frac{1}{T_2}} = \frac{T_2(1 + T_1 j\omega)}{T_1(1 + T_2 j\omega)}$$

tenemos que

$$|G(j\omega)| = \frac{T_2\sqrt{1 + T_1^2\omega^2}}{T_1\sqrt{1 + T_2^2\omega^2}}$$

Y

$$\phi = \angle G(j\omega) = \text{tan-' } T_1\omega - \tan^{-1} T_2\omega$$

Por tanto, la salida en estado estable es

$$y_{ss}(t) = \frac{XT_2\sqrt{1 + T_1^2\omega^2}}{T_1\sqrt{1 + T_2^2\omega^2}} \text{ sen } (ot + \tan^{-1} T_1\omega - \text{tan-r } T_2\omega)$$

A partir de esta expresión, encontramos que, si $T_1 > T_2$, entonces tan-r $T_1\omega$ - tan-r $T_2\omega > 0$. Por tanto, si $T_1 > T_2$, la red es de adelanto. Si $T_1 < T_2$, la red es de atraso.

5-10 ERRORES EN ESTADO ESTABLE EN LOS SISTEMAS DE CONTROL DE REALIMENTACIÓN UNITARIA

Los errores en un sistema de control se pueden atribuir a muchos factores Los cambios en la entrada de referencia provocan errores inevitables durante los periodos transitorios y también pueden producir errores en estado estable. Las imperfecciones en los componentes del sistema, tales como la fricción estática, juego o bamboleo *(backlash) y* la deriva térmica del amplificador, al igual que el envejecimiento o el deterioro, provocan errores en el estado uniforme. Sin embargo, en esta sección no analizaremos los errores producidos por las imperfecciones de los componentes del sistema. Más bien, investigaremos un tipo de error en estado estable provocado por la incapacidad del sistema de seguir determinados tipos de entradas

Cualquier sistema de control físico sufre, por naturaleza un error en estado estable en respuesta a ciertos tipos de entrada. Un sistema puede no tener un error en estado estable para una entrada escalón, pero el mismo sistema puede exhibir un error en estado estable diferente de cero ante una entrada rampa. (La única forma de eliminar este error es modificar la estructura del sistema.) El que un sistema determinado exhiba un error en estado estable para un tipo específico de entrada depende del tipo de función de transferencia en lazo abierto del sistema, lo cual analizaremos a continuación.

Clasificación de los sistemas de control. Los sistemas de control se clasifican de acuerdo con su capacidad de seguir entradas escalón, rampa, parábola, etc. Éste es un esquema de clasificación razonable, porque las entradas reales con frecuencia se consideran combinaciones de las entradas mencionadas. Las magnitudes de los errores en estado estable producidos por estas entradas individuales indican la bondad del sistema.

Considere el sistema de control con realimentación unitaria con la siguiente función de transferencia en lazo abierto G(s):

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1)}{s^N(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_p s + 1)}$$

Este sistema contiene el término s^N en el denominador, que representa un polo de multiplicidad N en el origen. El esquema de clasificación actual se basa en la cantidad de integraciones indicadas por la función de transferencia en lazo abierto. Un sistema se denomina de tipo 0, de tipo 1, de tipo 2,. . . si $N = 0$, $N = 1$, $N = 2$,. . . , respectivamente. Tome en cuenta que esta clasificación es diferente de la que se basa en el orden del sistema. Conforme el número del tipo es mayor, mejora la precisión; sin embargo, aumentar el número del tipo agrava el problema de la estabilidad. Siempre es necesario un equilibrio entre la precisión en estado estable y la estabilidad relativa. En la práctica, es muy raro tener sistemas de tipo 3 o superiores, pues, por lo general, resulta difícil diseñar sistemas estables que tengan dos o más integradores en la trayectoria directa.

Veremos después que, si G(s) se escribe para que cada término del numerador y el denominador, excepto el termino s^N, tiende a la unidad, conforme s tiende a cero, entonces la ganancia en lazo abierto K está directamente relacionada con el error en estado estable.

Errores en estado estable. Considere el sistema de la figura 5-53. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

La función de transferencia entre la señal de error e(t) y la señal de entrada r(t) es

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}$$

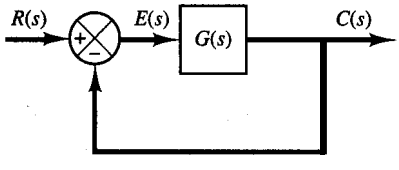


Figura **5–53**
Sistema de control.

en donde el error e(t) es la diferencia entre la señal de entrada y la señal de salida.

El teorema del valor final ofrece una forma conveniente de encontrar el desempeño en estado estable de un sistema estable. Dado que E(s) es

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s)$$

el error en estado estable es

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}$$

Las constantes de error estático definidas a continuación son figuras de **mérito** de los sistemas de control. Entre más altas son las constantes, más pequeño es el error en estado estable. En un sistema determinado, la salida puede ser la posición, la velocidad, la presión, la temperatura, etc. Sin embargo, la forma física de la salida no viene al caso en el análisis actual. Por tanto, en lo sucesivo llamaremos "posición" a la salida, "velocidad" a la razón de cambio de la salida, etc. Esto significa que, en un sistema de control de temperatura, "posición" representa la temperatura de salida, "velocidad" representa la razón de cambio de la temperatura de salida, etcétera.

Constante de error de posición estática K_p. El error en estado estable del sistema para una entrada escalón unitario es

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{1 + G(0)} ,$$

La constante de error de posición estática K_p se define mediante

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) = G(0)$$

Por ende, el error en estado estable en términos de la constante de error de posición estática K_p se obtiene mediante

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$$

Para un sistema de tipo 0,

$$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = K$$

Para un sistema de tipo 1 o mayor,

$$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = \infty, \qquad \text{para } N \geq 1$$

De este modo, para un sistema de tipo 0, la constante de error de posición estática K_p es finita, en tanto que, para un sistema de tipo 1 o mayor, K_p es infinita.

Para una entrada escalón unitario, el error en estado estable e_{ss} se resume del modo siguiente:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K}, \qquad \text{para sistemas de tipo 0}$$

$$e_{ss} = 0, \qquad \text{para sistemas de tipo 1 o mayor}$$

A partir del análisis anterior, se observa que la respuesta de un sistema de control de realimentación para una entrada escalón implica un error en estado estable si no existe un integrador en la trayectoria directa. (Si es posible tolerar errores pequeños para entradas escalón, es permisible un sistema de tipo 0, siempre y cuando la ganancia K sea suficientemente grande. Sin embargo, si la ganancia K es demasiado grande, es difícil obtener una estabilidad relativa razonable.) Si se pretende un error en estado estable de cero para una entrada escalón, el tipo del sistema debe ser uno o mayor.

Constante de error de velocidad estática K_v. El error en estado estable del sistema con una entrada rampa unitaria se obtiene mediante

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^2}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{1}{sG(s)}$$

La constante de error de velocidad estática K_v se define mediante

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)$$

Así, el error en estado estable en términos de la constante de error de velocidad estática K_v se obtiene mediante

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

Aquí se usa el término *error de velocidad* para expresar el error en estado estable para una entrada rampa. La dimensión del error de velocidad es igual que la del error del sistema. Es decir, el error de velocidad no es un error en la velocidad, sino un error en la posición debido a una entrada rampa.

Para un sistema de tipo 0,

$$K_v = \lim_{s \to 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = 0$$

Para un sistema de tipo 1,

$$K_v = \lim_{s \to 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = K$$

Para un sistema de tipo 2 o mayor,

$$K_v = \lim_{s \to 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = \infty, \qquad \text{para } N \geq 2$$

El error en estado estable e_{ss} para la entrada rampa unitaria se resume del modo siguiente:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \infty, \qquad \text{para sistemas de tipo 0}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K} = \frac{1}{K}, \qquad \text{para sistemas de tipo 1}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0, \qquad \text{para sistemas de tipo 2 o mayor}$$

El análisis anterior indica que un sistema de tipo 1 es incapaz de seguir una entrada rampa en el estado uniforme. El sistema de tipo 1 con realimentación unitaria sigue la entrada rampa con un error finito. Operando en estado estable, la velocidad de salida es igual a la velocidad de entrada, pero hay un error de posición. Este error es proporcional a la velocidad de la entrada y es inversamente proporcional a la ganancia K. La figura 5-54 muestra un ejemplo de la respuesta de un sistema de tipo 1 con realimentación unitaria para una entrada rampa. El sistema de tipo 2 o mayor sigue una entrada rampa con un error de cero en estado estable.

Constante de error de aceleración estática K_a. El error en estado estable del sistema con una entrada parábola unitaria (entrada de aceleración), que se define mediante

$$r(t) = \frac{t^2}{2}, \qquad \text{para } t \geq 0$$

$$= 0, \qquad \text{para } t < 0$$

se obtiene a partir de

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^3}$$

$$= \frac{1}{\lim_{s \to 0} s^2 G(s)}$$

La constante de error de aceleración estática K_a se define mediante la ecuación

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)$$

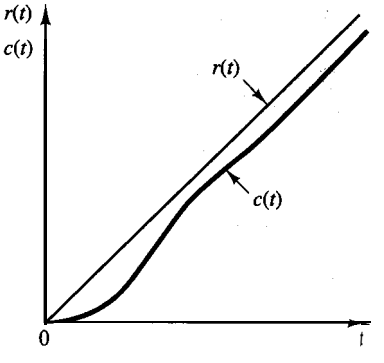


Figura 5-54
Respuesta de un sistema con realimentación unitaria de tipo 1 para una entrada rampa.

De esta manera, el error en estado estable es

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

Observe que el error de aceleración, el error en estado estable producido por una entrada parábola, es un error en la posición.

Los valores de K_a se obtienen del modo siguiente:

Para un sistema de tipo 0,

$$K_a = \lim_{s \to 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = 0$$

Para un sistema de tipo 1,

$$K_a = \lim_{s \to 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = 0$$

Para un sistema de tipo 2,

$$K_a = \lim_{s \to 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s^2(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = K$$

Para un sistema de tipo 3 o mayor,

$$K_a = \lim_{s \to 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s^N(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = \infty, \qquad \text{para } N \geq 3$$

Por tanto, el error en estado estable para la entrada parábola unitaria es

$e_{SS} = \infty$, para sistemas de tipo 0 y tipo 1

$e_{SS} = \frac{1}{K}$, para sistemas de tipo 2

$e_{SS} = 0$, para sistemas de tipo 3 o mayor

Observe que tanto los sistemas de tipo 1 como los de tipo 2 son incapaces de seguir una entrada parábola en estado estable. El sistema de tipo 2 con realimentación unitaria puede seguir una entrada parábola con una señal de error finita. La figura 5-55 muestra un ejemplo de la respuesta de un sistema de tipo 2 con realimentación unitaria a una entrada parábola. El sistema de tipo 3 o mayor con realimentación unitaria sigue una entrada parábola con un error de cero en estado uniforme.

Resumen. La tabla 5-2 resume los errores en estado estable para los sistemas de tipo 0, de tipo 1 y de tipo 2 cuando están sujetos a diversas entradas. Los valores finitos para los errores en estado estable aparecen en la línea diagonal. Sobre la diagonal, los errores en estado estable son infinitos; bajo la diagonal, son cero.

Recuerde que los términos ***error de posición, error de velocidad, y error de aceleración*** significan desviaciones en estado estable en la posición de salida. Un error de velocidad finito implica que, después de que han desaparecido los transitorios, la entrada y la salida se mueven a la misma velocidad, pero tienen una diferencia de posición finita.

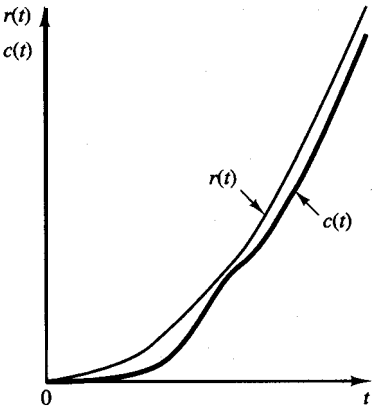


Figura 5–55
Respuesta de un sistema de tipo 2 con realimentación unitaria a una entrada parábola.

Las constantes de error K_p, K_v y K_a describen la capacidad de un sistema de realimentación unitaria de reducir o eliminar el error en estado estable. Por tanto, indican el desempeño en estado estable. En general, es conveniente aumentar las constantes de errores, al tiempo que se conserva la respuesta transitoria dentro de un rango aceptable. Si hay un conflicto entre la constante de error de velocidad estática y la constante de error de la aceleración, esta última se considera menos importante que la primera. Debe señalarse que, para mejorar el desempeño en estado estable aumentamos el tipo del sistema agregando uno o más integradores a la trayectoria directa. Sin embargo, esto introduce un problema de estabilidad adicional. Por lo general, es difícil realizar el diseño de un sistema satisfactorio con más de dos integradores en serie en la trayectoria directa.

Comparación de los errores en estado estable de un sistema de control en lazo abierto con los de un sistema de control en lazo cerrado. Considere el sistema de control en lazo abierto y el sistema de control en lazo cerrado de la figura 5-56. En el sistema en lazo abierto, la ganancia K_c se calibra para que $K_c = 1/K$. Por tanto, la función de transferencia del sistema de control en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{1}{K}\frac{K}{Ts + 1} = \frac{1}{Ts + 1}$$

En el sistema de control en lazo cerrado, la ganancia K_p del controlador se establece para que $K_pK \gg 1$.

Tabla 5-2 Error en estado estable en términos de la ganancia K

	Entrada escalón $r(t) = 1$	Entrada rampa $r(t) = t$	Entrada de aceleración $r(t) = \frac{1}{2}t^2$
Sistema de tipo 0	$\frac{1}{1 + K}$	∞	∞
Sistema de tipo 1	0	$\frac{1}{K}$	∞
Sistema de tipo 2	0	0	$\frac{1}{K}$

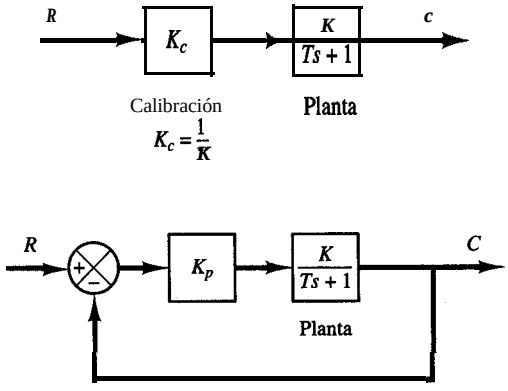


Figura 5-56
Diagramas de bloques de un sistema de control en lazo abierto y de un sistema de control en lazo cerrado.

Suponiendo una entrada escalón unitario, comparemos los errores en estado estable para los sistemas de control. Para el sistema de control en lazo abierto, la señal de error es

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

o bien

$$E(s) = R(s) - C(s)$$
$$= [1 - G_0(s)]R(s)$$

El error en estado estable en la respuesta escalón unitario es

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s)$$
$$= \lim_{s \to 0} s[1 - G(s)] \frac{1}{s}$$
$$= 1 - G(0)$$

Si $G_o(0)$, la ganancia de cd del sistema de control en lazo abierto es igual a la unidad, de modo que el error en estado estable es cero. Sin embargo, debido a los cambios ambientales y al envejecimiento de los componentes, la ganancia en cd $G_o(0)$ se alejará de la unidad conforme pase el tiempo y el error en estado estable ya no será igual a cero. Tal error en estado estable en un sistema de control en lazo abierto perdurará hasta que el sistema vuelva a calibrarse.

Para el sistema de control en lazo cerrado, la señal de error es

$$E(s) = R(s) - C(s)$$
$$= \frac{1}{1 + G(s)} R(s)$$

en donde

$$G(s) = \frac{K_p K}{Ts + 1}$$

El error en estado estable en la respuesta escalón unitario es

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s\left[\frac{1}{1 + G(s)}\right]\frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{1 + G(O)}$$

$$= \frac{1}{1 + K_p K}$$

En el sistema de control en lazo cerrado, la ganancia K_p se establece en un valor muy grande en comparación con $1/K$. Por tanto, el error en estado estable disminuye, aunque no exactamente hasta cero.

Supongamos la variación siguiente en la función de transferencia de la planta, considerando K_c y K_p constantes:

$$\frac{K + \Delta K}{Ts + 1}$$

Para simplificar, supongamos que $K = 10$, AK = 1 o $\Delta K/K = 0.1$. A continuación, el error en estado estable en la respuesta escalón unitario para el sistema de control en lazo abierto se convierte en

$$e_{ss} = 1 - \frac{1}{K}(K + \Delta K)$$

$$= 1 - 1.1 = -0.1$$

Para el sistema de control en lazo cerrado, si K_p se establece en $100/K$, el error en estado estable en la respuesta escalón unitario se convierte en

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + G(O)}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{100}{K}(K + \Delta K)}$$

$$= \frac{1}{1 + 110} = 0.009$$

Por tanto, el sistema de control en lazo cerrado es superior al sistema de control en lazo abierto en presencia de cambios ambientales, envejecimiento de los componentes, etc., lo cual definitivamente afecta el desempeño en estado estable.

EJEMPLO DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

A-5-1. Explique por que el control proporcional de una planta que no posee una propiedad de integración (lo que significa que la función de transferencia de la planta no incluye el factor $1/s$) sufre un *offset* en la respuesta a las entradas escalón.

Solución. Por ejemplo, considere el sistema de la figura 5-57. En estado uniforme, si c fuera igual a una constante r diferente de cero, e = 0 y $u = Ke = 0$. Esto haría que c = 0, lo cual contradice la suposición de que c = r = constante diferente de cero.

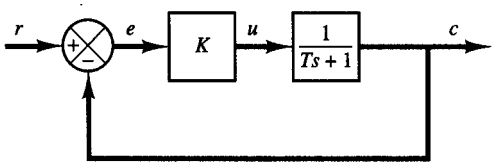


Figura 5–57
Sistema de control.

Debe existir un offset diferente de cero para la operación adecuada de un sistema de control. En otras palabras, en estado estable, si e fuera igual a $r/(1 + K)$, entonces $u = Kr/(1 + k)$ y c $= Kr/(1 + k)$, lo cual provocaría la señal de error supuesta e $= r/(1 + K)$. Por tanto, el offset de $r/(1 + K)$ debe existir en tal sistema.

A-5-2. Considere el sistema de la figura 5-58. Demuestre que el error en estado estable después de la entrada rampa unitaria es BIK. Este error se hace más pequeño si se selecciona una B pequeña y/o una K grande. Sin embargo, reducir B y/o aumentar K, tendría el efecto de reducir el factor de amortiguamiento relativo, cosa que, por lo general, no es conveniente. Describa un método para reducir BIK e incluso así hacer que el factor de amortiguamiento relativo tenga un valor razonable ($0.5 < \zeta < 0.7$).

Solución. A partir de la figura 5-58 obtenemos

$$E(s) = R(s) - C(s) = \frac{Js^2 + Bs}{Js^2 + Bs + K} R(s)$$

El error en estado estable para la respuesta rampa unitaria se obtiene del modo siguiente: para la entrada rampa unitaria, el error en estado estable e_{ss} es

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \to 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \to 0} s \frac{Js^2 + Bs}{Js^2 + Bs + K} \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{B}{K} \\ &= \frac{2\zeta}{\omega_n} \end{aligned}$$

en donde

$$\zeta = \frac{B}{2\sqrt{KJ}}, \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}$$

Para asegurar una respuesta transitoria y un error en estado estable aceptables después de una entrada rampa, ζ no debe ser demasiado pequeña y ω_n debe ser suficientemente grande. Es posible reducir el error en estado estable e_{ss} si se aumenta el valor de la ganancia K. (Un valor grande de K tiene la ventaja adicional de suprimir los efectos indeseables provocados por una

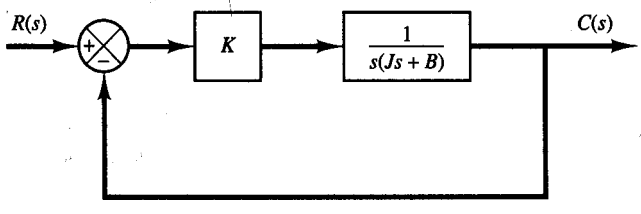


Figura 5–58
Sistema de control.

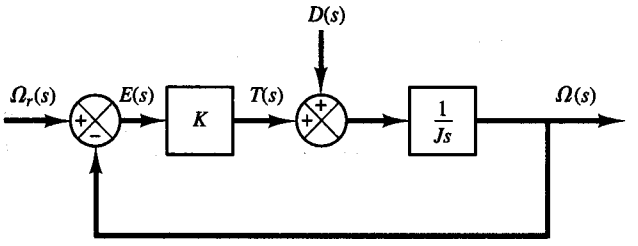


Figura 5-59
Diagrama de bloques de un sistema de control de velocidad.

zona muerta, un bamboleo o juego, una fricción de coulomb, etc.). Sin embargo, un valor grande de K reduciría el valor de ζ y aumentaría el sobrepaso máximo, lo cual no es conveniente.

Por lo anterior es necesario establecer un equilibrio entre la magnitud del error en estado estable ante una entrada rampa y el sobrepaso máximo para una entrada escalón unitario. En el sistema de la figura 5-58, es fácil alcanzar un compromiso razonable. Por tanto, es conveniente considerar otros tipos de acciones de control que mejoren tanto la respuesta transitoria como el desempeño en estado permanente. Existen dos esquemas para mejorar la respuesta transitoria y el desempeíío en estado estable. Uno es usar un controlador proporcional-derivativo, y el otro es usar una realimentación de tacómetro.

A-5-3. El diagrama de bloques de la figura 5-59 muestra un sistema de control de velocidad en el cual el miembro de salida del sistema está sujeto a una perturbación de par. En el diagrama, B,(s), $\Omega(s)$, $T(s)$ y $D(s)$ son las transformadas de Laplace de la velocidad de referencia, la velocidad de salida, el par de excitación y el par de perturbación, respectivamente. En ausencia de un par de perturbación, la velocidad de salida es igual a la velocidad de referencia.

Investigue la respuesta de este sistema para un par de perturbación escalón unitario. Suponga que la entrada de referencia es cero, es decir, $\Omega_r(s) = 0$.

Solución. La figura 5–60 es un diagrama de bloques modificado, conveniente para el análisis presente. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{\Omega_D(s)}{D(s)} = \frac{1}{Js + K}$$

en donde $\Omega_D(s)$ es la transformada de Laplace de la velocidad de salida producida por el par de perturbación. Para un par de perturbación escalón unitario, la velocidad de salida en estado estable es

$$\begin{aligned}\omega_D(\infty) &= \lim_{s\to 0} s\Omega_D(s) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{s}{Js + K}\frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{K}\end{aligned}$$

A partir de este análisis concluimos que, si se aplica un par de perturbación escalón al miembro de salida del sistema, se producirá una velocidad de error tal que el par del motor resultante

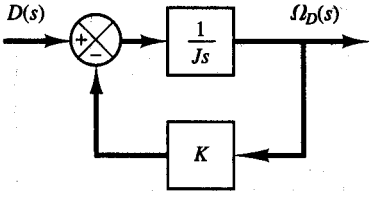


Figura 5–60
Diagrama de bloques del sistema de control de velocidad de la figura 5-59 cuando $\Omega_r(s) = 0$.

cancelara exactamente el par de perturbación. Para desarrollar el par del motor, es necesario que exista un error en la velocidad para que se produzca un par diferente de cero.

A-5-4. En el sistema considerado en el problema A-5-3, se pretende eliminar lo más posible los errores de velocidad producidos por los pares de perturbación.

¿Es posible cancelar el efecto de un par de perturbación en estado estable para que un par de perturbación constante aplicado al miembro de salida no produzca un cambio de velocidad en estado estable?

Solución. Suponga que elegimos un controlador conveniente cuya función de transferencia sea G,(s), como se observa en la figura 5-61. En ausencia de la entrada de referencia, la función de transferencia en laxo cerrado entre la velocidad de salida $\Omega_D(s)$ y el par de perturbación $D(s)$ es

$$\frac{\Omega_D(s)}{D(s)} = \frac{\frac{1}{Js}}{1 + \frac{1}{Js} G_c(s)}$$

$$= \frac{1}{Js + G,(s)}$$

La velocidad de salida en estado estable producida por el par de perturbación escalón unitario es

$$\omega_D(\infty) = \lim_{s \to 0} s\Omega_D(s)$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{s}{Js + G,(s)} \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{G_c(0)}$$

Para satisfacer el requerimiento de que

$$\omega_D(\infty) = 0$$

debemos seleccionar G,(O) = ∞. Esto se comprende si elegimos

$$G,(s) = \frac{K}{s}$$

Una acción de control integral seguirá corrigiendo hasta que el error sea cero. Sin embargo, este controlador presenta un problema de estabilidad, debido a que la ecuación característica tendrá dos raíces imaginarias.

Un método para estabilizar un sistema como éste es agregar un modo proporcional al controlador, o elegir

$$G,(s) = K_p + \frac{K}{s}$$

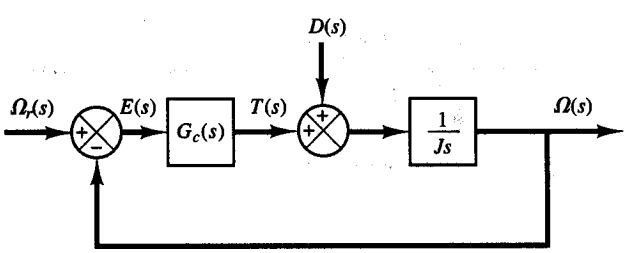


Figura 5-61
Diagrama de bloques de un sistema de control de velocidad.

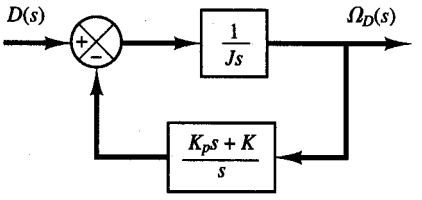


Figura 5–62
Diagrama de bloques del sistema de control de velocidad de la figura 5–61 cuando $G_c(s) = K_p + (K/s)$ y $\Omega_r(s) = 0$.

Con este controlador, el diagrama de bloques de la figura 5-61, ante la ausencia de la entrada de referencia, se convierte en el de la figura 5-62. La función de transferencia en lazo cerrado $\Omega_D(s)/D(s)$ se convierte en

$$\frac{\Omega_D(s)}{D(s)} = \frac{s}{Js^2 + K_p s + K}$$

Para un par de perturbación escalón unitario, la velocidad de salida en estado estable es

$$\omega_D(\infty) = \lim_{s\to 0} s\Omega_D(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s^2}{Js^2 + K_p s + K}\frac{1}{s} = 0$$

Por tanto, observamos que el controlador proporcional-integral elimina el error de velocidad en estado estable.

El uso de una acción de control integral ha aumentado el orden del sistema en 1. (Esto tiende a producir una respuesta oscilatoria.)

En el problema actual, un par de perturbación escalón provocará un error transitorio en la velocidad de salida, pero el error se convertirá en cero en estado estable. El integrador proporciona una salida diferente de cero con un error de cero. (La salida diferente de cero del integrador produce un par del motor que cancela exactamente el par de perturbación.)

Observe que el integrador de la función de transferencia de la planta no elimina el error en estado estable debido a un par de perturbación escalón. Para eliminar dicho error, debemos tener un integrador antes del punto en el que se introduce el par de perturbación.

A-5-5. Considere el sistema de la figura 5–63(a). El error en estado estable para una entrada rampa unitaria es $e_{ss} = 2\zeta/\omega_n$. Demuestre que el error en estado estable se elimina para seguir una entrada rampa si la entrada se incorpora al sistema a través de un filtro proporcional-derivativo, como se observa en la figura 5–63(b), y el valor de k se establece en forma proporcional. Observe que el error e(t) se obtiene mediante r(t) – c(t).

Solución. La función de transferencia en lazo cerrado del sistema de la figura 5–63(b) es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(1 + ks)\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Por tanto,

$$\mathrm{R(s)} - \mathrm{C(s)} = \left(\frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s - \omega_n^2 ks}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right) R(s)$$

Si la entrada es una rampa unitaria, el error en estado estable es

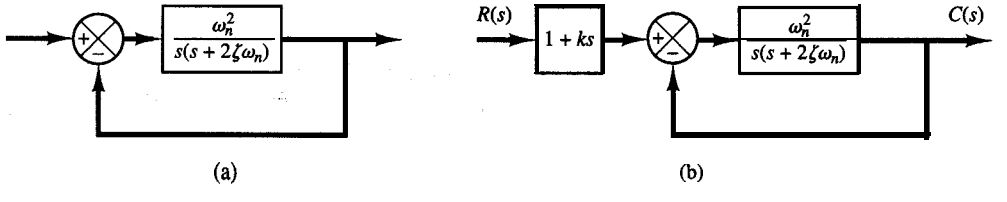


Figura 5-63
(a) Sistema de control; (b) sistema de control con filtro de entrada.

$$e(\infty) = r(\infty) - c(\infty)$$
$$= \lim_{s\to 0} s\left(\frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s - \omega_n^2 ks}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right)\frac{1}{s^2}$$
$$= \frac{2\zeta\omega_n - \omega_n^2 k}{\omega_n^2}$$

Por tanto, si se selecciona k como

$$k = \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

el error en estado estable después de una entrada rampa se hace igual a cero. Observe que, si existen variaciones en los valores de ζ y/o ω_n, debido a los cambios ambientales o al envejecimiento, puede producirse un error en estado estable diferente de cero para una respuesta rampa.

A-5-6. Considere el sistema de control del nivel de líquido de la figura 5-64. Suponga que el punto de definición del controlador está fijo. Suponiendo una perturbación escalón de magnitud D_0, determine el error. Considere que D_0 es pequeña lo mismo que las variables a partir de sus valores en estado estable respectivos. El controlador es proporcional.

Si el controlador no es proporcional sino integral, ¿cuál es el error en estado estable?

Solución. La figura 5-65 es un diagrama de bloques del sistema cuando el controlador es proporcional con una ganancia de K_p. (Suponemos que la función de la válvula neumática es unitaria.) Dado que el punto de ajuste está fijo, la variación en el punto de ajuste es cero o X(s) = 0. La transformada de Laplace de h(t) es

$$H(s) = \frac{K_p R}{RCs + 1}E(s) + \frac{R}{RCs + 1}D(s)$$

Entonces

$$E(s) = -H(s) = -\frac{K_p R}{RCs + 1}E(s) - \frac{R}{RCs + 1}D(s)$$

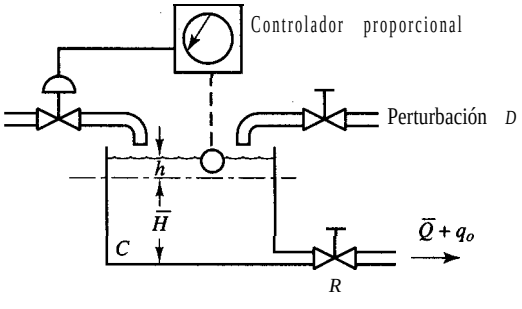


Figura 5-64
Sistema de control del nivel de líquido.

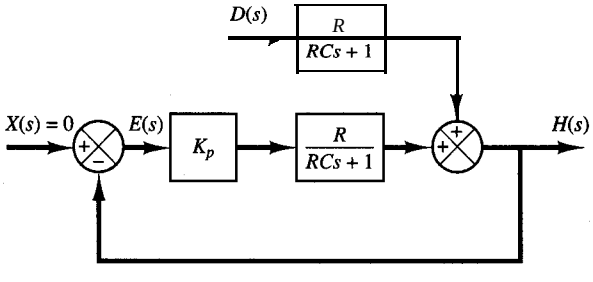


Figura 5-65
Diagrama de bloques del sistema de control del nivel de líquido de la figura 5-64.

Por tanto

$$E(s) = -\frac{R}{RCs + 1 + K_pR} D(s)$$

Dado que

$$D(s) = \frac{D_0}{s}$$

obtenemos

$$E(s) = -\frac{R}{RCs + 1 + K_pR} \frac{D_0}{s}$$
$$= \frac{RD_0}{1 + K_pR} \left(\frac{1}{s + \frac{1 + K_pR}{RC}} \right) - \frac{RD_0}{1 + K_pR} \frac{1}{s}$$

La solución en el tiempo para $t > 0$ es

$$e(t) = \frac{RD_0}{1 + K_pR} \left[\exp\left(-\frac{1 + K_pR}{RC} t \right) - 1 \right]$$

Por tanto, la constante de tiempo es $RC/(1 + K_pR)$. (Ante la ausencia del controlador, la constante de tiempo es igual a RC.) Conforme la ganancia del controlador crece, la constante de tiempo disminuye. El error en estado estable es

$$e(\infty) = -\frac{RD_0}{1 + K_pR}$$

Conforme la ganancia K_p del controlador crece, el error en estado estable, o el *offset*, se reduce. Por tanto, matemáticamente, entre más grande es la ganancia K_p, más pequeños son el *offset* y la constante de tiempo. Sin embargo, en los sistemas prácticos, si la ganancia K_p del controlador proporcional llega a un valor muy grande, puede producirse una oscilación en la salida, dado que en nuestro análisis no se consideran todos los retrasos pequeños y todas las constantes de tiempo pequeíías que existen en el sistema de control real. (Si en el análisis se incluyen estos retrasos y constantes de tiempo pequeños, la función de transferencia se vuelve de un orden mayor y, para valores muy grandes de K_p, existe la posibilidad de oscilación o incluso la inestabilidad.)

Si el controlador es integral, suponiendo que la función de transferencia del controlador es

$$G_c = \frac{K}{s}$$

obtenemos

$$E(s) = -\frac{Rs}{RCs^2 + s + KR} D(s)$$

El error en estado estable para una perturbación escalón $D(s) = D_0/(s)$ es

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} sE(s)$$
$$= \lim_{s \to 0} \frac{-Rs^2}{RCs^2 + s + KR} \frac{D_0}{s}$$
$$= 0$$

Por tanto, un controlador integral elimina un error en estado estable o un offset debido a la perturbación escalón. (El valor de K debe elegirse para que la respuesta provocada por la entrada del comando y/o la perturbación se amortigüe con una velocidad razonable.)

A-5-7. Obtenga una solución analítica y una solución computacional de la respuesta escalón unitario de un sistema de realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{5(s + 20)}{s(s + 4.59)(s^2 + 3.41s + 16.35)}$$

Solución. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5(s + 20)}{s(s + 4.59)(s^2 + 3.41s + 16.35) + 5(s + 20)}$$

$$= \frac{5s + loo}{s^4 + 8s^3 + 32s^2 + 80s + 100}$$

$$= \frac{5(s + 20)}{(s^2 + 2s + 10)(s^2 + 6s + 10)}$$

Así, la respuesta escalón unitario de este sistema es

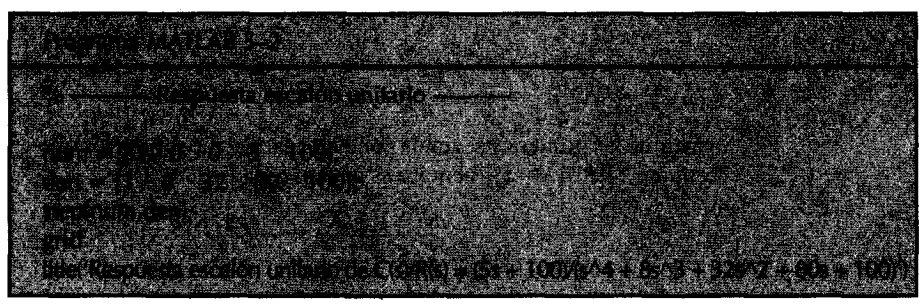
$$C(s) = \frac{5(s + 20)}{s(s^2 + 2s + 10)(s^2 + 6s + 10)}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{\frac{3}{8}(s + 4) + \frac{17}{8}}{(s + 1)^2 + 3^2} + \frac{-\frac{11}{8}(s + 3) - \frac{13}{8}}{(s + 3)^2 + 1^2}$$

La respuesta en el tiempo $c(t)$ se encuentra a partir de la transformada inversa de Laplace de C(s), del modo siguiente:

$$c(t) = 1 + \tfrac{3}{8}e^{-t}\cos 3t + \tfrac{17}{24}e^{-t}\operatorname{sen} 3t - \tfrac{11}{8}e^{-3t}\cos t - \tfrac{13}{8}e^{-3t}\operatorname{sen} t, \qquad \text{para } \geq 0$$

El programa MATLAB 5-2 sirve para obtener la respuesta escalón unitario de este sistema. La curva de respuesta escalón unitario resultante aparece en la figura 5–66.



A-5-8. Considere la siguiente ecuación característica:

$$s^4 + Ks^3 + s^2 + s + 1 = 0$$

Determine el rango de valores de K para la estabilidad.

Solución. El arreglo de coeficientes de Routh es

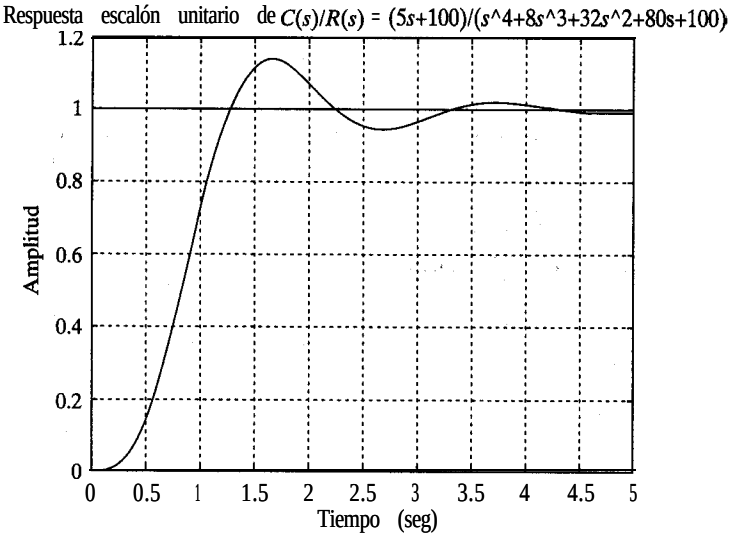


Figura 5-66
Curva de respuesta escalón unitario.

$$\begin{array}{lll} s^4 & 1 & 1 \quad 1 \\ s^3 & K & 1 \quad 0 \\ s^2 & \dfrac{K-1}{K} & 1 \quad 0 \\ s^1 & 1-\dfrac{K^2}{K-1} & 0 \\ s^0 & 1 & \end{array}$$

Para la estabilidad, es necesario que

$$K > 0$$

$$\frac{K-1}{K} > 0$$

$$1 - \frac{K^2}{K-1} > 0$$

A partir de las primera y segunda condiciones, K debe ser mayor que 1. Para $K > 1$, observe que el término $1-[K^2/(K-1)]$ siempre es negativo, dado que

$$\frac{K-1-K^2}{K-1} = \frac{-1+K(1-K)}{K-1} < 0$$

Por tanto, no es posible cumplir con las tres condiciones en forma simultánea. Por tal razón, no existe un valor de K que permita la estabilidad del sistema.

A-5-9. Considere la ecuación característica obtenida mediante

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \qquad (5\text{-}37)$$

El criterio de estabilidad de Hurwitz, que se presenta a continuación, ofrece las condiciones para todas las raíces que tienen partes reales negativas en términos de los coeficientes del polinomio. Como se plante6 en el análisis del criterio de estabilidad de Routh, de la sección 5-5, para todas las raíces que tengan partes reales negativas, todos los coeficientes de las a deben ser positivos.

Ésta es una condición necesaria, pero no suficiente. Si no se satisface esta condición, quiere decir que algunas de las raíces tienen partes reales positivas, son imaginarias o son cero. Una condición suficiente para que todas las raíces tengan partes reales negativas se obtiene mediante el siguiente criterio de estabilidad de Hurwitz: si todos los coeficientes del polinomio son positivos, arréglelos en el determinante siguiente:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_n & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & a_{n-2} & a_n & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & a_{n-3} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}$$

en donde los ceros se sustituyen por a_s para $s > n$. Para todas las raíces que tienen partes reales negativas, es necesario y suficiente que los menores principales de Δ_n sean positivos . Los menores principales sucesivos son los determinantes siguientes:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \cdots & a_{2i-1} \\ a_0 & a_2 & \cdots & a_{2i-2} \\ 0 & a_1 & \cdots & a_{2i-3} \\ \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_i \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

en donde $a_s = 0$ si $s > n$. (Observe que se incluyen algunas condiciones para los determinantes de orden inferior en las condiciones para los determinantes de orden superior.) Si todos estos determinantes son positivos, y si se ha supuesto $a_0 > 0$, el estado de equilibrio del sistema cuya ecuación caracterfstica se obtiene mediante la ecuación (5-37) es asintóticamente estable. Observe que no se necesitan valores exactos de los determinantes; sólo se requieren los signos de estos determinantes para el criterio de estabilidad.

Ahora considere la siguiente ecuación caracterfstica:

$$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0$$

Obtenga la condición para la estabilidad mediante el criterio de estabilidad de Hurwitz.

Solución. Las condiciones para la estabilidad son que todas las a sean positivas y que

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 \quad a_0 a_3 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(a_2 a_3 - a_1 a_4) - a_0 a_3^2$$

$$= a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0$$

Es evidente que todas las a son positivas y que, si se satisface la condición $\Delta_3 > 0$, también se cumple la condición $\Delta_2 > 0$. Por tanto, para todas las raíces de la ecuación característica determinada que tengan partes reales negativas, es necesario y suficiente que todos los coeficientes de a sean positivos y $\Delta_3 > 0$.

A-5-10. Demuestre que el criterio de estabilidad de Routh y el criterio de estabilidad de Hurwitz son equivalentes.

Solución. Si escribimos las determinantes de Hmwitz en la forma triangular

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & & \\ 0 & & & a_{ii} \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

en la que todos los elementos debajo de la **línea** diagonal son cero y todos los elementos sobre la línea diagonal son cualquier número, las condiciones de Hmwitz para la estabilidad asintótica se convierten en

$$\Delta_i = a_{11}a_{22} \cdots a_{ii} > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

que son equivalentes a las condiciones

$$a_{11} > 0, \qquad a_{22} > 0, \qquad \ldots, \qquad a_{nn} > 0$$

Ahora demostraremos que estas condiciones son equivalentes a

$$a_1 > 0, \qquad b_1 > 0, \qquad c_1 > 0, \qquad \ldots$$

en donde $a_1, b_1, c_1, \ldots$ son los elementos de la primera columna en el arreglo de Routh.

Por ejemplo, considere el siguiente determinante de Hmwitz, que corresponde a $n = 4$:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

El determinante no se altera si restamos del i-ésimo renglón el j-ésimo renglón multiplicado por k. Restando del segundo renglón a_0/a_1 veces el primer renglón, obtenemos

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

en donde

$$a_{11} = a_1$$

$$a_{22} = a_2 - \frac{a_0}{a_1} a_3$$

$$a_{23} = a_4 - \frac{a_0}{a_1} a_5$$

$$a_{24} = a_6 - \frac{a_0}{a_1} a_7$$

Asimismo, restar del cuarto renglón el tercer renglón multiplicado por a_0/a_1 produce

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 0 & \hat{a}_{43} & \hat{a}_{44} \end{vmatrix}$$

en donde

$$\hat{a}_{43} = a_2 - \frac{a_0}{a_1} a_3$$

$$\hat{a}_{44} = a_4 - \frac{a_0}{a_1} a_5$$

A continuación, restando del **tercer** renglón el segundo renglón multiplicado por a_1/a_{22} produce

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & \hat{a}_{43} & \hat{a}_{44} \end{vmatrix}$$

en donde

$$a_{33} = a_3 - \frac{a_1}{a_{22}} a_{23}$$

$$a_{34} = a_5 - \frac{a_1}{a_{22}} a_{24}$$

Por último, restar del última renglón el segundo renglón multiplicado por $\hat{a}_{43}/a_{33}$ produce

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

en donde

$$a_{44} = \hat{a}_{44} - \frac{a_{43}}{a_{33}} a_{34}$$

A partir de este análisis, observamos que

$$\Delta_4 = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

$$\Delta_3 = a_{11}a_{22}a_{33}$$

$$\Delta_2 = a_{11}a_{22}$$

$$\Delta_1 = a_{11}$$

Las condiciones de **Hurwitz** para la estabilidad asintótica

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \Delta_4 > 0, \quad \cdots$$

se reducen a las condiciones

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad a_{33} > 0, \quad a_{44} > 0, \quad \dots$$

El arreglo de Routh para el polinomio

$$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0$$

en donde $a_0 > 0$, se obtiene a partir de

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_2 & a_4 \\ a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 \\ d_1 \end{array}$$

A partir de este arreglo de Routh, observamos que

$$a_{11} = a_1$$

$$a_{22} = a_2 - \frac{a_0}{a_1} a_3 = b_1$$

$$a_{33} = a_3 - \frac{a_1}{a_{22}} a_{23} = \frac{a_3 b_1 - a_1 b_2}{b_1} = c_1$$

$$a_{44} = a_{44} - \frac{a_{43}}{a_{33}} a_{34} = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{c_1} = d_1$$

Por tanto, las condiciones de **Hurwitz** para la estabilidad asintótica se vuelven

$$a_1 > 0, \quad b_1 > 0, \quad c_1 > 0, \quad d_1 > 0, \quad \dots$$

De esta manera, demostramos que las condiciones de **Hurwitz** para la estabilidad asintótica se reducen a las condiciones de Routh para la estabilidad asintótica. El mismo argumento se extiende para los determinantes de **Hurwitz** de cualquier orden, y es posible establecer la equivalencia entre el criterio de estabilidad de Routh y el criterio de estabilidad de Hunvitz.

A-5-11. Demuestre que la primera columna del arreglo de Routh de

$$s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

se obtiene mediante

$$1, \quad \Delta_1, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \quad \dots \quad \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

en donde

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ a_{2r-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & a_r \end{vmatrix}$$

$$a_k = 0 \quad \text{si } k > n$$

Solución. El arreglo de coeficientes de Routh tiene la forma de

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & a_2 & a_4 & a_6 & . & . & . & a_n \\
a_1 & a_3 & a_5 & . & . & . & & \\
b_1 & b_2 & b_3 & . & . & . & & \\
c_1 & c_2 & & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & & &
\end{array}
$$

El primer término de la primera columna del arreglo de Routh es 1. El término siguiente de la primera columna es a_1, que es igual a Δ_1. El término siguiente es b_1, que es igual a

$$\frac{a_1a_2 - a_3}{a_1} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$$

El término que sigue en la primera columna es c_1, que es igual a

$$\frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1} = \frac{\left[\frac{a_1a_2 - a_3}{a_1}\right]a_3 - a_1\left[\frac{a_1a_4 - a_5}{a_1}\right]}{\left[\frac{a_1a_2 - a_3}{a_1}\right]}$$

$$= \frac{a_1a_2a_3 - a_3^2 - a_1^2a_4 + a_1a_5}{a_1a_2 - a_3}$$

$$= \frac{\Delta_3}{\Delta_2}$$

Los términos restantes de la primera columna del arreglo de Routh se encuentran en forma similar.

El arreglo de Routh tiene la propiedad de que los últimos términos diferentes de cero de cualquier columna son iguales; es decir, si el arreglo se obtiene mediante

$$
\begin{array}{cccc}
a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\
a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\
b_1 & b_2 & b_3 & \\
c_1 & c_2 & c_3 & \\
d_1 & d_2 & & \\
e_1 & e_2 & & \\
f_1 & & & \\
g_1 & & &
\end{array}
$$

entonces

$$a_7 = c_3 = e_2 = g_1$$

y si el arreglo se obtiene mediante

$$
\begin{array}{cccc}
a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\
a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\
b_1 & b_2 & b_3 & \\
c_1 & c_2 & 0 & \\
d_1 & d_2 & & \\
e_1 & 0 & & \\
f_1 & & &
\end{array}
$$

entonces

$$a_6 = b_3 = d_2 = f_1$$

En cualquier caso, el último termino de la primera columna es igual a a_n, o bien,

$$a_n = \frac{\Delta_{n-1} a_n}{\Delta_{n-1}} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

Por ejemplo, si n = 4, entonces

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = \Delta_3 a_4$$

Por tanto, se ha demostrado que la primera columna del arreglo de Routh se obtiene mediante

$$1, \quad \Delta_1, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

A-5-12. El valor de la constante del gas para cualquier gas se determina a partir de observaciones experimentales precisas de valores simultáneos de p, v y T.

Obtenga la constante del gas R_{aire}, para el aire. Observe que a 32°F y 14.7 psia, el volumen específico del aire es de 12.39 pies³/lb. A continuación obtenga la capacitancia de un recipiente a presión de 20 pies³ que contiene aire a 160°F. Suponga que el proceso de expansión es isotérmico.

Solución.

$$R_{aire} = \frac{pv}{T} = \frac{14.7, \text{ x } 144 \text{ x } 12.39}{460 + 32} = 53.3 \text{ pies-lb}_f\text{/lb °R}$$

Remitiéndonos a la ecuación (5–12), la capacitancia de un recipiente a presión de 20 pies³ es

$$C = \frac{V}{nR_{aire}T} = \frac{20}{1 \text{ X } 53.3 \text{ X } 620} = 6.05 \text{ x } 10^{-4} \frac{\text{lb}}{\text{lb}_f\text{/pies}^2}$$

Observe que, en términos de las unidades del SI, R_{aire} se obtiene mediante

$$R_{aire} = 287 \text{ N-m/kg K}$$

A-S-W. La figura 5-67 es un diagrama esquemático de una válvula de diafragma neumático. En estado estable, la presión de control de un controlador es $\bar{P}_c$, la presión en la válvula también es $\bar{P}_c$ y el desplazamiento del vástago de la válvula es $\bar{X}$. Suponga que, en t = 0, la presión de control cambia de $\bar{P}_c$ a $\bar{P}_c + p_c$. Por tanto, la presión de la válvula cambiara de $\bar{P}_c$ a $\bar{P}_c + p_v$. El cambio en la presión de la válvula p_v provocará que el desplazamiento del vástago de la válvula pase de $\bar{X}$ a $\bar{X} + x$. Encuentre la función de transferencia entre el cambio del desplazamiento del vástago de la válvula x y el cambio en la presión de control p_c.

Solución. Definamos como q el flujo del aire para la válvula de diafragma a través de la resistencia R. Por tanto

$$q = \frac{PC - p_v}{R}$$

Para la cámara de aire de la válvula de diafragma, tenemos que

$$Cdp, = q\, dt$$

En consecuencia,

$$C\frac{dp_v}{dt} = q = \frac{p_c - p_v}{R}$$

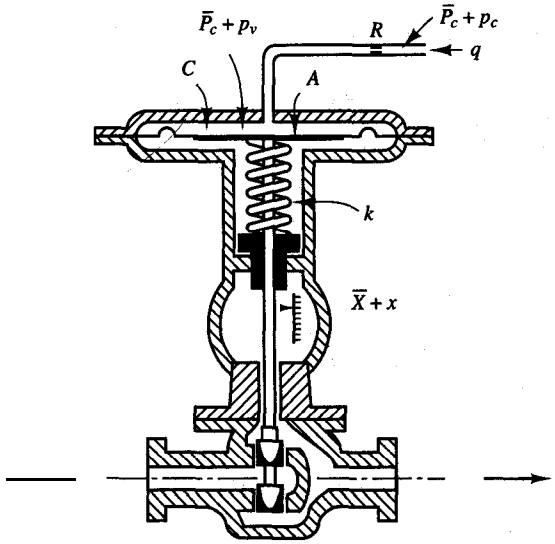


Figura 5-67
Válvula de diafragma neumática.

a partir de lo cual

$$RC\frac{dp_v}{dt} + p_v = p_c$$

Considerando que

$$Ap_v = kX$$

tenemos que

$$\frac{k}{A}\left(RC\frac{dx}{dt} + x\right) = p_c$$

La función de transferencia entre x y p_c es

$$\frac{X(s)}{P_c(s)} = \frac{AlK}{RCs + 1}$$

A-5-14. En el sistema de presión neumático de la figura 5–68(a) suponga que, para $t < 0$, el sistema está en estado estable y que la presión de todo el sistema es $\bar{P}$. También suponga que los dos fuelles son idénticos. En $t = 0$, la presión de entrada cambia de $\bar{P}$ a $\bar{P} + pi$. A continuación, las presiones en los fuelles 1 y 2 cambiarán de $\bar{P}$ a $\bar{P} + p_1$ y de $\bar{P}$ a $\bar{P} + p_2$, respectivamente. La capacidad (el volumen) de cada fuelle es de 5×10^{-4} m^3, y la diferencia de presión de operación Ap (la diferencia entre p_i y p_1 o la diferencia entre p_i y p_2) está entre -0.5×10^5 N/m^2 y 0.5×10^5 N/m^2. La figura 5–68(b) contiene los flujos másicos correspondientes (kg/seg) a través de las válvulas. Suponga que los fuelles se expanden o se contraen en forma lineal con las presiones de aire que se les aplican, que la constante del résorte equivalente del sistema de fuelles es $k = 1 \times 10^5$ N/m y que cada fuelle tiene un área $A = 15 \times 10^{-4}$ m^2.

Definiendo como x el desplazamiento del punto medio de la varilla que conecta dos fuelles, encuentre la función de transferencia $X(s)/P_i(s)$. Suponga que el proceso de expansión es isotérmico y que la temperatura del sistema completo permanece en 30°C.

Solución. Remitiéndonos ala sección 5-6, la función de transferencia $P_1(s)/Pi(s)$ se obtiene como

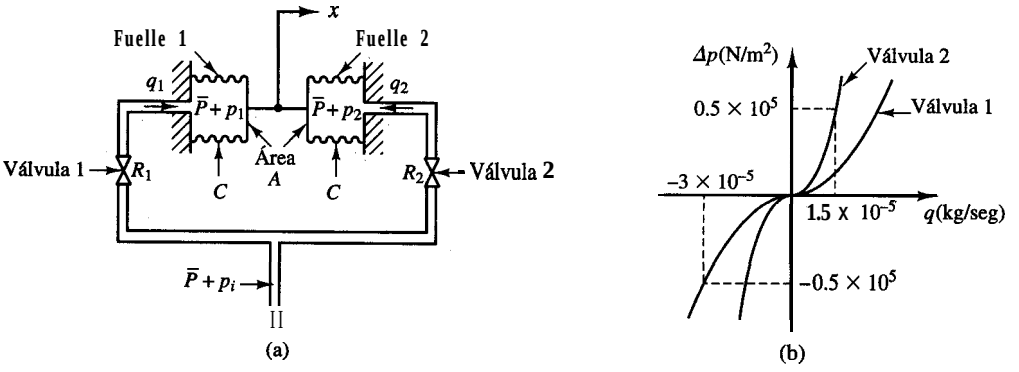


Figura 5-68
(a) Sistema de presión neumático; (b) curva de la diferencia de presión contra el flujo másico.

$$\frac{P_1(s)}{P_i(s)} = \frac{1}{R_1Cs + 1} \qquad \textbf{(5-38)}$$

De manera similar, la función de transferencia $P_2(s)/P_i(s)$ es

$$\frac{P_2(s)}{P_i(s)} = \frac{1}{R_2Cs + 1} \qquad (5\text{-}39)$$

La fuerza que actúa sobre el fuelle 1 en la dirección x es $A(\bar{P} + p_1)$ y la fuerza que actúa sobre el fuelle 2 en la dirección x negativa es $A(\bar{P} + p_2)$. La fuerza resultante se equilibra con kx, fuerza del resorte equivalente del lado corrugado del fuelle.

$$A(p_1 - p_2) = kx$$

o bien

$$A[P_1(s) - P_2(s)] = kX(s) \qquad (5\text{-}40)$$

Remitiéndonos a las ecuaciones (5-38) y (5-39), observamos que

$$P_1(s) - P^*(s) = \left(\frac{1}{R_1Cs + 1} - \frac{1}{R_2Cs + 1}\right) P_i(s)$$

$$= \frac{R_2Cs - R_1Cs}{(R_1Cs + 1)(R_2Cs + 1)} P_i(s)$$

Sustituyendo esta última ecuación en la ecuación (5-40) y reescribiendo ésta, la función de transferencia $X(s)/P_i(s)$ se obtiene como

$$\frac{X(s)}{P_i(s)} = \frac{A}{k} \frac{(R_2C - R_1C)s}{(R_1Cs + 1)(R_2Cs + 1)} \qquad (5\text{-}41)$$

Los valores numéricos de las resistencias promedio R_1 y R_2 son

$$R_1 = \frac{d\,\Delta p}{dq_1} = \frac{0.5 \times 10^5}{3 \times 10^5} = 0.167 \times 10^{10}\ \frac{\text{N/m}^2}{\text{kg/seg}}$$

$$R_2 = \frac{d\,\Delta p}{dq_2} = \frac{0.5 \times 10^5}{1.5 \times 10^5} = 0.333 \times 10^{10}\ \frac{\text{N/m}^2}{\text{kg/seg}}$$

El valor numérico de la capacitancia C de cada fuelle es

$$C = \frac{V}{nR_{\text{aire}}T} = \frac{5 \times 10^{-4}}{1 \times 287 \times (273 + 30)} = 5.75 \times 10^{-9}\ \frac{\text{kg}}{\text{N/m}^2}$$

en donde R_{aire} = 287 N-m/kg K. (Véase el problema A-5-12.) En consecuencia,

$$R_1C = 0.167 \times 10^{10} \times 5.75 \times 10^{-9} = 9.60 \text{ seg}$$

$$R_2C = 0.333 \times 10^{10} \times 5.75 \times 10^{-9} = 19.2 \text{ seg}$$

Sustituyendo los valores numéricos de A, k, R_1C y R_2C en la ecuación (5–41), obtenemos

$$\frac{X(s)}{P,(s)} = \frac{1.44 \times 10^{-7} s}{(9.6s + 1)(19.2s + 1)}$$

A-5-15. Dibuje un diagrama de bloques del controlador neumático de la figura 5-69. A continuación, obtenga la función de transferencia de este controlador.

Si se elimina la resistencia R_d (y se sustituye con una tubería del tamaño de la línea), ¿qué acción de control obtenemos? Si se elimina la resistencia R_i (y se sustituye con una tubería del tamaño de la línea), ¿qué acción de control obtenemos?

Solución. Supongamos que cuando e = 0, la distancia tobera-aleta es igual a $\bar{X}$ y la presión de control es igual a $\bar{P}_c$. En este análisis, supondremos desviaciones pequeñas de los valores de referencia respectivos, del modo siguiente:

e = señal de error pequeña

x = cambio pequeño en la distancia tobera-aleta

p_c = cambio pequeño en la presión de control

p_I = cambio pequeño en la presión del fuelle 1 debido a un cambio pequeño en la presión de control

p_{II} = cambio pequeño en la presión del fuelle II debido a un cambio pequeño en la presión de control

y = desplazamiento pequeño en el extremo inferior de la aleta

En este controlador, p_c se transmite al fuelle I a través de la resistencia R_d. Asimismo, p_c se transmite al fuelle II a través de la serie de resistencias R_d y R_i. Una relación aproximada entre p_I y p_c es

$$\frac{P_I(s)}{P_c(s)} = \frac{1}{R_dCs + 1} = \frac{1}{T_ds + 1}$$

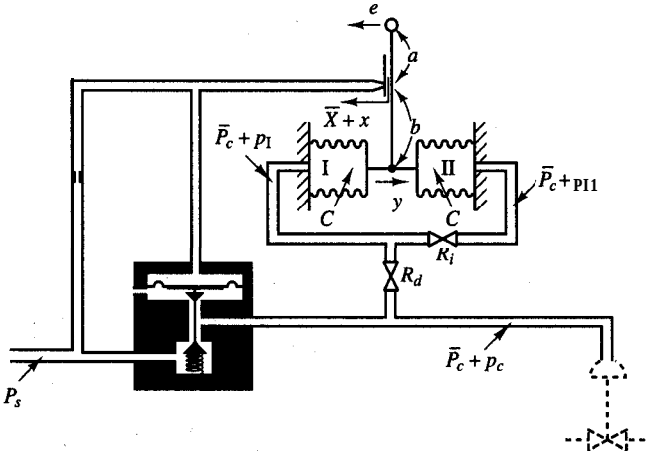


Figura 5-69
Diagrama esquemático de un controlador neumático.

en donde $T_d = R_dC$ = tiempo derivativo. Asimismo, p_{II} y p_I se relacionan mediante la función de transferencia

$$\frac{P_{II}(s)}{P_I(s)} = \frac{1}{R_iCs + 1} = \frac{1}{T_is + 1}$$

en donde $T_i = R_iC$ = tiempo integral. La ecuación del balance de la fuerza para los dos fuelles es

$$(p_I - p_{II})A = k_s y$$

en donde k_s es la rigidez de los dos fuelles conectados y A es el área transversal de los mismos. La relación entre las variables e, x y y es

$$x = \frac{b}{a + b}e - \frac{a}{a + b}y$$

La relación entre p_c y x es

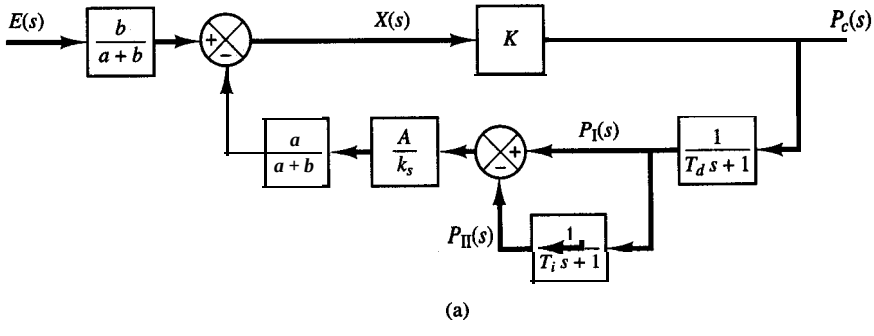
$$p_c = Kx \qquad (K > 0)$$

A partir de las ecuaciones recién obtenidas, se dibuja un diagrama de bloques del controlador, como aparece en la figura **5–70(a).** La simplificación de este diagrama de bloques se produce en la figura **5–70(b).**

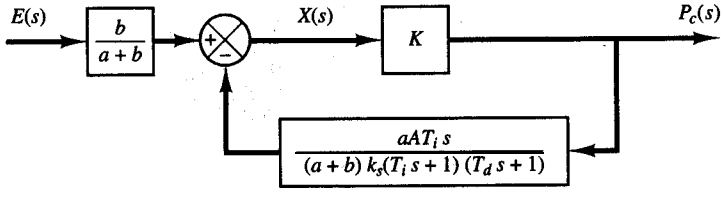
La función de transferencia entre $P_c(s)$ y $E(s)$ es

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\dfrac{b}{a + b}K}{1 + K\dfrac{a}{a + b}\dfrac{A}{k_s}\left(\dfrac{T_is}{T_is + 1}\right)\left(\dfrac{1}{T_ds + 1}\right)}$$

Para un controlador práctico, bajo una operación normal, $|KaAT_is/[(a + b)k_s(T_is + 1)(T_ds + 1)]|$ es mucho mayor que la unidad y $T_i \gg T_d$. Por tanto, la función de transferencia se simplifica del modo siguiente:



(a)



(b)

Figura 5–70
(a) Diagrama de bloques del controlador neumático de la figura 5-69; (b) diagrama de bloques simplificado.

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} \doteqdot \frac{bk_s(T_i s + 1)(T_d s + 1)}{aAT_i s}$$

$$= \frac{bk_s}{aA}\left(\frac{T_i + T_d}{T_i} + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

$$\doteqdot K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

en donde

$$K_P = \frac{bk_s}{aA}$$

Por tanto, el controlador de la figura 5-69 es proporcional-integral-derivativo.

Si se elimina la resistencia R_d o $R_d = 0$, la acción se convierte en la de un controlador proporcional-integral.

Si se suprime la resistencia R_i, o $R_i = 0$, la acción se convierte en la de un controlador proporcional de banda estrecha o la de un controlador de dos posiciones. (Observe que las acciones de los dos fuelles de realimentación se cancelan una a la otra y que no hay realimentación.)

A-5-16. Las válvulas de carretes reales tienen un sobretraslape o un subtraslape, debido a las tolerancias de manufactura. Considere las válvulas de carrete con sobretraslape o subtraslape de la figura 5–71(a) y (b). Trace las curvas que relacionan el área del puerto descubierta A contra el desplazamiento x.

Solución. Para la válvula con un sobretraslape, existe una zona muerta entre $-\frac{1}{2}x_0$ y $\frac{1}{2}x_0$, o $-\frac{1}{2}x_0 < x < \frac{1}{2}x_0$. La figura 5–72(a) muestra la curva del área del puerto descubierta A contra el desplazamiento x. Tal válvula con sobretraslape no funciona como válvula de control.

Para la válvula con subtraslape, la curva del área del puerto, A, contra el desplazamiento x se muestra en la figura 5–72(b). La curva efectiva para la región con subtraslape tiene una pendiente más alta, lo que representa una mayor sensibilidad. Por lo general, las válvulas que se usan para el control tienen un subtraslape.

A-5-17. La figura 5-73 muestra un controlador hidráulico de tubos a chorro. El fluido hidráulico se expele del tubo a chorro. Si el tubo a chorro se cambia hacia la derecha de la posición neutral, el pistón de potencia se mueve a la izquierda, y viceversa. La válvula del tubo a chorro no se usa tanto como la válvula de la aleta, debido a un gran flujo nulo, a una respuesta más lenta y a caracterfsticas impredecibles. Su principal ventaja estriba en su insensibilidad a los fluidos sucios.

Suponga que el pistón de potencia se conecta a una carga ligera, de modo que la fuerza de inercia del elemento de la carga es insignificante en comparación con la fuerza hidráulica que desarrolla el pistón de potencia. ¿Qué tipo de acción de control produce este controlador?

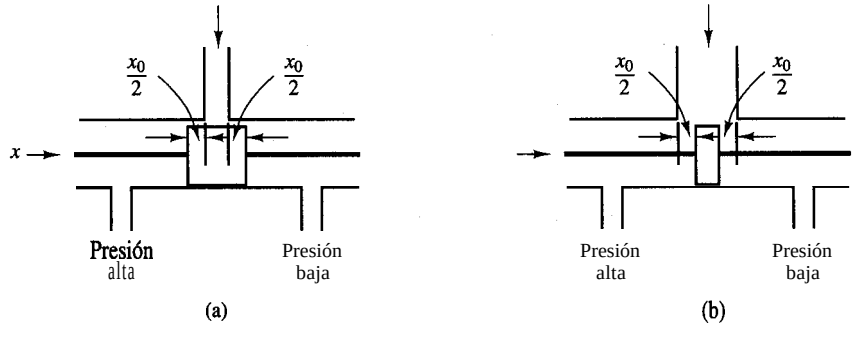


Figura 5–71
(a) Válvula de carrete con un sobretraslape; (b) válvula de devanado con un subtraslape.

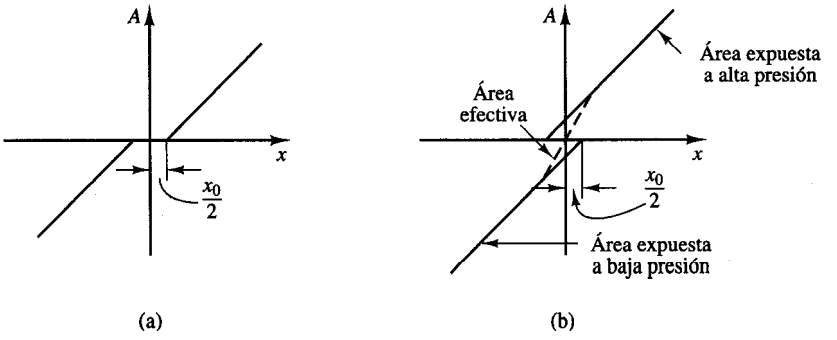


Figura 5-72
(a) Curva del área descubierta del puerto, *A*, contra el desplazamiento x para la válvula con un sobretraslape; (b) curva del área del puerto descubierta, *A*, contra el desplazamiento x para la válvula con subtraslape.

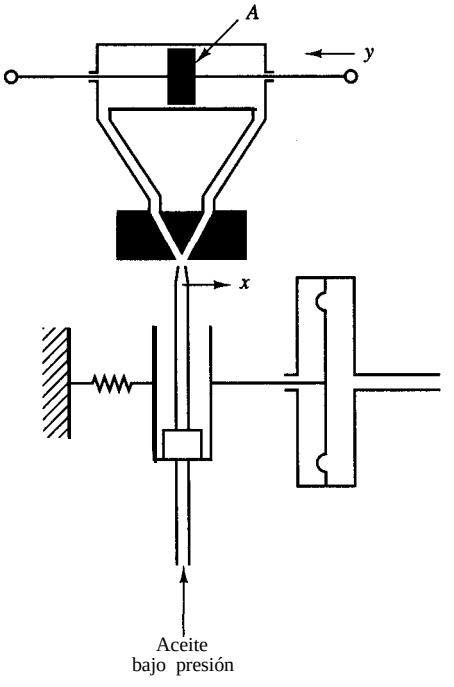


Figura *5-73*
Controlador hidráulico de **tubería** a chorro.

Solución. Defina como x el desplazamiento de la tobera a chorro a partir de la posición neutral y como y el desplazamiento del pistón de potencia. Si la tobera a chorro se mueve a la derecha un desplazamiento x pequefío, el aceite fluirá al lado derecho del pistón de potencia y el aceite del lado izquierdo del pistón de potencia regresará al drenaje. El aceite que fluye hacia el cilindro de potencia está auna presión alta; el aceite que fluye desde el cilindro de potencia al drenaje está a una presión baja. La diferencia de presión resultante provoca que el pistón de potencia se mueva a la izquierda.

Para un desplazamiento **pequeño** de la tobera a chorro x, el flujo q hacia el cilindro de potencia es proporcional a x; es decir,

$$q = K_1 x$$

Para el cilindro de potencia,

$$Ap\, dy = q\, dt$$

en donde A es el área del pistón de potencia y ρ es la densidad del aceite. De este modo

$$\frac{dy}{dt} = \frac{q}{Ap} = \frac{K_1}{Ap}x = Kx$$

en donde $K = K_1/(A\rho)$ = constante. Por tanto, la función de transferencia $Y(s)/X(s)$ es

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s}$$

El controlador produce la acción de control integral.

A-5-18. La figura 5-74 muestra un tubo a chorro hidráulico aplicado a un sistema de control de flujo. El controlador de la tubería a chorro determina la posición de la válvula de mariposa. Analice la operación de este sistema. Grafique una curva posible relacionando el desplazamiento x de la tobera con la fuerza total F que actúa sobre el pistón de potencia.

Solución. La operación de este sistema es la siguiente: el flujo se mide a través del orificio y la diferencia de presión producida por este orificio se transmite al diafragma del dispositivo de medición de presión. El diafragma se conecta a la tobera de giro libre o a la tubería a chorro mediante un enlace. En todo momento, la tobera expele aceite a alta presión. Cuando la tobera está en una posición neutral, no fluye aceite por la tubería para mover el pistón de potencia. Si la tobera se desplaza hacia un lado por el movimiento del brazo de equilibrio, el aceite a alta presión fluye por el tubo correspondiente y el aceite del cilindro de potencia fluye de regreso al depósito por el otro tubo.

Suponga que el sistema está inicialmente en reposo. Si la entrada de referencia cambia repentinamente a un flujo más alto, la tobera se mueve en tal dirección que desplaza el pistón de potencia y abre la válvula de mariposa. A continuación aumenta el flujo, la diferencia de presión a través del orificio se vuelve más grande y la tobera regresa a la posición neutral. El movimiento del pistón de potencia se detiene cuando x, el desplazamiento de la tobera, regresa y permanece en la posición neutral. (Por tanto, el controlador de la tubería a chorro posee una propiedad de integración.)

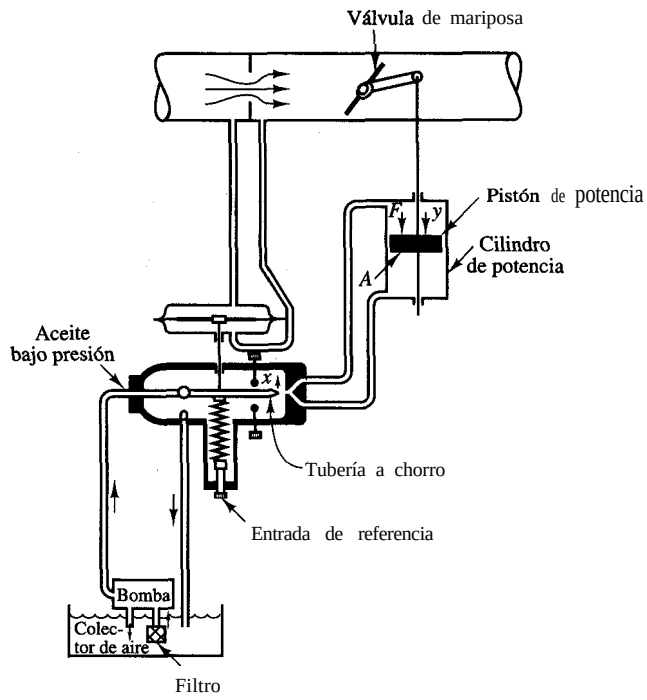


Figura 5-74
Diagrama esquemático de un sistema de control de flujo mediante un controlador hidráulico de tubería a chorro.

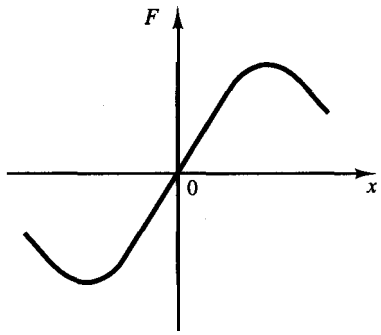


Figura 5-75
Curva de fuerza contra desplazamiento.

La relación entre la fuerza total F que actúa sobre el pistón de potencia y el desplazamiento x de la tobera aparece en la figura 5-75. La fuerza total es igual a la diferencia de presión **AP** a través del pistón, multiplicada por el área A del pistón de potencia. Para un desplazamiento **pequeño** x de la tobera, la fuerza total F y el desplazamiento x se consideran proporcionales.

A-5-19. Explique la operación del sistema de control de velocidad de la figura 5-76.

Solución. Si la velocidad de la máquina aumenta, el soporte deslizable del controlador de esferas se mueve hacia arriba. Este movimiento funciona como entrada para el controlador hidráulico. Una señal de error positiva (un movimiento hacia arriba del soporte deslizante) provoca que el pistón de potencia se mueva hacia abajo, se reduzca la apertura de la **válvula** de combustible y disminuya la velocidad de la máquina. La figura 5-77 contiene un diagrama de bloques de este sistema.

A partir del diagrama de bloques, la función de transferencia $Y(s)/E(s)$ se obtiene como

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \frac{\dfrac{K}{s}}{1 + \dfrac{a_1}{a_1 + a_2} \dfrac{bs}{bs + k} \dfrac{K}{s}}$$

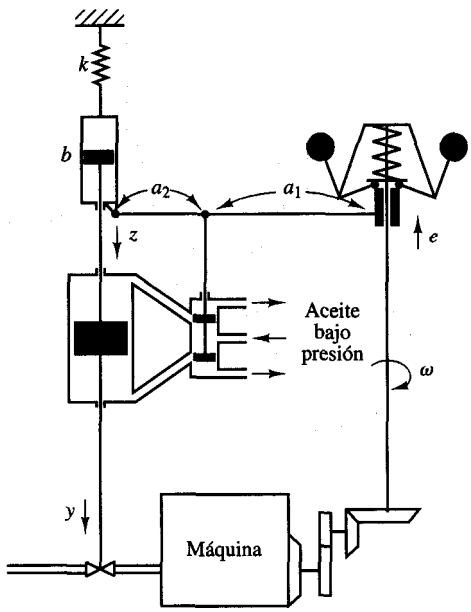


Figura 5-76
Sistema de control de velocidad.

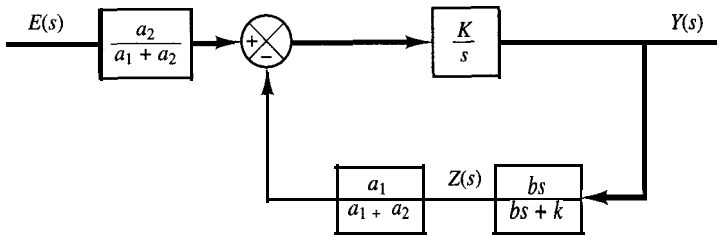


Figura 5 -77
Diagrama de bloques para el sistema de control de velocidad de la figura 5-76.

Si la condición siguiente es pertinente,

$$\left| \frac{a_1}{a_1 + a_2} \frac{bs}{bs + k} \frac{K}{s} \right| \gg 1$$

La función de transferencia $Y(s)/E(s)$ se convierte en

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \frac{a_1 + a_2}{a_2 a_1} \frac{bs + k}{bs} = \frac{a_2}{a_1}\left(1 + \frac{k}{bs}\right)$$

El controlador de velocidad tiene una acción de control proporcional-integral.

A-5-20. Considere el sistema de seguimiento hidráulico de la figura 5-78. Suponiendo que la señal e(t) es la entrada y que el desplazamiento del pistón de potencia y(t) es la salida, encuentre la función de transferencia $Y(s)/E(s)$.

Solución. A partir de la figura 5-79 es posible dibujar un diagrama de bloques para el sistema. Suponiendo que $|K_1a_1/[s(a_1 + a_2)]| \gg 1$ y $|K_2b_1/[s(b_1 + b_2)]| \gg 1$, obtenemos

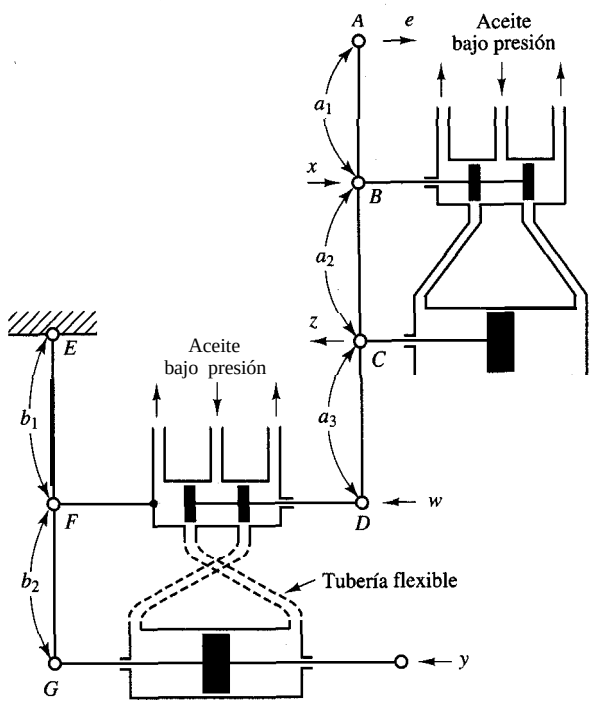


Figura 5-78
Sistema de seguimiento hidráulico.

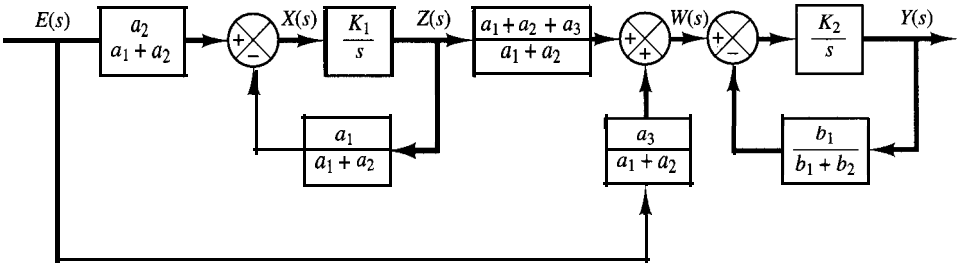


Figura 5-79
Diagrama de bloques para el sistema de la figura 5-78.

$$\frac{Z(s)}{E(s)} = \frac{\frac{a_2}{a_1 + a_2} \cdot \frac{K_1}{s}}{1 + \frac{K_1}{s} \cdot \frac{a_1}{a_1 + a_2}} = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \cdot \frac{a_1 + a_2}{a_1} = \frac{a_2}{a_1}$$

$$\frac{W(s)}{E(s)} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_1 + a_2} \frac{Z(s)}{E(s)} + \frac{a_3}{a_1 + a_2} = \frac{a_2 + a_3}{a_1}$$

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{\frac{K_2}{s}}{1 + \frac{b_1}{b_1 + b_2} \frac{K_2}{s}} = \frac{b_1 + b_2}{b_1}$$

Por tanto

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{Y(s)}{W(s)} \cdot \frac{W(s)}{E(s)} = \frac{(a_2 + a_3)(b_1 + b_2)}{a_1 b_1}$$

Este sistema de seguimiento es un controlador proporcional.

A-5-21. Obtenga la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ del circuito con amplificador operacional de la figura 5-80.

Solución. Defina el voltaje en el punto A como e_A. Así

$$\frac{E_A(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1}{\frac{1}{Cs} + R_1} = \frac{R_1 Cs}{R_1 Cs + 1}$$

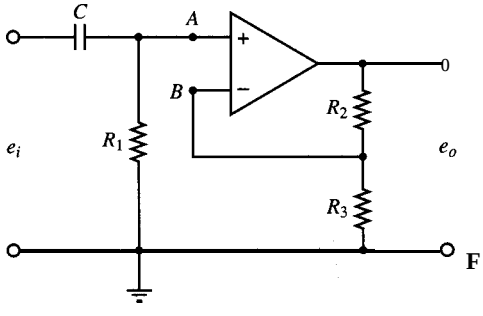


Figura 5-40
Circuito con amplificador operacional.

Defina el voltaje en el punto B como e_B. Por tanto

$$E_B(s) = \frac{R_3}{R_2 + R_3} E_o(s)$$

Considerando que

$$[E_A(s) - E_B(s)]K = E_o(s)$$

y que $K \gg 1$, debemos tener

$$E_A(s) = E_B(s)$$

De modo que

$$E_A(s) = \frac{R_1 Cs}{R_1 Cs + 1} E_i(s) = E_B(s) = \frac{R_3}{R_2 + R_3} E_o(s)$$

a partir de lo cual obtenemos

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_2 + R_3}{R_3} \frac{R_1 Cs}{R_1 Cs + 1} = \frac{\left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)s}{s + \frac{1}{R_1 C}}$$

A-5-22. Obtenga la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ del circuito con amplificador operacional de la figura 5–81.

Solución. El voltaje del punto A es

$$e_A = \frac{1}{2}(e_i - e_o) + e_o$$

La versión transformada mediante el método de Laplace de esta última ecuación es

$$E_A(s) = \frac{1}{2}[E_i(s) + E_o(s)]$$

El voltaje en el punto B es

$$E_B(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{R_2 + \frac{1}{Cs}} E_i(s) = \frac{1}{R_2 Cs + 1} E_i(s)$$

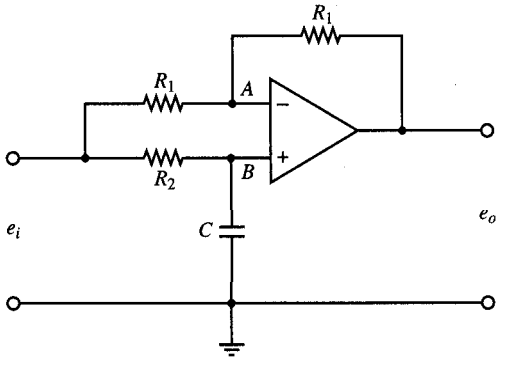


Figura 5-81
Circuito con amplificador operacional.

Dado que $[E_B(s) \quad E_A(s)]K = E_o(s)$ y $K \gg 1$, debemos tener $E_A(s) = E_B(s)$. Por tanto

$$\frac{1}{2}\,[E_i(s) + E_o(s)] = \frac{1}{R_2Cs + 1}\,E_i(s)$$

De esta forma

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_2Cs \quad 1}{R_2Cs + 1} = \frac{s - \dfrac{1}{R_2C}}{s + \dfrac{1}{R_2C}}$$

A-5-23. Considere el sistema estable de control con realimentación unitaria con una función de transferencia de trayectoria directa G(s). Suponga que la función de transferencia en lazo cerrado se escribe como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{(T_as + 1)(T_bs + 1)\cdots(T_ms + 1)}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)\cdots(T_ns + 1)} \qquad (m \le n)$$

Demuestre que

$$\int_0^{\infty} e(t)\,dt = (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) - (T_a + T_b + \cdots + T_m)$$

en donde e(t) es el error en la respuesta escalón unitario. Asimismo, demuestre que

$$\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} sG(s)} = (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) - (T_a + T_b + \cdots + T_m)$$

Solución. Definamos

$$(T_as + 1)(T_bs + 1)\cdots(T_ms + 1) = P(s)$$

Y

$$(T_1s + 1)(T_2s + 1)\cdots(T_ns + 1) = Q(s)$$

Por tanto

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Y

$$E(s) = \frac{Q(s) - P(s)}{Q(s)}\,R(s)$$

Para una entrada escalón unitario, $R(s) = 1/s$ y

$$E(s) = \frac{Q(s) - P(s)}{sQ(s)}$$

Dado que el sistema es estable $\int_0^{\infty} e(t)\,dt$ converge a un valor constante. Remitiéndonos a la tabla 2-2 (renglón 10), tenemos que

$$\int_0^{\infty} e(t)\,dt = \lim_{s\to 0} s\,\frac{E(s)}{s} = lí\,E(s)$$

Por tanto

$$\int_0^\infty e(t)\,dt = \lim_{s\to 0} \frac{Q(s) - P(s)}{sQ(s)}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{Q'(s) - P'(s)}{Q(s) + sQ'(s)}$$

$$= \lim_{s\to 0} [Q'(s) - P'(s)]$$

Dado que

$$\lim_{s\to 0} P'(s) = T_a + T_b + \cdots + T_m$$

$$\lim_{s\to 0} e'(s) = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$$

tenemos que

$$\int_0^\infty e(t)\,dt = (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) - (T_a + T_b + \cdots + T_m)$$

Para una entrada escalón unitario $r(t)$, dado que

$$\int_0^\infty e(t)\,dt = \lim_{s\to 0} E(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + G(s)} R(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + G(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{\lim sG(s)} = \frac{1}{K_v}$$

tenemos que

$$\frac{1}{\lim_{s\to 0} sG(s)} = (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) - (T_a + T_b + \cdots + T_m)$$

Observe que los ceros en el semiplano izquierdo del plano (es decir, T_a, T_b, . . . , T_m positivos) aumentan K_v. Los polos cerca del origen provocan constantes de error de velocidad bajas a menos que haya ceros cercanos.

PROBLEMAS

B-5-1. Si la trayectoria directa de un sistema contiene al menos un elemento de integración, la salida sigue cambiando mientras haya un error presente. La salida se detiene cuando el error es precisamente cero. Si se introduce al sistema una perturbación externa, es conveniente tener un elemento de integración entre el elemento que mide el error y el punto en donde se introduce la perturbación, a fin de que el efecto de la perturbación externa se haga cero en estado estable.

Demuestre que, si la perturbación es una función rampa, el error en estado estable provocado por esta perturbación rampa sólo se elimina si dos integradores preceden al punto en el que se introduce la perturbación.

B-5-2. Considere los controladores automáticos industriales cuyas acciones de control son proporcionales, integrales, proporcionales-integrales, proporcionales-derivativas y proporcionales-integrales-derivativas. Las funciones de transferencia de estos controladores se obtienen, respectivamente, a partir de

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

en donde $U(s)$ es la transformada de Laplace de u(t), la salida del controlador, y E(s) es la transformada de Laplace de e(t), la señal de error.Trace las curvas $u(t)$ contra t para cada uno de los cinco tipos de controladores, cuando la señal de error sea

(a) e(t) = función escalón unitario

(b) e(t) = función rampa unitaria

Al trazar las curvas, suponga que los valores numéricos de K_p, K_i, T_i y T_d, se obtienen como

K_p = aumento proporcional = 4

K_i = aumento integral = 2

T_i = tiempo integral = 2 seg

T_d = tiempo derivativo = 0.8 seg

B-5-3. Considere un sistema de control con realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{K}{s(Js + B)}$$

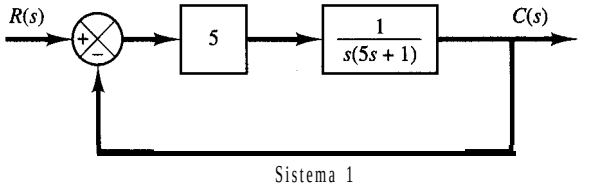
Analice los efectos de variar los valores de K y B sobre el error en estado estable en la respuesta rampa unitaria. Trace curvas de respuesta rampa unitaria para valores de K pequeño, mediano y grande.

B-5-4. La figura 5-82 muestra tres sistemas. El sistema 1 es un sistema de control de posición. El sistema II es un sistema de control de posición con acción de control PD. El sistema III es un sistema de control de posición con realimentación de velocidad. Compare las respuestas escalón unitario, de impulso unitario y rampa unitaria de los tres sistemas ¿Cuál sistema es mejor con respecto a la velocidad de respuesta y el sobrepaso máximo en la respuesta escalón?

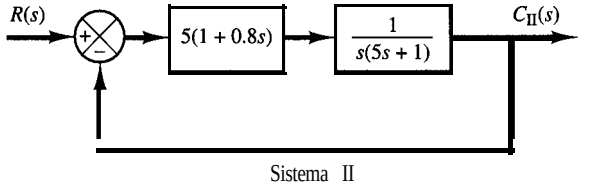
B-5-5. Considere el sistema de control de posición de la figura 5-83. Escriba un programa de MATLAB para obtener una respuesta escalón unitario y una respuesta rampa unitaria del sistema. Trace las curvas de $x_1(t)$ contra t, $x_2(t)$ contra t, $x_3(t)$ contra t, y $e(t)$ contra t [en donde e(t) = r(t) $- x_1(t)$] para la respuesta escalón unitario y la respuesta rampa unitaria.

B-5-6. Determine el rango de valores de K para la estabilidad de un sistema de control con realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es

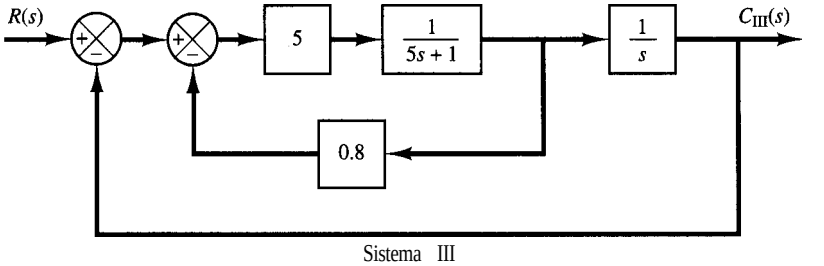
$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 2)}$$



Sistema 1



Sistema II



Sistema III

Figura 5-82
(a) Sistema de control de posición; (b) sistema de control de posición con acción de control PD; (c) sistema de control de posición con realimentación de velocidad.

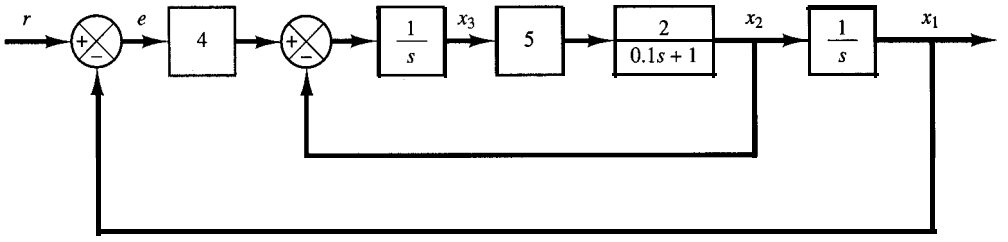


Figura 5-83
Sistema de control de posición.

B-5-7. Considere el sistema de control con realimentación unitaria con la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s) = \frac{10}{s(s-1)(2s+3)}$$

¿Es estable este sistema?

B-5-8. Considere el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

en donde la matriz **A** se obtiene mediante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -b_3 & 0 & 1 \\ 0 & -b_2 & -b_1 \end{bmatrix}$$

(**A** se denomina matriz de Schwarz.) Demuestre que la primera columna del arreglo de Routh de la ecuación característica $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ está formada por 1, b_1, b_2, y $b_1 b_3$.

B-5-9. Considere el sistema neumático de la figura 5–84. Obtenga la función de transferencia $X(s)/P_i(s)$.

B-5-10. La figura 5-85 muestra un controlador neumático. ¿Qué clase de acción de control produce este controlador? Obtenga la función de transferencia $P_c(s)/E(s)$.

B-5-11. Considere el controlador neumático de la figura 5–86. Suponiendo que el relevador neumático tiene la característica de que $p_c = Kp_b$ (en donde $K > 0$), determine la acción de control de este controlador. La entrada al controlador es e y la salida es p_c.

B-5-12. La figura 5-87 muestra un controlador neumático. La señal e es la entrada y el cambio en la presión de control p_c es la salida. Obtenga la función de transferencia $P_c(s)/E(s)$. Suponga que el relevador neumático tiene la característica de que $p_c = Kp_b$, en donde $K > 0$.

B-5-13. Considere el controlador neumático de la figura 5-88. ¿Qué clase de acción de control produce este controlador? Suponga que el relevador neumático tiene la característica de que $p_c = Kp_b$, en donde $K > 0$.

B-5-14. La figura 5-89 contiene un transductor electroneumático. Demuestra que el cambio en la presión de salida es proporcional al cambio en la corriente de entrada.

B-5-15. La figura 5-90 muestra una válvula de aleta colocada entre dos toberas opuestas. Si la aleta se mueve ligeramente ala derecha, ocurre un desequilibrio de presión en las toberas y el pistón de potencia se mueve a la izquierda, y viceversa. Con frecuencia se usan dispositivos como éste en los sistemas de seguimiento hidráulicos como válvulas de primera etapa en las servoválvulas de dos etapas. Este uso se da porque es posible que se requiera una fuerza considerable para impulsar válvulas de carrete más grandes que la que produce la fuerza de flujo en estado estable. Para reducir o compensar esta fuerza, se emplea con frecuencia una configuración de válvulas de dos etapas; se usa una válvula de aleta o una tubería a chorro como válvula de primera etapa para aportar la fuerza necesaria, con el propósito de impulsar la válvula de carretes de la segunda etapa.

La figura 5-91 ofrece un diagrama esquemático de un servomotor hidráulico en el cual se amplifica la señal de error en dos etapas mediante una tubería a chorro y una válvula piloto. Dibuje un diagrama de bloques del sistema

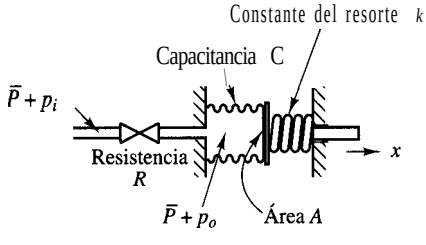


Figura 5-84
Sistema neumático.

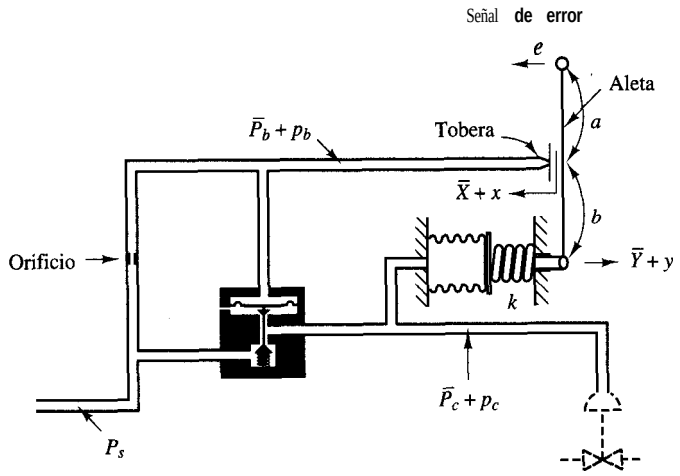


Figura S-SS
Controlador neumático.

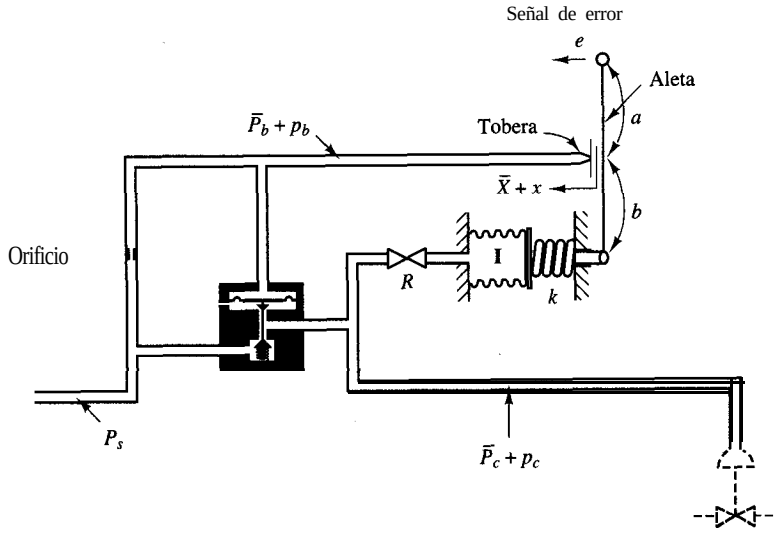


Figura 5–86
Controlador neumático.

de la figura 5-91 y a continuación encuentre la función de transferencia entre y y x, en donde x es la presión de aire y y es el desplazamiento del pistón de potencia.

B-5-16. La figura 5-92 es un diagrama esquemático de un sistema de control de elevación de aeronaves. La entrada al sistema es el ángulo de deflexión θ de la palanca de control y la salida es el ángulo de elevación ϕ. Suponga que los ángulos θ y ϕ son relativamente pequeños. Demuestre que, para cada ángulo θ de la palanca de control, existe un ángulo de elevación ϕ correspondiente (en estado estable).

B-517. Considere el controlador de la figura 5-93. La entrada es la presión de aire p_i y la salida es el desplazamiento y del pistón de potencia. Obtenga la función de transferencia $Y(s)/Pi(s)$.

B-5-18. Obtenga la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ del circuito con amplificador operacional de la figura 5-94.

B-5-19. Obtenga la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ del circuito con amplificador operacional de la figura 5–95.

B-5-20. Considere un sistema de control con realimentación unitaria con la función de transferencia en lazo cerrado:

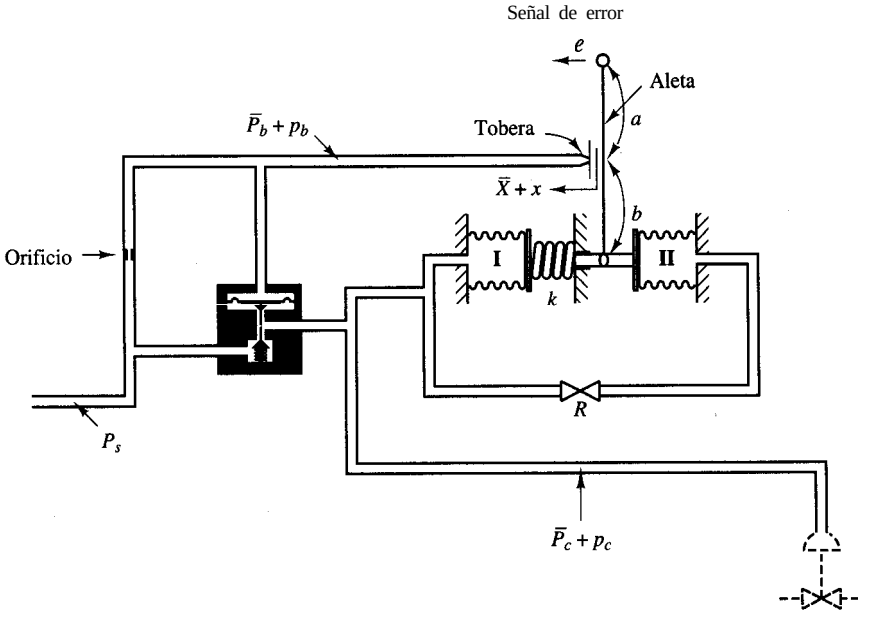


Figura 5–87
Controlador neumático.

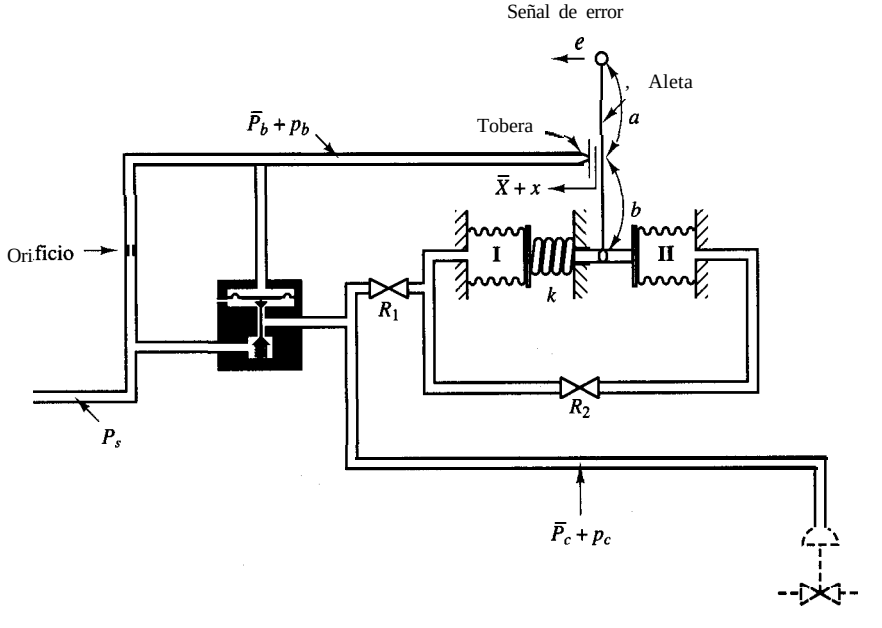


Figura 5-88
Controlador neumático.

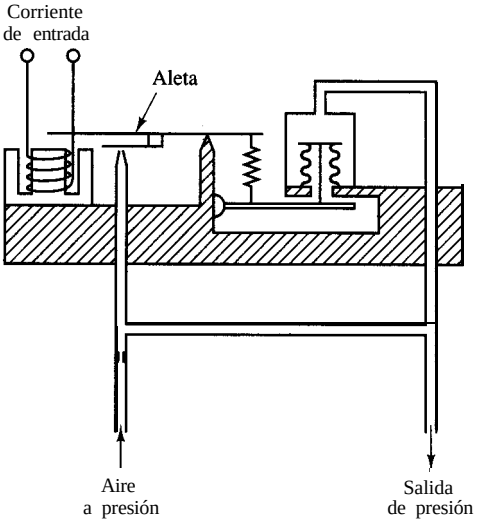


Figura 5-89
Transductor eléctrico neumático.

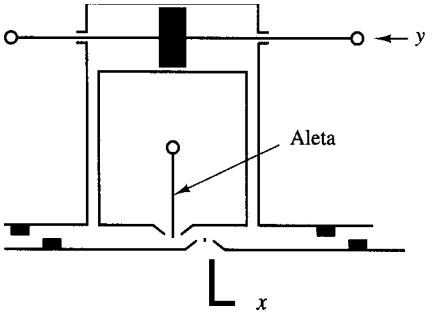


Figura 5-90
Válvula de aleta.

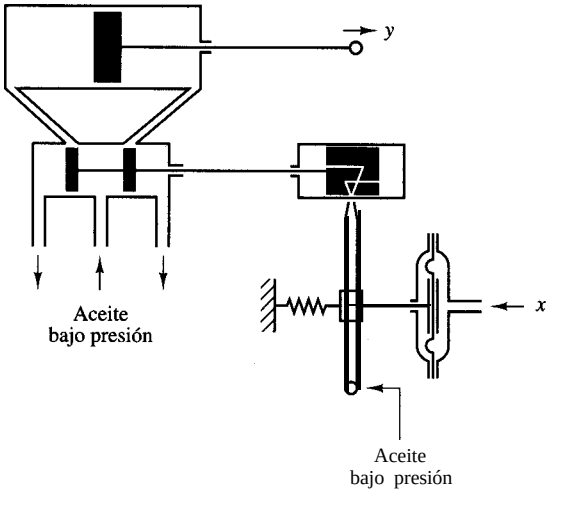


Figura 5-91
Diagrama esquemático de un servomotor hidráulico.

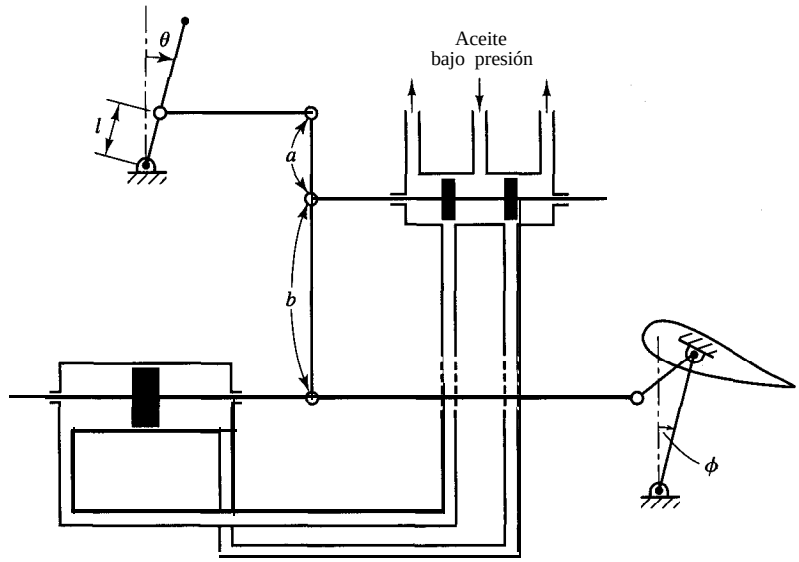


Figura 5-92
Sistema de control de elevación de aeronaves.

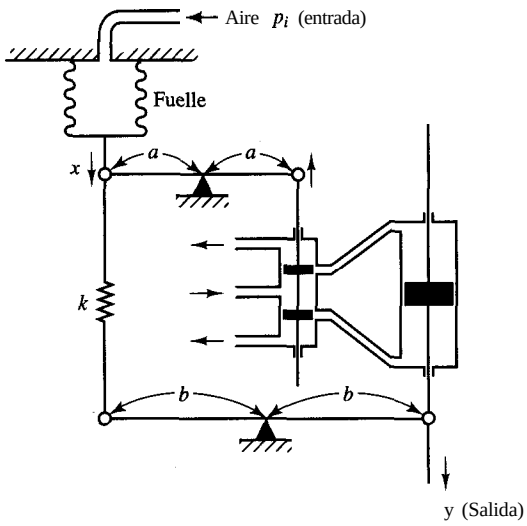


Figura 5-93
Controlador.

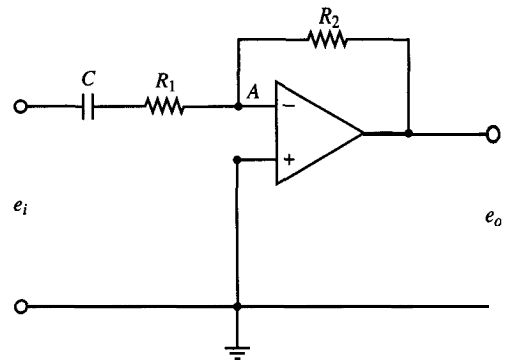


Figura 5-94
Circuito con amplificador operacional.

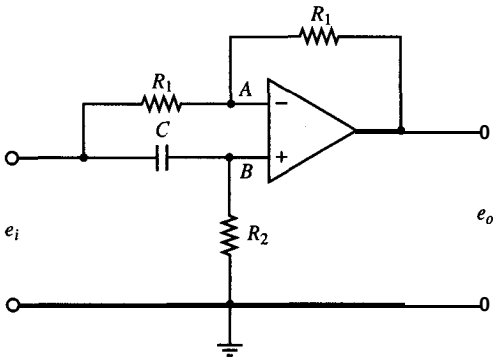


Figura 5–95
Circuito con amplificador operacional.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{Ks + b}{s^2 + as + b}$$

Determine la función de transferencia en lazo abierto G(s).

Demuestre que el error en estado estable en la respuesta rampa unitaria se obtiene mediante

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{a - K}{b}$$

B-5-21. Demuestre que el error en estado estable en la respuesta a las entradas rampa se hace cero si la función de transferencia en lazo cerrado está dada mediante

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{a_{n-1}s + a_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

6 Análisis del lugar geométrico de las raíces

6-1 INTRODUCCIÓN

La característica básica de la respuesta transitoria de un sistema en lazo cerrado se relaciona estrechamente con la ubicación de los polos en lazo cerrado. Si el sistema tiene una ganancia de lazo variable, la ubicación de los polos en lazo cerrado depende del valor de la ganancia de lazo elegida. Por tanto, es importante que el diseñador conozca cómo se mueven los polos en lazo cerrado en el plano s conforme varía la ganancia de lazo.

Desde el punto de vista del diseño, un simple ajuste de la ganancia en algunos sistemas mueve los polos en lazo cerrado a las posiciones deseadas. A continuación el problema de diseño se centra en la selección de un valor de ganancia adecuada. Si el ajuste de la ganancia no produce por sí solo un resultado conveniente, será necesario agregar al sistema un compensador. (Este tema se analiza con detalle en el capítulo 7.)

Los polos en lazo cerrado son las raíces de la ecuación característica. Si ésta tiene un grado superior a 3, es muy laborioso encontrar sus raíces y se requerirá de una solución con computadora. (MATLAB aporta una solución simple para este problema.) Sin embargo, simplemente encontrar las raíces de la ecuación característica puede tener un valor limitado, debido a que, conforme varía la ganancia de la función de transferencia en lazo abierto, la ecuación característica cambia y deben repetirse los cálculos.

W. R. Evans diseñó un método sencillo para encontrar las raíces de la ecuación característica, que se usa ampliamente en la ingeniería de control. Este método se denomina ***método del lugar geométrico de las raíces,*** y en él se grafican las raíces de la ecuación característica para todos los valores de un parámetro del sistema. A continuación se pueden localizar sobre la gráfica resultante las raíces correspondientes a un valor determinado de este parámetro. Observe que el parámetro es, por lo general, la ganancia, aunque es posible usar cualquier otra variable de la función de transferencia en lazo abierto. A menos que

se indique lo contrario, aquí supondremos que la ganancia de la función de transferencia en lazo abierto es el parámetro que puede adoptar todos los valores, de cero a infinito.

Mediante el método del lugar geométrico de las raíces, el diseñador puede predecir los efectos que tiene en la ubicación de los polos en lazo cerrado, variar el valor de la ganancia o agregar polos y/o ceros en lazo abierto. Por tanto, es conveniente que el diseñador comprenda bien el método para generar los lugares geométricos de las raíces del sistema en lazo cerrado, ya sea en forma manual o mediante el uso de programas de computadora como MATLAB.

Método del **lugar** geométrico **de las raíces.** La idea básica detrás del método del lugar geométrico de las raíces es que los valores des que hacen que la función de transferencia alrededor del lazo sea igual a -1 deben satisfacer la ecuación característica del sistema.

El método debe su nombre al lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado conforme la ganancia varía de cero a infinito. Dicha gráfica muestra claramente cómo contribuye cada polo o cero en lazo abierto a las posiciones de los polos en lazo cerrado.

Al diseñar un sistema de control lineal, encontramos que el método del lugar geométrico de las raíces resulta muy útil, dado que indica la forma en la que deben modificarse los polos y ceros en lazo abierto para que la respuesta cumpla las especificaciones de desempeño del sistema. Este método es particularmente conveniente para obtener resultados aproximados con mucha rapidez.

Algunos sistemas de control pueden tener más de un parámetro que deba ajustarse. El diagrama del lugar geométrico de las raíces, para un sistema que tiene parámetros múltiples, se construye variando un parámetro a la vez. En este capítulo incluimos el análisis de los lugares geométricos de las raíces para un sistema de dos parámetros. Los lugares geométricos de las raíces para tal caso se denominan contornos ***de las raíces***.

El método del lugar geométrico de las raíces es una técnica gráfica muy poderosa para investigar los efectos de la variación de un parámetro del sistema sobre la ubicación de los polos en lazo cerrado. En la mayor parte de los casos, el parámetro del sistema es la ganancia de lazo ***K,*** aunque el parámetro puede ser cualquier otra variable del sistema. Si el diseñador sigue las reglas generales para construir los lugares geométricos, le resultará sencillo trazar los lugares geométricos de las raíces de un sistema específico.

Debido a que generar los lugares geométricos de las raíces usando MATLAB es muy simple, se podría pensar que trazar los lugares geométricos de las raíces en forma manual es una pérdida de tiempo y esfuerzo. Sin embargo, una buena forma de interpretar los lugares geométricos generados por la computadora es adquirir la experiencia de trazar los lugares geométricos en forma manual, cosa que, además, proporciona con mucha rapidez una idea global de los lugares geométricos.

Mediante el método del lugar geométrico de las raíces, es posible determinar el valor de la ganancia de lazo ***K*** que formará el factor de amortiguamiento relativo de los polos dominantes en lazo cerrado en la forma sugerida. Si la ubicación de un polo o cero en lazo abierto es una variable del sistema, el método del lugar geométrico de las raíces sugiere la forma de elegir la ubicación de un polo o cero en lazo abierto. (Véanse el ejemplo 6-8 y los problemas A-6-12 al A-6-14.) El capítulo 7 contiene más información del diseño de un sistema de control con base en el método del lugar geométrico de las raíces.

Panorama del capítulo. Este capítulo presenta los conceptos básicos del método del lugar geométrico de las raíces y ofrece algunas reglas útiles para construir gráficamente los lugares geométricos de las raíces, al igual que para generar los lugares geométricos de las raíces con MATLAB.

El panorama del capítulo es el siguiente: la sección 6–1 presentó una introducción del método del lugar geométrico de las raíces. La sección 6-2 detalla los conceptos implícitos en el mismo y presenta algunos ejemplos del procedimiento general para trazar los lugares geométricos de las raíces. La sección 6-3 resume las reglas generales para construir los lugares geométricos de las raíces y la sección 6-4 analiza la generación de gráficas de los lugares geométricos de las raíces con MATLAB. La sección 6-5 se refiere a casos especiales: el primer caso ocurre cuando la variable K no aparece como factor multiplicativo y el segundo, cuando el sistema en lazo cerrado se realimenta positivamente. La sección 6-6 analiza los sistemas en lazo cerrado mediante el método del lugar geométrico de las raíces. La sección 6-7 extiende este método para tratar los sistemas en lazo cerrado con retardo de transporte. Por último, la sección 6-8 analiza las gráficas de los contornos de las raíces.

6-2 GRÁFICAS DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES

Condiciones de ángulo y magnitud. Considere el sistema de la figura 6–1. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{6–1}$$

La ecuación característica para este sistema en lazo cerrado se obtiene haciendo que el denominador del segundo miembro de la ecuación (6–1) sea igual a cero. Es decir,

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

o bien

$$G(s)H(s) = -1 \tag{6–2}$$

Aquí se supone que $G(s)H(s)$ es un cociente de polinomios en s. [En la sección 6-7 se extiende el análisis para el caso en el que $G(s)H(s)$ contiene el retardo de transporte e^{-Ts}.] Dado que $G(s)H(s)$ es una cantidad compleja, la ecuación (6-2) se divide en dos ecuaciones igualando los ángulos y magnitudes de ambos miembros, para obtener lo siguiente:

Condición de ángulo:

$$\angle G(s)H(s) = \pm 180°(2k + 1) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{6-3}$$

Condición de magnitud:

$$|G(s)H(s)| = 1 \tag{6–4}$$

Los valores de s que cumplen tanto las condiciones de ángulo como las de magnitud son las raíces de la ecuación característica, o los polos en lazo cerrado. El lugar geométrico de las raíces es una gráfica de los puntos del plano complejo que sólo satisfacen la condición de ángulo. Las raíces de la ecuación característica (los polos en lazo cerrado) que corresponden a un valor específico de la ganancia se determinan a partir de la condición de magnitud. Los detalles de la aplicación de las condiciones de ángulo y magnitud para obtener los polos en lazo cerrado se presentan más adelante en esta sección.

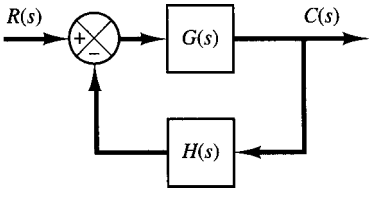


Figura 6–1
Sistema de control.

En muchos casos, $G(s)H(s)$ contiene un parámetro de ganancia K, y la ecuación característica se escribe como

$$1 + \frac{K(s + z_1)(s + z_2)\cdots(s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2)\cdots(s + p_n)} = 0 \qquad (6\text{–}5)$$

Entonces, los lugares geométricos de las raíces para el sistema son los lugares geométricos de los polos en lazo cerrado conforme la ganancia K varía de cero a infinito.

Observe que, para empezar a trazar los lugares geométricos de las raíces de un sistema mediante el método analizado aquí, debemos conocer la ubicación de los polos y los ceros de $G(s)H(s)$. Recuerde que los ángulos de las cantidades complejas que se originan a partir de los polos y los ceros en lazo abierto para el punto de prueba s se miden en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Por ejemplo, si $G(s)H(s)$ se obtiene mediante

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + z_1)}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)(s + p_4)}$$

en donde $-p_2$ y $-p_3$ son polos complejos conjugados, el ángulo de $G(s)H(s)$ es

$$\angle G(s)H(s) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4$$

en donde $\phi_1, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ y θ_4 se miden en sentido contrario al de las manecillas del reloj, como se aprecia en las figuras 6–2(a) y (b). La magnitud de $G(s)H(s)$ para este sistema es

$$|G(s)H(s)| = \frac{KB_1}{A_1A_2A_3A_4}$$

en donde A_1, A_2, A_3, A_4 y B_1 son magnitudes de las cantidades complejas $s + p_1$, $s + p_2$, $s + p_3$, $s + p_4$ y $s + z_1$, respectivamente, de acuerdo con la figura 6–2(a).

Observe que, debido a que los polos complejos conjugados y los ceros complejos conjugados en lazo abierto, si existen, siempre se ubican simétricamente con respecto al eje real, los lugares geométricos de las raíces siempre son simétricos con respecto a este eje. Por

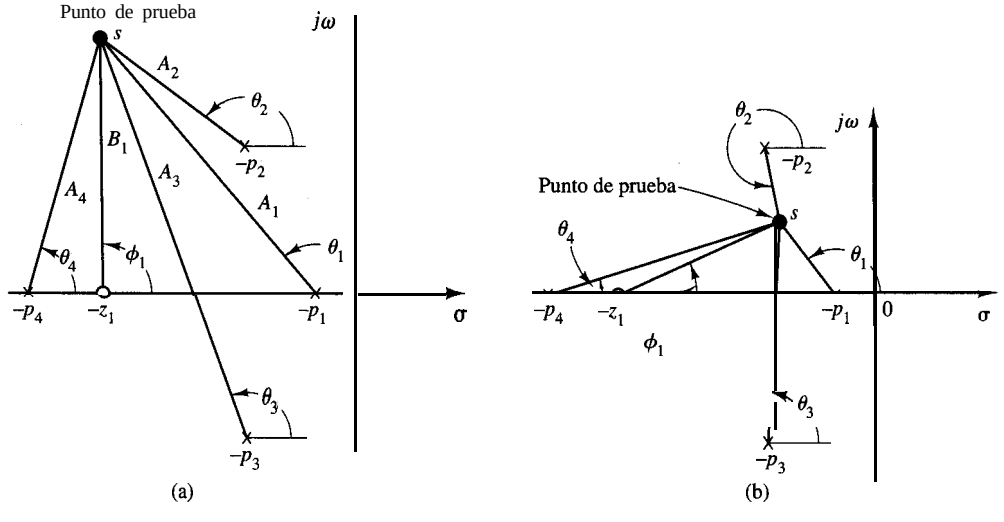


Figura 6-2
(a) y (b) Diagramas que muestran la medición de ángulos de los polos y los ceros en lazo abierto para el punto de prueba s.

tanto, sólo es necesario construir la mitad superior de los lugares geométricos de las raíces y dibujar la imagen espejo de la mitad superior en el plano *s* inferior.

Ejemplos. A continuación se presentarán dos ejemplos para construir gráficas del lugar geométrico de las raíces. Aunque los enfoques de computadora resultan muy sencillos para la construcción de los lugares geométricos de las raíces, aquí se usará el cálculo gráfico, combinado con una inspección, para determinar los lugares geométricos de las raíces en los que deben ubicarse las raíces de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado. Este enfoque gráfico ayudará a comprender mejor cómo se mueven los polos en lazo cerrado en el plano complejo conforme los polos y los ceros en lazo abierto se mueven. Aunque sólo usaremos sistemas simples como ejemplo, el procedimiento para encontrar los lugares geométricos de las raíces no es más complicado para sistemas de orden superior.

El primer paso en el procedimiento para construir una gráfica del lugar geométrico de las raíces es buscar los lugares geométricos de las raíces posibles usando la condición de ángulo. A continuación, si es necesario, se escala o se gradúa la escala de los lugares geométricos en la ganancia mediante la condición de magnitud.

Debido a que las mediciones gráficas de ángulos y magnitudes están implícitas en el análisis, encontramos necesario usar las mismas divisiones en el eje de las abscisas y en el de las ordenadas, cuando se tracen los lugares geométricos de las raíces sobre papel para gráficas

EJEMPLO 6-1 Considere el sistema de la figura 6-3. (Suponemos que el valor de la ganancia K es no negativo.) Para este sistema,

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}, \qquad H(s) = 1$$

Tracemos la gráfica del lugar geométrico de las raíces y después determinemos el valor de K tal que el factor de amortiguamiento relativo ζ de los polos dominantes complejos conjugados en lazo abierto sea 0.5.

Para el sistema determinado, la condición de ángulo se convierte en

$$\angle G(s) = \angle \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$
$$= -\angle s - \angle s+1 - \angle s+2$$
$$= \pm 180°(2k+1) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

La condición de magnitud es

$$|G(s)| = \left|\frac{K}{s(s+1)(s+2)}\right| = 1$$

Un procedimiento común para trazar la gráfica del lugar geométrico de las raíces es el siguiente:

1. ***Determine los lugares geométricos de las raíces sobre el eje real.*** El primer paso al construir una gráfica del lugar geométrico es ubicar los polos en lazo abierto, $s = 0$, $s = -1$ y $s = -2$, en el

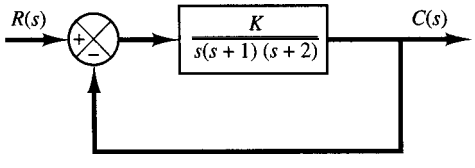


Figura 6–3
Sistema de control.

plano complejo. (En este sistema no hay ceros en lazo abierto.) Las ubicaciones de los polos en laxo abierto se señalan mediante cruces. (En este libro las ubicaciones de los ceros en laxo abierto se indicarán con círculos pequeños.) Observe que los puntos iniciales de los lugares geométricos de las raíces (los puntos que corresponden a $K = 0$) son los polos en laxo abierto. Los lugares geométricos de raíces individuales para este sistema son tres, lo cual es igual al numero de polos en laxo abierto.

Para determinar los lugares geométricos de las raíces sobre el eje real,seleccionamos un punto de prueba, s. Si el punto de prueba está en el eje real positivo, entonces

$$\angle s = \angle s + 1 = \angle s + 2 = 0°$$

Esto demuestra que no es posible satisfacer la condición de ángulo. Por tanto, no hay un lugar geométrico de las raíces sobre el eje real positivo. A continuación, se selecciona un punto de prueba sobre el eje real negativo entre 0 y -1. Así

$$\angle s = 180°, \qquad \angle s + 1 = \angle s + 2 = 0°$$

Por tanto

$$-\angle s - \angle s + 1 - \angle s + 2 = -180°$$

y se satisface la condición de ángulo. Así, la parte del eje real negativo entre 0 y − 1 forma parte del lugar geométrico de las raíces. Si se selecciona un punto de prueba entre -1 y -2, entonces

$$\angle s = \angle s + 1 = 180°, \quad \angle s + 2 = 0°$$

y

$$-\angle s - \angle s + 1 - \angle s + 2 = -360°$$

Se observa que no se satisface la condición de ángulo. Por tanto, el eje real negativo de -1 a -2 no es parte del lugar geométrico de las raíces. Asimismo, si se ubica un punto de prueba sobre el eje real negativo de -2 a $-\infty$, se satisface la condición de ángulo. Por tanto, existen lugares geométricos de las raíces sobre el eje real negativo entre 0 y -1 y entre -2 y $-\infty$.

2. Determine las asíntotas de los lugares geométricos de las raíces. Las asíntotas de los lugares geométricos de las raíces, conforme s tiende a infinito, se determinan del modo siguiente: si se selecciona un punto de prueba muy lejano al origen, entonces

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \lim_{s\to\infty} \frac{K}{s^3}$$

y la condición de ángulo se convierte en

$$-3\angle s = \pm 180°(2k + 1) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

o bien

$$\text{Ángulos de asíntotas} = \frac{\pm 180°(2k+1)}{3} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Dado que el ángulo se repite a sí mismo conforme K varía, los ángulos distintos para las asíntotas se determinan como 60°, -60° y 180°. Por tanto, hay tres asíntotas. La única que tiene el ángulo de 180° es el eje real negativo.

Antes de dibujar estas asíntotas en el plano complejo, debemos encontrar el punto en el cual intersecan el eje real. Dado que

$$G(s) \quad \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \tag{6–6}$$

si un punto de prueba se ubica muy lejos del origen, G(s) se escribe como

$$G(s) \quad \frac{K}{s^3 + 3s^2 + \cdots} \tag{6-7}$$

Dado que la ecuación característica es

$$G(s) = -1$$

remitiéndonos a la ecuación (6−7), la ecuación característica puede escribirse

$$s^3 + 3s^2 + \cdots = -K$$

Para un valor grande de s, esta última ecuación se aproxima mediante

$$(s + 1)^3 = 0$$

Si la abscisa de la intersección de las asíntotas y el eje real se representa mediantes = $-\sigma_a$, entonces

$$\sigma_a = -1$$

y el punto de origen de las asíntotas es (-1,O). Las asíntotas son casi parte de los lugares geométricos de las raíces en regiones muy lejanas al origen.

3. Determine el punto de ruptura o desprendimiento. Para trazar con precisión los lugares geométricos de las raíces, debemos encontrar el punto de desprendimiento, a partir del cual las ramificaciones del lugar geométrico que se originan en los polos en 0 y -1 (conforme ***K*** aumenta) se alejan del eje real y se mueven sobre plano complejo. El punto de desprendimiento corresponde a un punto en el plano ***s*** en el cual ocurren raíces múltiples de la ecuación característica.

Existe un método sencillo para encontrar el punto de desprendimiento y lo presentamos a continuación: escriba la ecuación característica como

$$f(s) = B(s) + KA(s) = 0 \tag{6–8}$$

en donde $A(s)$ y $B(s)$ no contienen ***K.*** Observe que $f(s) = 0$ tiene raíces múltiples en los puntos donde

$$\frac{df(s)}{ds} = 0$$

Esto se observa del modo siguiente: suponga que $f(s)$ tiene raíces múltiples de un orden ***r.*** En este caso, $f(s)$ se escribe como

$$f(s) = (s - s_1)^r(s - s_2) \cdots (s - s_n)$$

Si diferenciamos esta ecuación con respecto a s y establecemos $s = s_1$, obtenemos

$$\left.\frac{df(s)}{ds}\right|_{s=s_1} = 0 \tag{6–9}$$

Esto significa que múltiples raíces de f(s) satisfarán la ecuación (6-9). A partir de la ecuación (6-8) obtenemos

$$\frac{df(s)}{ds} = B'(s) + KA'(s) = 0 \tag{6–10}$$

en donde

$$A'(s) = \frac{dA(s)}{ds}, \qquad B'(s) = \frac{dB(s)}{ds}$$

El valor específico de ***K*** que producirá raíces múltiples de la ecuación característica se obtiene de la ecuación (6-10) como

$$K = -\frac{B'(s)}{A'(s)}$$

Si sustituimos este valor de K en la ecuación (6−8), obtenemos

$$f(s) = B(s) - \frac{B'(s)}{A'(s)} A(s) = 0$$

o bien

$$B(s)A'(s) - B'(s)A(s) = 0 \tag{6-11}$$

Si se despeja la ecuación (6-11) para s, se obtienen los puntos en los que ocurren raíces múltiples. Por otra parte, a partir de la ecuación (6-8) obtenemos

$$K = -\frac{B(s)}{A(s)}$$

Y

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{B'(s)A(s) - B(s)A'(s)}{A^2(s)}$$

Si dK/ds se hace igual a cero, obtenemos lo mismo que en la ecuación (6-11). Por tanto, los puntos de desprendimiento se determinan sencillamente a partir de las raíces de

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

Debe señalarse que no todas las soluciones de la ecuación (6-11) o de $dK/ds = 0$ corresponden a los puntos de desprendimiento reales. Si un punto en el cual $df(s)/ds = 0$ está sobre el lugar geométrico de las raíces, se trata de un punto de desprendimiento real o un punto de ingreso. Planteado de otro modo, si un punto en el cual $df(s)/ds = 0$, el valor de K adquiere un valor positivo real, por lo cual el punto es un punto de desprendimiento o un punto de ingreso real.

Para el ejemplo en cuestión, la ecuación característica G(s) + 1 = 0 se obtiene mediante

$$\frac{K}{s(s+1)(s+2)} + 1 = 0$$

o bien

$$K = -(s^3 + 3s^2 + 2s)$$

Haciendo $dK/ds = 0$ obtenemos

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 6s + 2) = 0$$

o bien

$$s = -0.4226, \qquad s = -1.5774$$

Dado que el punto de desprendimiento debe encontrarse sobre el lugar geométrico de las raíces entre 0 y − 1, es evidente que s = -0.4226 corresponde al punto de desprendimiento real. El punto s = -1.5774 no está sobre el lugar geométrico de las raíces. Por tanto, no es un punto de desprendimiento o de ingreso real. De hecho, el cálculo de los valores de K que corresponden a s = -0.4226 y s = 1.5774 da por resultado

$$K = 0.3849, \quad \text{paras} = -0.4226$$

$$K = -0.3849, \quad \text{para } s = -1.5774$$

4. Determine los puntos en donde los lugaresgeométricos de las raíces cruzan el eje imaginario. Estos puntos se encuentran mediante el criterio de estabilidad de Routh, del modo siguiente: dado que la ecuación característica para el sistema actual es

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

El arreglo de Routh se convierte en

$$\begin{array}{ll} s^3 & 1 \quad\quad 2 \\ s^2 & 3 \quad\quad K \\ s^1 & \dfrac{6-K}{3} \\ s^0 & K \end{array}$$

El valor de K que iguala con cero el término s^1 de la primera columna es $K = 6$. Los puntos de cruce con el eje imaginario se encuentran después despejando la ecuación auxiliar obtenida del renglón s^2; es decir,

$$3s^2 + K = 3s^2 + 6 = 0$$

lo cual produce

$$s = \pm j\sqrt{2}$$

Las frecuencias en los puntos de cruce con el eje imaginario son, por tanto, $\omega = \pm\sqrt{2}$. El valor de ganancia que corresponde a los puntos de cruce es $K = 6$.

Un enfoque alternativo es suponer que $s = j\omega$ en la ecuación característica, igualar con cero tanto la parte imaginaria como la real y después despejar ω y K. Para el sistema actual, la ecuación característica, con $s = j\omega$, es

$$(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + K = 0$$

o bien

$$(K - 3\omega^2) + j(2\omega - \omega^3) = 0$$

Si igualamos a cero tanto la parte real como la imaginaria de esta última ecuación, obtenemos

$$K - 3\omega^2 = 0, \qquad 2\omega - \omega^3 = 0$$

A partir de lo cual

$$\omega = \pm\sqrt{2}, \quad K = 6 \qquad u \qquad \omega = 0, \quad K = 0$$

Por tanto, los lugares geométricos de las raíces cruzan el eje imaginario en $\omega = \pm\sqrt{2}$, y el valor de K en los puntos de cruce es 6. Asimismo, una ramificación del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real tocará el eje imaginario en $\omega = 0$.

5. Seleccione un punto de prueba en una vecindad amplia del eje $j\omega$ y ***el origen,*** como se muestra en la figura 6-4, y aplique la condición de ángulo. Si un punto de prueba está sobre los lugares geo-

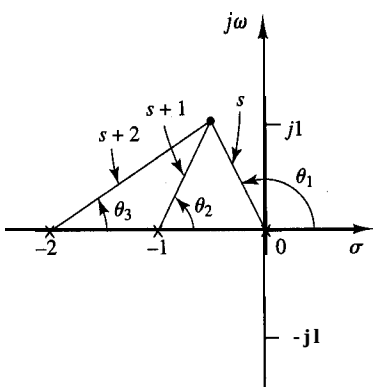


Figura 6-4
Construcción de un lugar geométrico de las raíces.

métricos de las raíces, la suma de los tres ángulos, $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$, debe ser 180". Si el punto de prueba no satisface la condición de ángulo, seleccione otro hasta que se cumpla tal condición. (La suma de los ángulos en el punto de prueba indicará en qué dirección debe moverse el punto de prueba.) Continúe este proceso y ubique una cantidad suficiente de puntos que satisfagan la condición de ángulo.

6. Dibuje los lugares geométricos de las raíces, con base en la información obtenida en los pasos anteriores, tal como se muestra en la figura 6-5.

7. Determine un par de polos dominantes complejos conjugados en lazo cerrado tales que el factor de amortiguamiento relativo ζ sea 0.5. Los polos en lazo cerrado con $\zeta = 0.5$ se encuentran sobre las líneas que pasan por el origen y forman los ángulos $\pm\cos^{-1}\zeta = \pm\cos^{-1}0.5 = \pm 60°$ con el eje real negativo. A partir de la figura 6-5, tales polos en lazo cerrado con $\zeta = 0.5$ se obtienen del modo siguiente:

$$s_1 = -0.3337 + j0.5780, \qquad s_2 = -0.3337 - j0.5780$$

El valor de K que producen tales polos se encuentra a partir de la condición de magnitud, del modo siguiente:

$$K = |s(s+1)(s+2)|_{s=-0.3337+j0.5780}$$
$$= 1.0383$$

Usando este valor de K, el tercer polo se encuentra en $s = -2.3326$.

Observe que, a partir del paso 4, se aprecia que para $K = 6$, los polos dominantes en lazo cerrado se encuentran sobre el eje imaginario en $s = \pm j\sqrt{2}$. Con este valor de K, el sistema exhibirá oscilaciones sostenidas. Para $K > 6$, los polos dominantes en lazo cerrado se encuentran en el semiplano derecho del plano s, produciendo un sistema inestable.

Por último, observe que, si es necesario, se establece con facilidad la graduación de los lugares geométricos de las raíces en términos de K mediante la condición de magnitud. Sencillamente elegimos un punto sobre un lugar geométrico de las raíces, medimos las magnitudes de las tres cantidades complejas s, $s + 1$ y $s + 2$ y multiplicamos estas magnitudes; el producto es igual al valor de la ganancia K en tal punto, o bien

$$|s| \cdot |s+1| \cdot |s+2| = K$$

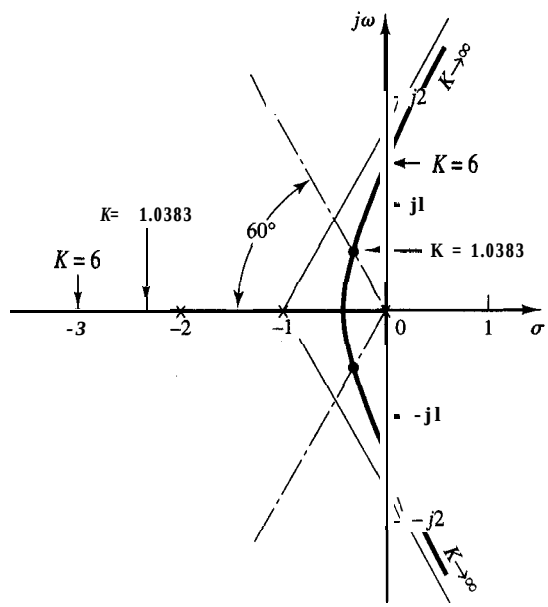


Figura 6-5
Gráfica del lugar geométrico de las raíces.

EJEMPLO 6-2 En este ejemplo trazaremos la gráfica del lugar geométrico de las raíces de un sistema con polos complejos conjugados en lazo abierto. Considere el sistema de la figura 6-6. Para este sistema,

$$G(s) = \frac{K(s + 2)}{s^2 + 2s + 3}, \qquad H(s) = 1$$

Se observa que G(s) tiene un par de polos complejos conjugados en

$$s = -1 + j\sqrt{2}, \qquad s = -1 - j\sqrt{2},$$

Un procedimiento común para trazar la gráfica del lugar geométrico de las raíces es el siguiente:

1. Determine los lugares geométricos de las raíces sobre el eje real. Para cualquier punto de prueba s sobre el eje real, la suma de las contribuciones angulares de los polos complejos conjugados es de 360°, como se observa en la figura 6-7. Por tanto, el efecto neto de los polos complejos conjugados es cero sobre el eje real. La ubicación del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real se determina a partir del cero en lazo abierto sobre el eje real negativo. Una prueba sencilla revela que una sección del eje real negativo, aquella que se encuentra entre -2 y $-\infty$, es una parte del lugar geométrico de las raíces. Se observa que, dado que este lugar geométrico se encuentra entre dos ceros (en s = -2 y $s = -\infty$), es en realidad parte de dos lugares geométricos de las raíces, cada uno de los cuales empieza en uno de los dos polos complejos conjugados. En otras palabras, dos lugares geométricos de las raíces ingresan en la parte del eje real negativo entre -2 y $-\infty$.

Dado que existen dos polos en lazo abierto y un cero, hay una **asíntota** que coincide con el eje real negativo.

2. Determine el ángulo de salida de los polos complejos conjugados en lazo abierto. La presencia de un par de polos complejos conjugados en lazo abierto requiere de la determinación del ángulo de salida a partir de los mismos. El conocimiento de este ángulo es importante, dado que el lugar geométrico de las raíces cerca de un polo complejo proporciona información con respecto a si el lugar geométrico que se origina en el polo complejo emigra hacia el eje real o se extiende hacia la asíntota.

Remitiéndonos a la figura 6-8, si elegimos un punto de prueba y lo movemos en la vecindad misma del polo complejo en lazo abierto en $s = -p_1$, encontramos que la suma de las contribuciones angulares del polo en $s = p_2$ y el cero en $s = -z_1$ se considera sin alteración para el punto

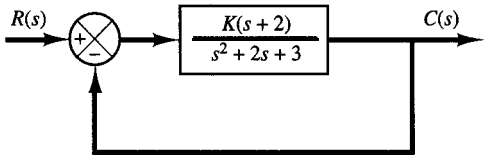


Figura 6–6
Sistema de control.

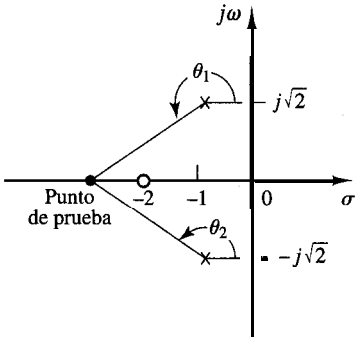


Figura 6-7
Determinación del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real.

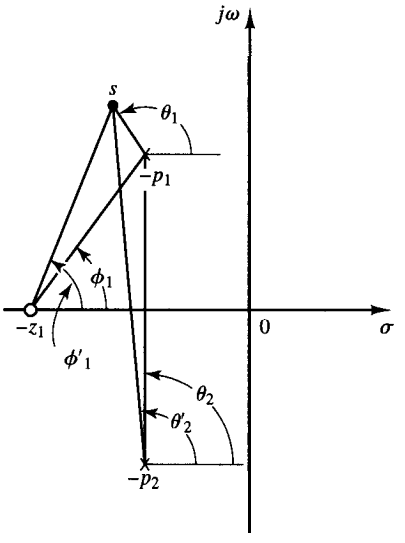


Figura 6-8
Determinación del ángulo de salida.

de prueba. Si el punto de prueba está sobre el lugar geométrico de las raíces, la suma de ϕ_1', $-\theta_1$ y θ_2' debe ser $\pm 180°$ (2k + 1), en donde $k = 0, 1, 2, \ldots$. Por tanto, en este ejemplo,

$$\phi_1' - (\theta_1 + \theta_2') = \pm 180°(2k + 1)$$

o bien

$$\theta_1 = 180° - \theta_2' + \phi_1' = 180° - \theta_2 + \phi_1$$

En este caso, el ángulo de salida es

$$\theta_1 = 180° - \theta_2 + \phi_1 = 180° - 90° + 55° = 145°$$

Dado que el lugar geométrico de las raíces es simétrico con respecto al eje real, el ángulo de salida del polo en $s = -p_2$ es $-145°$.

3. Determine el punto de ingreso. Existe un punto de ingreso en el cual se integran un par de ramificaciones del lugar geométrico conforme K aumenta. Para este problema, el punto de ingreso se encuentra del modo siguiente: dado que,

$$K = -\frac{s^2 + 2s + 3}{s i\text{-}2}$$

tenemos que

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(2s + 2)(s + 2) - (s^2 + 2s + 3)}{(s + 2)^2} = 0$$

lo cual produce

$$s^2 + 4s + 1 = 0$$

o bien

$$s = -3.1320 \quad o \quad s = -0.2680$$

Observe que el punto $s = -3.7320$ está sobre el lugar geométrico de las raíces. Por tanto, se trata de un punto de ingreso real. (Observe que, en el punto $s = -3.7320$ el valor del aumento correspondiente es $K = 5.4641$.) Dado que el punto $s = -0.2680$ no está en el lugar geométrico de las raíces, no puede ser un punto de ingreso. (Para el punto $s = -0.2680$, el valor de ganancia correspondiente es $K = -1.4641$.)

4. Trace una gráfica del lugar geométrico de las raíces, con base en la información obtenida en los pasos anteriores. Para determinar los lugares geométricos de las raíces precisos, deben encontrarse varios puntos mediante prueba y error entre el punto de ingreso y los polos complejos en lazo abierto. (Para facilitar el trazo de la gráfica del lugar geométrico de las raíces, debemos encontrar la dirección en la cual se moverá el punto de prueba sumando mentalmente los cambios de los ángulos de los polos y ceros.) La figura 6-9 muestra una gráfica completa del lugar geométrico de las raíces para el sistema considerado.

El valor de la ganancia K en cualquier punto sobre el lugar geométrico de las raíces se encuentra aplicando la condición de magnitud. Por ejemplo, el valor de K en el cual los polos complejos conjugados en lazo cerrado tienen el factor de amortiguamiento relativo $\zeta = 0.7$ se encuentra ubicando las raíces, como se aprecia en la figura 6-9, y calculando el valor de K del modo siguiente:

$$K = \left.\frac{(s + 1 - j\sqrt{2})(s + 1 + j\sqrt{2})}{s + 2}\right|_{s=-1.67+j1.70} = 1.34$$

Se observa que, en este sistema, el lugar geométrico de las raíces en el plano complejo es parte de un círculo. Dicho lugar geométrico de las raíces circular no ocurre en la mayor parte de los sistemas. Los lugares geométricos de las raíces circulares ocurren en sistemas que contienen dos polos y un cero, dos polos y dos ceros, o un polo y dos ceros. Incluso en tales sistemas, el que ocurran estos lugares geométricos de las raíces circulares depende de la ubicación de los polos y los ceros involucrados.

Para mostrar la ocurrencia en el sistema actual de un lugar geométrico de las raíces circular, necesitamos derivar la ecuación para dicho lugar geométrico. Para el sistema actual, la condición de ángulo es

$$\angle s + 2 - \angle s + 1 - j\sqrt{2} - \angle s + 1 + j\sqrt{2} = \pm 180°(2k + 1)$$

Si se sustituye $s = \sigma + j\omega$ dentro de esta última ecuación, obtenemos

$$\angle \sigma + 2 + j\omega - \angle \sigma + 1 + j\omega - j\sqrt{2} - \sigma + 1 + j\omega + j\sqrt{2} = \pm 180°(2k + 1)$$

la cual se escribe como

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + 2}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega - \sqrt{2}}{\sigma + 1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega + \sqrt{2}}{\sigma + 1}\right) = \pm 180°(2k + 1)$$

o bien

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega - \sqrt{2}}{\sigma + 1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega + \sqrt{2}}{\sigma + 1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + 2}\right) \pm 180°(2k + 1)$$

Tomando las tangentes de ambos miembros de esta última ecuación y usando la relación

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \tag{6–12}$$

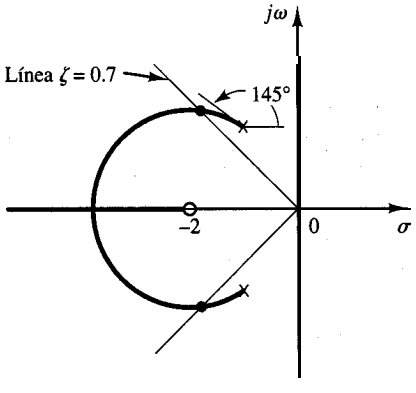


Figura 6-9
Gráfica del lugar geométrico de las raíces.

obtenemos

$$\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}\right)\right]=\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma+2}\right)\pm 180°(2k+1)\right]$$

o bien

$$\frac{\dfrac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1}+\dfrac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}}{1-\left(\dfrac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1}\right)\left(\dfrac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}\right)}=\frac{\dfrac{\omega}{\sigma+2}\pm 0}{1\mp\dfrac{\omega}{\sigma+2}\times 0}$$

que se simplifica a

$$\frac{2\omega(\sigma+1)}{(\sigma+1)^2-(\omega^2-2)}=\frac{\omega}{\sigma+2}$$

o bien

$$\omega[(\sigma+2)^2+\omega^2-3]=0$$

Esta última ecuación es equivalente a

$$\omega=0 \quad \text{o} \quad (\sigma+2)^2+\omega^2=(\sqrt{3})^2$$

Estas dos ecuaciones corresponden a los lugares geométricos de las raíces del sistema actual. Observe que la primera ecuación, $\omega = 0$, corresponde al eje real. El eje real de $s = -2$ a $s = -\infty$ corresponde a un lugar geométrico de las raíces para $K \geq 0$. La parte restante del eje real corresponde a un lugar geométrico de las raíces cuando K es negativo. (En el sistema actual, K es no negativo.) La segunda ecuación para el lugar geométrico de las raíces es una ecuación de un círculo con centro en $\sigma = -2$, $\omega = 0$ y radio igual a $\sqrt{3}$. Esta parte del círculo a la izquierda de los polos complejos conjugados corresponde al lugar geométrico de las raíces para $K \geq 0$. La parte restante del círculo corresponde al lugar geométrico de las raíces cuando K es negativo.

Es importante observar que las ecuaciones que se interpretan con facilidad para el lugar geométrico de las raíces sólo se obtienen para sistemas sencillos. No se recomienda intentar obtener las ecuaciones para los lugares geométricos de las raíces en sistemas complicados que tengan muchos polos y ceros.Tales ecuaciones son muy complicadas y su configuración en el plano complejo es difícil de visualizar.

6-3 RESUMEN DE LAS REGLAS GENERALES PARA CONSTRUIR LOS LUGARES GEOMÉTRICOS DE LAS RAÍCES

Para un sistema complejo en lazo abierto con muchos polos y ceros, puede parecer complicado construir una gráfica del lugar geométrico de las raíces, aunque en realidad no es difícil si se aplican las reglas para construir dicho lugar geométrico. Ubicando los puntos y las asíntotas específicos y calculando los ángulos de salida de los polos complejos y los ángulos de llegada a los ceros complejos, podemos construir la forma general de los lugares geométricos de las raíces sin dificultad.

Algunas de las reglas para construir los lugares geométricos de las raíces se ofrecieron en la sección 6-2. El propósito de esta sección es resumir las reglas generales para construir dichos lugares geométricos del sistema de la figura 6-10. En tanto que el método del lugar geométrico de las raíces se basa esencialmente en una técnica de prueba y error, la cantidad de pruebas requeridas se reduce sustancialmente si aplicamos estas reglas.

Reglas generales para construir los lugares geométricos de las raíces. Ahora resumiremos las reglas y el procedimiento general para construir los lugares geométricos de las raíces del sistema de la figura 6-10.

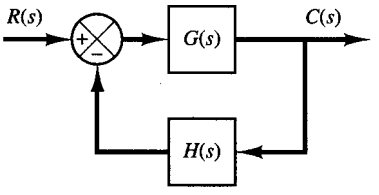


Figura 6–10
Sistema de control.

Primero, obtenga la ecuación característica

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

A continuación, vuelva a ordenar esta ecuación para que el parámetro de interés aparezca como el factor multiplicativo, en la forma

$$1 + \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} = 0 \tag{6-13}$$

En estos análisis, suponemos que el parámetro de interés es la ganancia K, en donde $K > 0$. (Si $K < 0$, lo cual corresponde al caso de realimentación positiva, debe modificarse la condición de ángulo. Véase la sección 6-5.) Sin embargo, observe que el método todavía es aplicable a sistemas con parámetros de interés diferentes a la ganancia.

1. Ubique los polos y ceros de $G(s)H(s)$ en el plano s. Las ramificaciones del lugar geométrico de las raíces empiezan en los polos en lazo abierto y terminan en los ceros (ceros finitos o ceros en infmito) .A partir de la forma factorizada de la función de transferencia en lazo abierto, ubique los polos y los ceros en lazo abierto en el plano s. [Observe que los ceros en lazo abierto son los de $G(s)H(s)$, en tanto que los ceros en lazo cerrado son los de G(s) y los polos de ***H(s)].***

Observe que los lugares geométricos de las raíces son simétricos con respecto al eje real del plano s, debido a que los polos y ceros complejos sólo ocurren en pares conjugados.

Encuentre los puntos inicio y fin de los lugares geométricos de las raíces y localice también el número de lugares geométricos de las raíces separados. Los puntos del lugar geométrico que corresponden a $K = 0$ son los polos en lazo abierto. Esto se aprecia a partir de la condición de magnitud, suponiendo que K tiende a cero, o que

$$\lim_{K \to 0} \left| \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \right| = \lim_{K \to 0} \frac{1}{K} = \infty$$

Esta última ecuación implica que, conforme K disminuye, el valor de s debe tender a uno de los polos en lazo abierto. Por tanto, cada lugar geométrico de las raíces se origina en un polo de la función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$. Conforme K tiende a infinito, cada lugar geométrico tiende al cero de la función de transferencia en lazo abierto o al infinito del plano complejo. Esto se aprecia del modo siguiente: si suponemos que K tiende a infinito en la condición de magnitud, entonces

$$\lim_{K \to \infty} \left| \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \right| = \lim_{K \to \infty} \frac{1}{K} = 0$$

Por tanto, el valor de s debe aproximarse a uno de los ceros finitos en lazo abierto o a un cero en lazo abierto en infinito. [Si se incluyen los ceros en infinito en la cuenta, $G(s)H(s)$ tiene la misma cantidad de ceros que de polos.]

Una gráfica del lugar geométrico de las raíces tendrá tantas ramificaciones como raíces tenga la ecuación característica. Dado que, por lo general, la cantidad de polos en lazo abierto

es mayor que la de ceros, la cantidad de ramificaciones es igual a la de los polos Si la cantidad de polos en lazo cerrado es igual a la cantidad de polos en lazo abierto, la cantidad de ramificaciones individuales del lugar geométrico de las raíces que terminan en los ceros finitos en lazo abierto será igual a la cantidad m de ceros en lazo abierto. Las $n - m$ ramificaciones restantes terminan en infinito ($n - m$ ceros implícitos en infinito) a lo largo de las asíntotas

Si incluimos los polos y los ceros en infinito, la cantidad de polos en lazo abierto es igual a la de ceros en lazo abierto. Por tanto, siempre podemos plantear que los lugares geométricos de las raíces empiezan en los polos de $G(s)H(s)$ y terminan en los ceros de $G(s)H(s)$ conforme K aumenta de cero a infinito, en donde los polos y los ceros incluyen tanto aquellos finitos y en infinitos en el plano s.

2. Determine los lugares geométricos de las raíces sobre el eje real. Los lugares geométricos de las raíces sobre el eje real se determinan mediante los polos y los ceros en lazo abierto que se encuentran sobre él. Los polos y los ceros complejos conjugados de la función de transferencia en lazo abierto no afectan la ubicación de los lugares geométricos de las raíces sobre el eje real, porque la contribución del ángulo de un par de polos o ceros complejos conjugados es 360" sobre el eje real. Cada parte del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real se extiende sobre un rango de un polo o cero a otro polo o cero. Al construir los lugares geométricos sobre el eje real, seleccione un punto en éste. Si la cantidad total de polos y ceros reales a la derecha de este punto de prueba es impar, este punto se encuentra en el lugar geométrico de las raíces El lugar geométrico de las raíces y su forma complementaria alternan segmentos a lo largo del eje real.

3. Determine las asíntotas de los lugares geométricos de las raíces. Si el punto de prueba s se ubica lejos del origen, se considera que no cambia el ángulo de cada cantidad compleja. Entonces, un cero en lazo abierto y un polo en lazo abierto cancelan los efectos del otro. Por tanto, los lugares geométricos de las raíces para valores de s muy grandes deben ser asintóticos para líneas rectas cuyos ángulos (pendientes) se obtengan mediante

$$\text{Ángulos de las asíntotas} = \frac{\pm 180°(2k + 1)}{n - m} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

en donde n = número de polos finitos de $G(s)H(s)$
m = número de ceros finitos de $G(s)H(s)$

Aquí, $k = 0$ corresponde a las asíntotas con el ángulo más pequeño con respecto al eje real. Aunque k supone una cantidad infinita de valores, conforme aumenta, el ángulo se repite a sí mismo y la cantidad de asíntotas distintas es $n - m$.

Todas las asíntotas intersecan el eje real en un punto que se obtiene del modo siguiente: si se expanden el numerador y el denominador de la función de transferencia en lazo abierto, el resultado es

$$G(s)H(s) = \frac{K[s^m + (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)s^{m-1} + \cdots + z_1 z_2 \cdots z_m]}{s^n + (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)s^{n-1} + \cdots + p_1 p_2 \cdots p_n}$$

Si un punto de prueba se localiza muy lejos del origen, entonces, dividiendo el denominador entre el numerador, podemos escribir $G(s)H(s)$ como

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^{n-m} + [(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)]s^{n-m-1} + \cdots}$$

Dado que la ecuación característica es

$$G(s)H(s) = -1$$

puede escribirse como

$$s^{n-m} + [(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)]s^{n-m-1} + \cdots = -K \qquad (6\text{-}14)$$

Para un valor grande de s, la ecuación (6− 14) se aproxima mediante

$$\left[s + \frac{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)}{n - m}\right]^{n-m} = 0$$

Si la abscisa de la intersección de las asíntotas y el eje real se representa mediante $s = \sigma_a$, entonces

$$\sigma_a = -\frac{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)}{n - m} \qquad (6\text{-}15)$$

o bien

$$\sigma_a = \frac{(\text{suma de polos}) - (\text{suma de ceros})}{n - m} \qquad (6\text{-}16)$$

Debido a que todos los polos y ceros complejos ocurren en pares conjugados, σ_a siempre es una cantidad real. Una vez que se encuentra la intersección de las asíntotas y el eje real, es fácil dibujar las asíntotas en el plano complejo.

Es importante señalar que las asíntotas muestran el comportamiento de los lugares geométricos de las raíces para $|s| \gg 1$. Una ramificación del lugar geométrico de las raíces puede encontrarse en un lado de la **asíntota** correspondiente o puede atravesar ésta de un lado al otro.

4. Encuentre los puntos de desprendimiento y de ingreso. Debido a la simetría conjugada de los lugares geométricos de las raíces, los puntos de desprendimiento y de ingreso se encuentran sobre el eje real o bien ocurren en pares complejos conjugados.

Si un lugar geométrico de las raíces se ubica entre dos polos en lazo abierto adyacentes sobre el eje real, existe al menos un punto de desprendimiento entre dichos dos polos. Asimismo, si el lugar geométrico de las raíces está entre dos ceros adyacentes (un cero puede ubicarse en $-\infty$) sobre el eje real, siempre existe al menos un punto de ingreso entre los dos ceros. Si el lugar geométrico de las raíces se ubica entre un polo en lazo abierto y un cero (finito o no finito) sobre el eje real, pueden no existir puntos de desprendimiento o de ingreso, o bien pueden existir ambos.

Suponga que la ecuación característica se obtiene mediante

$$B(s) + \mathrm{KA(s)} = 0$$

Los puntos de desprendimiento y los puntos de ingreso corresponden a las raíces múltiples de la ecuación **característica**. Por tanto, los puntos de desprendimiento y de ingreso se determinan a partir de las raíces de

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{B'(s)A(s) - B(s)A'(s)}{A^2(s)} = 0 \qquad (6\text{-}17)$$

en donde la prima indica una diferenciación con respecto a s. Es importante señalar que los puntos de desprendimiento y los puntos de ingreso deben ser las raíces de la ecuación (6 −17), aunque no todas las raíces de la ecuación (6 − 17) son puntos de desprendimiento o de ingreso. Si una **raíz** real de la ecuación (6-17) se encuentra en la parte del eje real del lugar geométrico de las raíces, es un punto de desprendimiento o de ingreso real. Si una raíz real de la ecuación (6-17) no está en la parte del eje real del lugar geométrico, esta **raíz** no corresponde a **un** punto de desprendimiento ni a un punto de ingreso. Si dos raíces $s = s_1$ y $s = -s_1$ de la

ecuación (6-17) son un par complejo conjugado, y si no es seguro que están en los lugares geométricos de las raíces, es necesario verificar el valor de K correspondiente. Si el valor de K que corresponde a la raíz $s = s_1$ de $dK/ds = 0$ es positivo, el punto $s = s_1$ es un punto de desprendimiento o de ingreso real. (Dado que se supone que K es no negativo, si es negativo el valor obtenido de K, el punto $s = s_1$ no es de desprendimiento ni de ingreso.)

5. Determine el ángulo de salida (ángulo de llegada) de un ***lugar geométrico de las raíces a partir de un polo complejo (un cero complejo).*** Para trazar los lugares geométricos de las raíces con una precisión razonable, debemos encontrar las direcciones de los lugares geométricos de las raíces cercanas a los polos y ceros complejos. Si se selecciona un punto de prueba y se mueve en la cercanía precisa del polo complejo (o del cero complejo), se considera que no cambia la suma de las contribuciones angulares de todos los otros polos y ceros. Por tanto, el ángulo de llegada (o ángulo de salida) del lugar geométrico de las raíces de un polo complejo (o de un cero complejo), se encuentra restando a 180° la suma de todos los ángulos de vectores, desde todos los otros polos y ceros hasta el polo complejo (o cero complejo) en cuestión, incluyendo los signos apropiados.

Ángulo de salida desde un polo complejo = 180”
− (suma de los ángulos de vectores hacia el polo complejo en cuestión desde otros polos)
+ (suma de los ángulos de vectores hacia el polo complejo en cuestión desde los ceros)

Ángulo de llegada a un cero complejo = 180”
− (suma de los ángulos de vectores hacia el cero complejo en cuestión desde otro cero)
+ (suma de los ángulos de vectores hacia el cero complejo en cuestión desde los polos)

El ángulo de salida aparece en la figura 6-11.

6. Encuentre los puntos en los que los lugares geométricos ***de las raíces cruzan el eje imaginario.*** Los puntos en donde los lugares geométricos de las raíces intersecan el eje $j\omega$ se encuentran con facilidad por medio de: (a) el criterio de estabilidad de Routh, o (b) suponiendo que s = jo en la ecuación característica, igualando con cero la parte real y la parte imaginaria y despejando ω y K. En este caso, los valores encontrados de ω representan las frecuencias en las cuales los lugares geométricos de las raíces cruzan el eje imaginario. El valor de K que corresponde a cada frecuencia de cruce produce la ganancia en el punto de cruce.

7. Tomando una serie de puntos de prueba en la vecindad amplia del origen del plano s, trace los lugares geométricos. Determine los lugares geométricos de las raíces en la vecindad amplia del eje ω y el origen. La parte más importante de los lugares geométricos de las raíces no está sobre el eje real ni en las asíntotas, sino en la parte de la vecindad amplia del

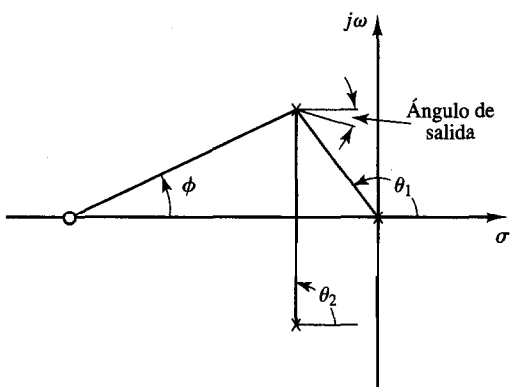


Figura 6–11
Construcción del lugar geométrico de las raíces. [Ángulo de salida = 180” − (θ1 + θ2) + ϕ.]

eje jo y el origen. La forma de los lugares geométricos de las raíces en esta región importante del plano s debe obtenerse con suficiente precisión.

8. Determine los polos en lazo cerrado. Un punto específico de cada ramificación del lugar geométrico de las raíces será un polo en lazo cerrado si el valor de K en dicho punto satisface la condición de magnitud. Por otra parte, la condición de magnitud nos permite determinar el valor de la ganancia en K en cualquier ubicación de las raíces específica sobre el lugar geométrico. (Si es necesario, se establece una graduación de los lugares geométricos en términos de K. Los lugares geométricos de las raíces son continuos con K.)

El valor de K que corresponde a cualquier punto s sobre el lugar geométrico de las raíces se obtiene a partir de la condición de magnitud, o bien

$$K = \frac{\text{producto de las longitudes entre el punto } s \text{ y los polos}}{\text{producto de las longitudes entre el punto } s \text{ y los ceros}}$$

Este valor puede calcularse en forma gráfica o analítica.

Si en este problema se da la ganancia K de la función de transferencia en lazo abierto, entonces, aplicando la condición de magnitud encontramos las ubicaciones correctas de los polos en lazo cerrado para un K determinado de cada ramificación de los lugares geométricos de las raíces, mediante un enfoque de prueba y error o mediante MATLAB, lo cual se presentará en la sección 6-4.

Comentarios acerca de las gráficas del lugar geométrico de las raíces. Se observa que la ecuación característica del sistema cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s)H(s) = \frac{K(s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \qquad (n \geq m)$$

es una ecuación algebraica en s de n-ésimo grado. Si el orden del numerador de $G(s)H(s)$ es menor que el del denominador, en dos o más (lo que significa que hay dos o más ceros en infinito), el coeficiente a_1 es la suma negativa de las raíces de la ecuación y es independiente de K. En este caso, si alguna de las raíces se mueve en el lugar geométrico de las raíces hacia la izquierda, conforme K aumenta, las otras raíces deben moverse hacia la derecha conforme aumenta K. Esta información es útil para encontrar la forma general de los lugares geométricos de las raíces.

También se observa que un cambio ligero en el patrón de los polos y ceros provoca cambios significativos en las gráficas del lugar geométrico de las raíces. La figura 6–12 representa el hecho de que un cambio ligero en la ubicación de un cero o polo hará muy diferente la gráfica del lugar geométrico de las raíces.

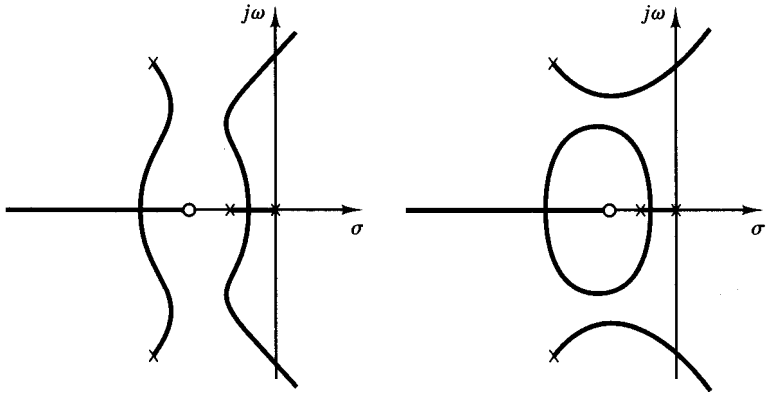


Figura 6–12
Gráfica del lugar geométrico de las raíces.

Cancelación de los polos G(s) con los ceros de $H(s)$. Es importante señalar que si el denominador de G(s) y el numerador de $H(s)$ contienen factores comunes, los polos y ceros en lazo abierto correspondientes se cancelarán unos a otros, lo cual reducirá el grado de la ecuación característica en uno o más. Por ejemplo, considere el sistema de la figura 6−13(a). (Este sistema tiene una realimentación de velocidad.) Si se modifica el diagrama de bloques de la figura 6−13(a) para obtener el de la figura 6−13(b) se aprecia con claridad que G(s) y $H(s)$ tienen un factor común $s + 1$. La función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$ es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s+1)(s+2) + K(s+1)}$$

La ecuación característica es

$$[s(s+2) + K](s+1) = 0$$

Sin embargo, debido a la cancelación de los términos $(s + 1)$ que aparecen en G(s) y H(s), tenemos que

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+1)}{s(s+1)(s+2)} = \frac{s(s+2) + K}{s(s+2)}$$

La ecuación característica reducida es

$$s(s+2) + K = 0$$

La gráfica del lugar geométrico de las raíces de $G(s)H(s)$ no muestra todas las raíces de la ecuación característica; sólo las raíces de la ecuación reducida.

Para obtener el conjunto completo de polos en lazo cerrado, debemos agregar el polo cancelado de $G(s)H(s)$ para los polos en lazo cerrado obtenidos en la gráfica del lugar geo-

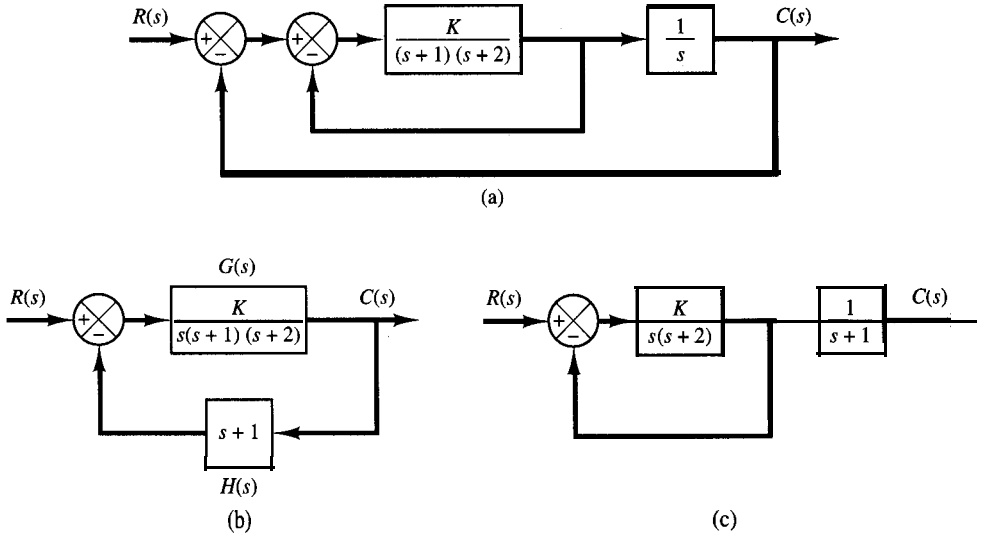
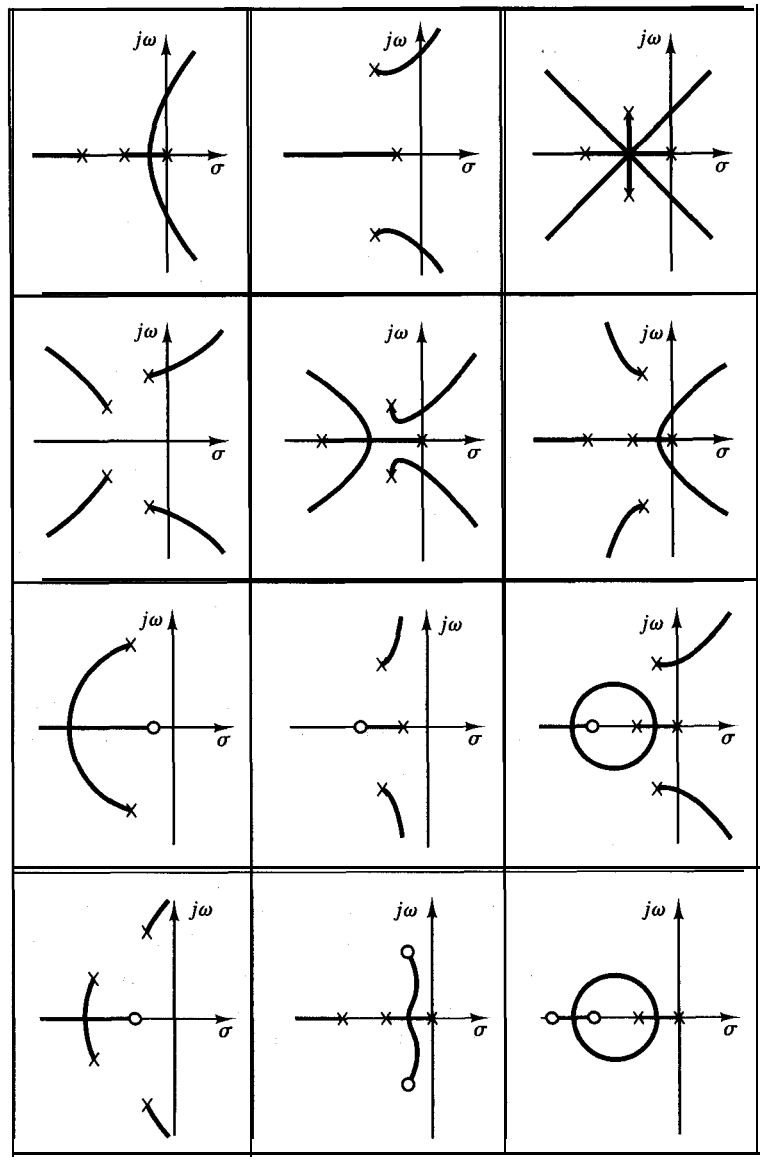


Figura 6-13
(a) Sistema de control con realimentación de velocidad; (b) y (c) diagramas de bloques modificados.

métrico de las raíces de $G(s)H(s)$. No debe olvidarse que el polo cancelado de $G(s)H(s)$ es un polo en lazo cerrado del sistema, como se observa en la figura 6−13(c).

Configuraciones comunes de polos y ceros y los correspondientes lugares geométricos de las raíces. Para concluir esta sección, mostramos la tabla 6-1, que contiene varias configuraciones de polos y ceros en lazo abierto y los correspondientes lugares geométricos de las raíces. El patrón de los lugares geométricos de las raíces sólo depende de la separación relativa de los polos y ceros en lazo abierto. Si el número de polos en lazo abierto excede el número de ceros finitos en tres o más, existe un valor de la ganancia K más allá del cual los lugares geométricos de las raíces entran en el semiplano derecho del plano s y, por tanto, el sistema puede volverse inestable. Un sistema estable debe tener todos sus polos en lazo cerrado en el semiplano izquierdo del plano s.

Tabla 6-1 Configuraciones de polos y ceros en lazo abierto y los correspondientes lugares geométricos de las raíces



Observe que, una vez que hemos adquirido cierta experiencia con el método, nos es fácil evaluar los cambios en los lugares geométricos de las raíces debidos a las modificaciones en el número y ubicación de los polos y ceros en lazo abierto, visualizando las gráficas de los lugares geométrico de las raíces que se producen de las diversas configuraciones de polos y ceros.

Resumen. A partir de los análisis anteriores, es evidente que se puede trazar un diagrama razonablemente preciso del lugar geométrico de las raíces para un sistema determinado, siguiendo reglas simples (Se sugiere al lector que estudie los diversos diagramas de los lugares geométricos de las raíces que aparecen en los problemas resueltos al final del capítulo.) En las etapas de diseño preliminar, no necesitamos las ubicaciones precisas de los polos en lazo cerrado. Con frecuencia sólo se necesitan sus ubicaciones aproximadas para hacer una estimación del desempeño del sistema. Por tanto, es importante que el diseñador tenga la capacidad de trazar con rapidez los lugares geométricos de las raíces para un sistema determinado.

6-4 GRÁFICAS DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES CON MATLAB

En esta sección presentaremos el enfoque de MATLAB para generar las gráficas del lugar geométrico de las raíces.

Gráfica de los lugares geométricos de las raíces con MATLAB. Al graficar los lugares geométricos de las raíces con MATLAB, abordamos la ecuación del sistema obtenida en la forma de la ecuación (6 – 13), que se escribe como

$$1 + K\frac{\text{num}}{\text{den}} = 0$$

en donde num es el polinomio del numerador y den es el polinomio del denominador. Es decir,

$$\begin{aligned}\text{num} &= (s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)\\ &= s^m + (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)s^{m-1} + \cdots + z_1 z_2 \cdots z_m\\ \text{den} &= (s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)\\ &= s^n + (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)s^{n-1} + \cdots + p_1 p_2 \cdots p_n\end{aligned}$$

Observe que ambos vectores, num y den, deben escribirse en potencias descendentes de s.

Un comando de MATLAB que se usa con frecuencia para graficar los lugares geométricos de las raíces es

```
rlocus(num,den)
```

Con este comando, se dibuja en la pantalla la gráfica del lugar geométrico de las raíces. El vector de ganancias K se determina en forma automática. El comando rlocus funciona para sistemas tanto en tiempo continuo como discreto.

Para los sistemas definidos en el espacio de estados, rlocus(A,B,C,D) grafica el lugar geométrico de las raíces del sistema con el vector de ganancias automáticamente determinado.

Observe que los comandos

```
rlocus(num,den,K)      y      rlocus(A,B,C,D,K)
```

Usan el vector de ganancias K proporcionado por el usuario. (El vector K contiene todos los valores de ganancias para los cuales se van a calcular los polos en lazo cerrado.)

Si se invoca con los argumentos del lado izquierdo

```
[r,K] = rlocus(num,den)
[r,K] = rlocus(num,den,K)
[r,K] = rlocus(A,B,C,D)
[r,K] = rlocus(A,B,C,D,K)
```

la pantalla mostrará la matriz r y el vector de ganancias K. (r tiene una longitud de K renglones y una longitud den de − 1 columnas que contienen las ubicaciones de las raíces complejas. Cada renglón de la matriz corresponde a una ganancia a partir del vector K.) El comando plot

```
plot(r,'-')
```

grafica los lugares geométricos de las raíces.

Si se quiere graficar los lugares geométricos de las raíces con las marcas 'o' o bien 'x', es necesario usar el comando siguiente:

```
r = rlocus(num,den)
plot(r,'o')      0      plot(r,'x')
```

Es instructivo graficar los lugares geométricos de las raíces mediante las marcas 'o' o bien 'x', dado que cada polo en lazo cerrado calculado se exhibe en forma gráfica; en alguna parte de los lugares geométricos de las raíces estas marcas están densamente ubicadas y en otra parte aparecen separadas. MATLAB produce su propio conjunto de valores de ganancias que se usan para obtener una gráfica del lugar geométrico de las raíces. Lo consigue mediante una rutina interna de adaptación del tamaño de paso. Asimismo, MATLAB usa la característica automática de fijar la escala del eje del comando plot.

Por último, observe que, dado que el vector de ganancias se determina en forma automática, las gráficas del lugar geométrico de las raíces de

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + 1)}{s(s + 2)(s + 3)}$$

$$G(s)H(s) = \frac{10K(s + 1)}{s(s + 2)(s + 3)}$$

$$G(s)H(s) = \frac{200K(s + 1)}{s(s + 2)(s + 3)}$$

son todas iguales. El conjunto de num y den del sistema es igual para los tres sistemas. Los num y den son

```
num = [0   0   1   1]
den = [1   5   6   0]
```

EJEMPLO 6-3 Considere el sistema de control de la figura 6-14. Para graficar el diagrama del lugar geométrico de las raíces con MATLAB, es necesario encontrar los polinomios del numerador y el denominador en lazo abierto.

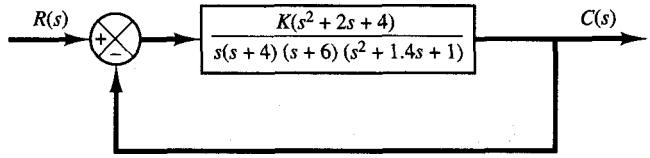


Figura 6–14
Sistema de control.

Para este problema, el numerador está dado como polinomio en s. Sin embargo, el denominador se obtiene como un producto de los términos de primer y segundo orden, lo cual implica que debemos multiplicar estos términos para obtener un polinomio en s. La multiplicación de estos términos se efectúa con facilidad mediante el ***comando de convolución,*** que aparece a continuación.

Defina

$a = s(s + 4) = s^2 + 4s$: `a = [1 4 01`
$b = s + 6$: `b = [1 6]`
$c = s^2 + 1.4s + 1$: `c = [1 1.4 1]`

Después, use el comando siguiente:

```
d = conv(a,b);      e = conv(c,d)
```

[Observe que `conv(a,b)` proporciona el producto de dos polinomios a y `b.]` Observe la siguiente salida de computadora:

```
a = II 4 01;
b = [1 61;
c = [1  1.4  1];
d = conv(a,b)

d =

    1  10  24  0

e = conv(c,d)

e =

    1.0000  11.4000  39.0000  43.6000  24.0000  0
```

Por tanto, el polinomio del denominador es

```
den = [1 ll.4 39 43.6 24 0]
```

Para encontrar los ceros en lazo abierto de la función de transferencia determinada, usamos el siguiente comando `roots`:

```
p = [1 2 41
r = roots(p)
```

A continuación se muestra el comando y la salida de la computadora.

```
p = [1 2 4];
r = roots(p)

r =

  -1.0000 + 1.7321i
  -1.0000 - 1.7321i
```

Asimismo, para encontrar los polos complejos conjugados en lazo abierto (las raíces de $s^2 + 1.4s + 1 = 0$), introducimos el comando `roots` del modo siguiente:

```
q = roots(c)

q =

   -0.7000 + 0.7141i
   -0.7000 - 0.7141i
```

Por tanto, el sistema tiene los siguientes polos y ceros en lazo abierto:

Ceros en lazo abierto: $s = -1 + j1.7321$, $s = -1 - j1.7321$
Polos en lazo abierto: $s = -0.7 + j0.7141$, $s = -0.7 - j0.7141$
$s = 0$, $s = -4$, $s = -6$

El programa MATLAB 6-1 graficará el diagrama del lugar geométrico de las raíces para este sistema. La gráfica aparece en la figura 6-15.

Programa MATLAB 6-1

```
% ---------- Gráfica del lugar geométrico de las raíces ----------

num = [0  0  0  1  2  4];
den = [1  11.4  39  43.6  24  0];
rlocus(num,den)

Warning: Divide by zero
v = [-10  10  -10  10]; axis(v)
grid
title('Gráfica del lugar geométrico de las raíces de G(s) = K(s^2 + 2s + 4)/[s(s + 4)
(s + 6)(s^2 + 1.4s + 1)]')
```

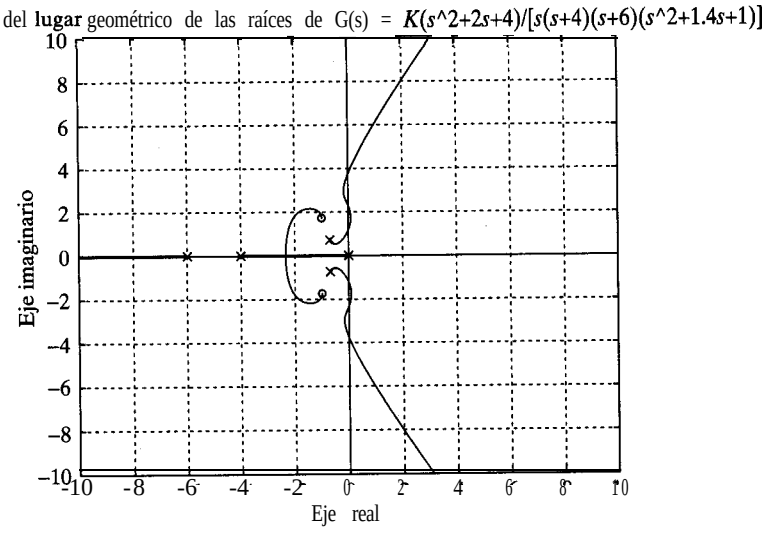


Figura 6–15
Gráfica del lugar geométrico de las raíces.

EJEMPLO 6-4 Considere el sistema de la figura 6-16, en el cual la función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$ es

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + 0.2)}{s^2(s + 3.6)}$$

El cero en lazo abierto está en $s = -0.2$ y los polos en lazo abierto están en $s = 0$, $s = 0$ y $s = -3.6$.

El programa MATLAB 6-2 genera una gráfica del lugar geométrico de las raíces. La gráfica del lugar geométrico de las raíces resultante aparece en la figura 6-17.

Programa MATLAB 6–2

```
% ---------- Gráfica del lugar geométrico de las raíces ----------

num = [0   0   1   0.2];
den = [1   3.6   0   0];
rlocus(num,den)
v = [−4   2   −4   4]; axis(v)
grid
title('Gráfica del lugar geométrico de las raíces
de G(s) = K(s + 0.2)/[s^2(s + 3.6)]')
```

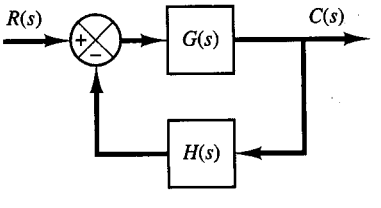


Figura 6–16
Sistema de control.

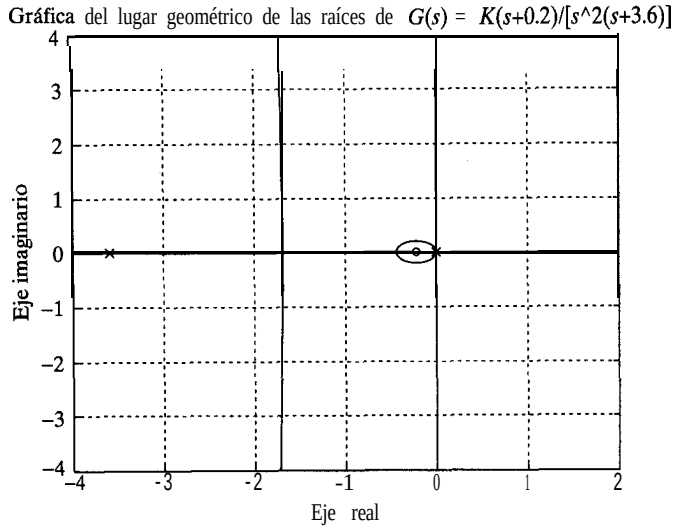


Figura 6–17
Gráfica del lugar geométrico de las raíces.

EJEMPLO 6-5 Considere el sistema de la figura 6-18. Grafique los lugares geométricos de las raíces con una razón de aspecto cuadrada para que una línea con una pendiente de 1 sea una línea realmente de 4.5".

A fin de establecer la región de la gráfica en la pantalla para que sea cuadrada, introduzca el comando axis('square'). Con este comando, una línea con una pendiente de 1 estará realmente 45°, y no inclinada por la forma irregular de la pantalla. (Es importante señalar que una gráfica de copia permanente puede ser o no una región cuadrada, dependiendo de la impresora.)

El programa MATLAB 6-3 produce una gráfica del lugar geométrico de las raíces en una región cuadrada. La gráfica resultante aparece en la figura 6-19.

Programa MATLAB 6-3

```
% ---------- Gráfica del lugar geométrico de las raíces ----------

num = [0   0   0   1   1];
den = [1   3   12   -16   0];
rlocus(num,den)
v = [-6   6   -6   6]; axis(v);axis('square')
grid
title('Gráfica del lugar geométrico de las raíces de G(s) = K(s + 1)/
[s (s - 1)(s^2 + 4s + 16)]')
```

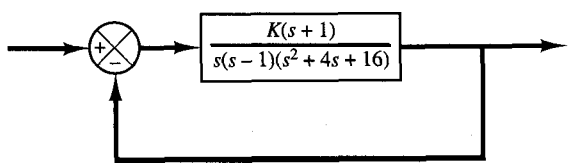


Figura 6–18
Sistema de control.

Gráfica del lugar geométrico de las raíces de $G(s) = K(s+1)/[s(s-1)(s^2+4s+16)]$

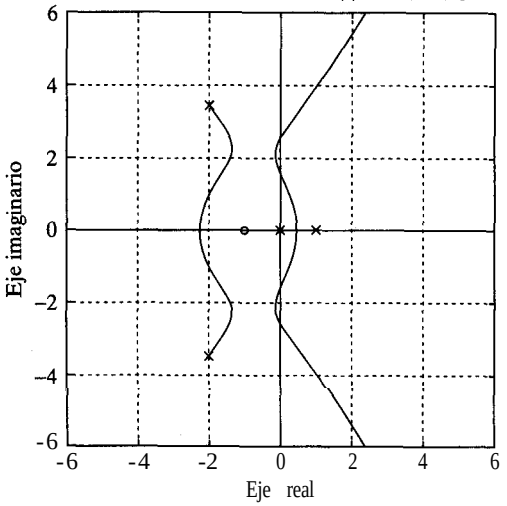


Figura 6-19
Gráfica del lugar geométrico de las raíces.

EJEMPLO 6-6 Considere el sistema cuya función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$ es

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s + 0.5)(s^2 + 0.6s + 10)}$$

$$= \frac{K}{s^4 + 1.1s^3 + 10.3s^2 + 5s}$$

No hay ceros en lazo abierto. Los polos en lazo abierto se ubican en $s = -0.3 + j3.1480$, $s = -0.3 - j3.1480$, $s = -0.5$ y $s = 0$.

Si introducimos en la computadora el programa MATLAB 6-4, obtenemos la gráfica del lugar geométrico de las raíces de la figura 6-20.

Programa MATLAB 6-4

```
% ---------- Gráfica del lugar geométrico de las raíces ----------
num = [0  0  0  0  1];
den = [1  1.1  10.3  5  0];
rlocus(num,den)
grid
title('Gráfica del lugar geométrico de las raíces de G(s) = K/[s
(s + 0.5)(s^2 + 0.6s + 10)]')
```

Observe que, en las regiones cerca de $x = -0.3, y = 2.3$ y $x = -0.3, y = -2.3$, dos lugares geométricos tienden uno al otro. Podemos preguntarnos si estas dos ramificaciones deben tocarse o no. Para explorar esta situación, graficamos los lugares geométricos de las raíces mediante el comando

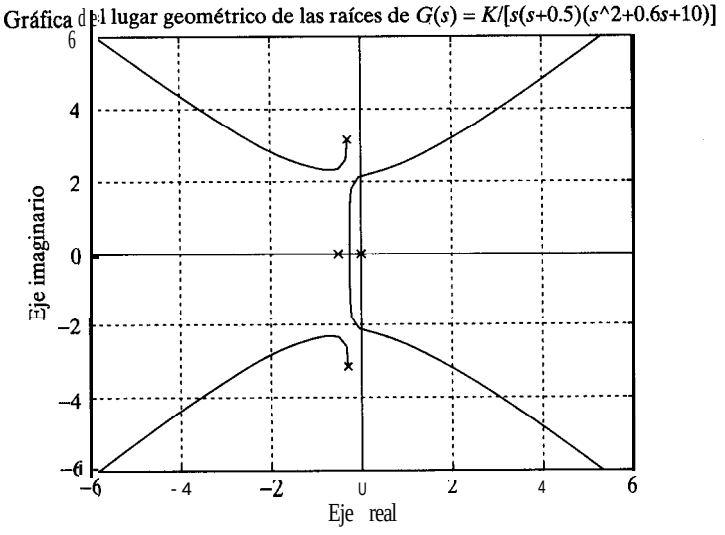


Figura 6–20
Gráfica del lugar geométrico de las raíces.

```
r = rlocus(num,den)
plot(r,'o')
```

como se aprecia en el programa MATLAB 6-5. La figura 6-21 muestra la gráfica resultante.

Programa MATLAB 6–5

```
% ---------- Gráfica del lugar geométrico de las raíces ----------

num = [0  0  0  0  1];
den = [1  1.1  10.3  5  0];
r = rlocus(num,den);
plot(r,'or')
v = [−6  6  −6  6]; axis(v)
grid
title('Gráfica del lugar geométrico de las raíces de G(s) = K/[s
(s + 0.5)(s^2 + 0.6s + 10)]')
xlabel('Eje real')
ylabel('Eje imaginario')

% ***** Observe que el comando 'plot(r,'or')' produce círculos
% pequeños en la gráfica de la pantalla en color rojo *****
```

Dado que no hay puntos calculados cerca de $(-0.3, 2.3)$ y (-0.3, -2.3), es necesario ajustar los pasos en la ganancia K. Mediante un enfoque de prueba y error, encontramos que la región específica de interés es $20 \leq K \leq 30$. Introduciendo el programa MATLAB 6-6, obtenemos la gráfica del lugar geométrico de las raíces de la figura 6-22. A partir de esta gráfica, es evidente que las dos ramificaciones que se aproximan en la mitad superior del plano (o en la mitad inferior del plano) no se tocan.

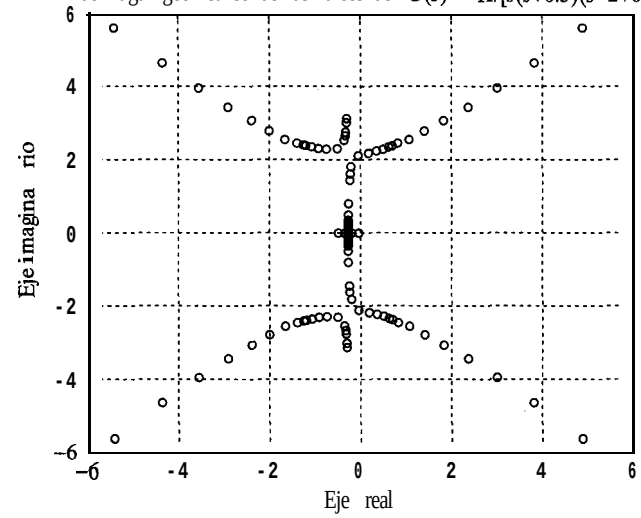


Figura 6–21
Gráfica del lugar geométrico de las raíces.

```
Programa MATLAB 6–6

% -------- Gráfica del lugar geométrico de las raíces --------

num = [0   0   0   0   1];
den = [1   1.1   10.3   5   0];
K1 = 0:0.2:20;
K2 = 20:0.1:30;
K3 = 30:5:1000;
K = [K1   K2   K3];
r = rlocus(num,den,K);
plot(r,'ob')
v = [-4   4   -4   4]; axis(v)
grid
title('Gráfica del lugar geométrico de las raíces de G(s) = K/[s
(s + 0.5)(s^2 + 0.6s + 10)]')
xlabel('Eje real')
ylabel('Eje imaginario')

% ***** Observe que el comando 'plot(r,'ob')' produce círculos
% pequeños en la gráfica de la pantalla en color azul *****
```

EJEMPLO 6-7 Considere el sistema de la figura 6-23. Las ecuaciones del sistema son

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = Cx + Du$$

$$u = r - y$$

En este problema de ejemplo obtendremos el diagrama del lugar geométrico de las raíces del sistema definido en el espacio de estados. Por ejemplo, supongamos que las matrices, A, B, C y D, se obtienen mediante

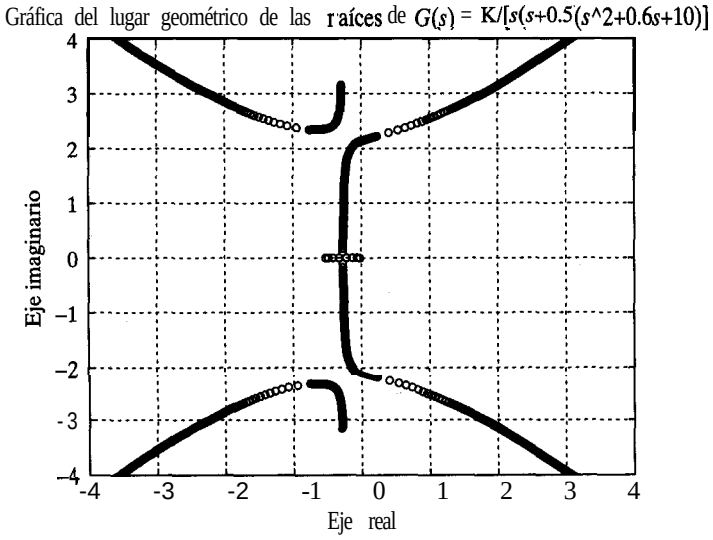


Figura 6-22
Gráfica del lugar geométrico de las raíces.

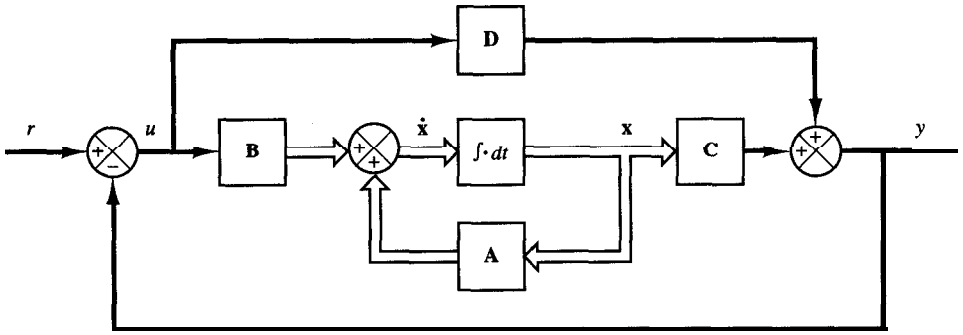


Figura 6-23
Sistema de control en lazo cerrado.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -160 & -56 & -14 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix} \qquad (6\text{-}18)$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0], \qquad \mathbf{D} = [0]$$

La gráfica del lugar geométrico de las raíces para este sistema se obtiene mediante el siguiente comando de MATLAB:

```
rlocus(A,B,C,D)
```

Este comando producirá la misma gráfica del lugar geométrico de las raíces que se obtiene mediante el comando `rlocus(num,den)`, en donde num y `den` se obtienen de

```
[num,den] = ss2tf(A,B,C,D)
```

del modo siguiente:

```
num = [0   0   1   0]
den = [1   14   56   160]
```

El programa **MATLAB** 6-7 contiene un programa que generará la gráfica del lugar geométrico de las raíces de la figura 6-24.

Programa MATLAB 6–7

```
% ------- Gráfica del lugar geométrico de las raíces -------

% ***** Gráfica del lugar geométrico de las raíces del sistema
definido en el espacio de estados *****

% ***** Introduzca las matrices A, B, C, y D *****

A = [0   1   0;0   0   1;-160   -56   -14];
B = [0;1;-14];
C = [1   0   0];
D = [0];

% ***** Introduzca en la computadora el comando
rlocus(A,B,C,D) *****

rlocus(A,B,C,D)
grid
title('Gráfica del lugar geométrico de las raíces del sistema
definido en el espacio de estados')
```

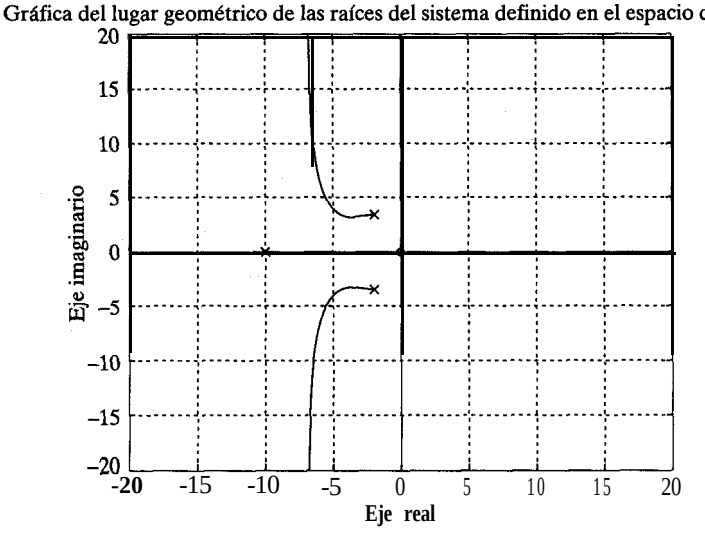


Figura 6-24
Gráfica del lugar geométrico de las raíces del sistema definido en el espacio de estados, en donde A, B, C y D se obtuvieron mediante la ecuación (6-18).

6 - 5 CASOS ESPECIALES

En esta sección consideraremos dos casos especiales. Uno es aquel en el cual la ganancia K no aparece como un factor multiplicativo, y en el otro el sistema en lazo cerrado es un sistema con realimentación positiva en lugar de un sistema con realimentación negativa.

Construcción de los lugares geométricos de las raíces cuando un parámetro variable no aparece como un factor multiplicativo. En algunos casos, el parámetro variable K no aparece como un factor multiplicativo de $G(s)H(s)$. En tales casos es posible volver a escribir la ecuación característica de modo que el parámetro de la variable K aparezca como un factor multiplicativo de $G(s)H(s)$. El ejemplo 6-8 ilustra cómo proceder para ello.

EJEMPLO 6-8 Considere el sistema de la figura 6-25. Dibuje un diagrama del lugar geométrico de las raíces. A continuación determine el valor de k de modo que el factor de amortiguamiento relativo de los polos dominantes en lazo cerrado sea 0.4.

Aquí el sistema contiene una realimentación de velocidad. La función de transferencia en lazo abierto es

$$\text{Función de transferencia en lazo abierto} = \frac{20}{s(s+1)(s+4) + 20ks}$$

Observe que la variable ajustable k no aparece como un factor multiplicativo. La ecuación característica para el sistema es

$$s^3 + 5s^2 + 4s + 20 + 20ks = 0 \tag{6-19}$$

Defina

$$20k = K$$

Por tanto, la ecuación (6-19) se convierte en

$$s^3 + 5s^2 + 4s + Ks + 20 = 0 \tag{6-20}$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación (6-20) entre la suma de los términos que no contienen K, obtenemos

$$1 + \frac{Ks}{s^3 + 5s^2 + 4s + 20} = 0$$

o bien

$$1 + \frac{Ks}{(s + j2)(s - j2)(s + 5)} = 0 \tag{6-21}$$

En este punto la ecuación (6-21) tiene la forma de la ecuación (6-5).

Ahora trazaremos los lugares geométricos de las raíces del sistema dado por la ecuación (6-21). Observe que los polos en lazo abierto se ubican en $s = j2, s = -j2, s = -5$, y que el cero en lazo abierto se ubica en $s = 0$. El lugar geométrico de las raíces existe sobre el eje real entre 0 y -5. Dado que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{Ks}{(s + j2)(s - j2)(s + 5)} = \lim_{s\to\infty} \frac{K}{s^2}$$

tenemos que

$$\text{Ángulo de la asíntota} = \frac{\pm 180°(2k + 1)}{2} = \pm 90°$$

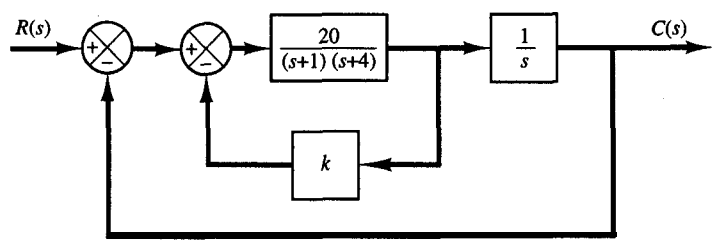


Figura 6-25
Sistema de control.

La intersección de las asíntotas con el eje real se encuentra a partir de

$$\lim_{s\to\infty} \frac{KS}{s^3 + 5s^2 + 4s + 20} = \lim_{s\to\infty} \frac{K}{s^2 + 5s + \ldots} = \lim_{s\to\infty} \frac{K}{(s + 2.5)^2}$$

como

$$\sigma_a = -2.5$$

El ángulo de salida (ángulo θ) a partir del polo en $s = j2$ se obtiene del modo siguiente:

$$\theta = 180° - 90° - 21.8° + 90° = 158.2°$$

Por tanto, el ángulo de salida del polos = $j2$ es 158.2°. La figura 6-26 muestra una gráfica del lugar geométrico de las raíces para el sistema.

Observe que los polos en lazo cerrado con $\zeta = 0.4$ deben encontrarse sobre las líneas rectas que pasan a través del origen y forman los ángulos de $\pm 66.42°$ con el eje real negativo. En este caso, hay dos intersecciones de la ramificación del lugar geométrico de las raíces del semiplano superior del plano s y la línea recta del ángulo 66.42°. Por tanto, dos valores de K producirán el factor de amortiguamiento relativo ζ de los polos en lazo cerrado igual a 0.4. En el punto P, el valor de K es

$$K = \left| \frac{(s + j2)(s - j2)(s + 5)}{s} \right|_{s=-1.0490+j2.4065} = 8.9801$$

Por tal razón

$$k = \frac{K}{20} = 0.4490 \quad \text{en el punto } P$$

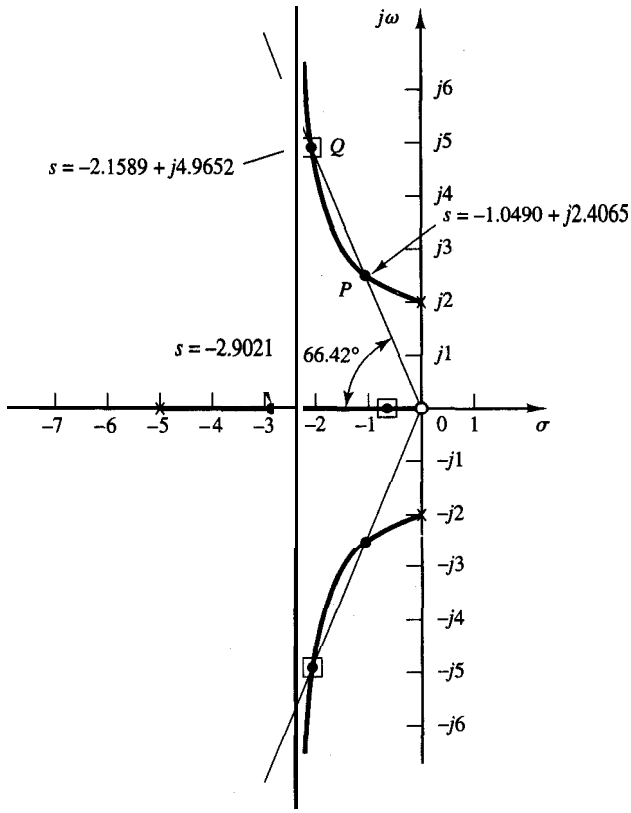


Figura 6–26
Gráfica del lugar geométrico de las raíces para el sistema de la figura 6-25.

En el punto Q, el valor de K es

$$K = \left| \frac{(s + j2)(s - j2)(s + 5)}{s} \right|_{s=-2.1589+j4.9652} = 28.260$$

Por tanto

$$k = \frac{K}{20} = 1.4130 \quad \text{en el punto Q}$$

Así, tenemos dos soluciones para este problema. Para $K = 0.4490$, los tres polos en lazo cerrado se ubican en

$$s = -1.0490 + j2.4065, \quad s = -1.0490 - j2.4065, \quad s = -2.9021$$

para $k = 1.4130$, los tres polos en lazo cerrado se localizan en

$$s = -2.1589 + j4.9652, \quad s = -2.1589 - j4.9652, \quad s = -0.6823$$

Es importante señalar que el cero del origen es en lazo abierto, y no en lazo cerrado. Es decir evidente, debido a que el sistema original de la figura 6-25 no tiene un cero en lazo cerrado, dado que

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{20}{s(s + 1)(s + 4) + 20(1 + ks)}$$

El cero en lazo abierto en $s = 0$ se introdujo en el proceso de modificar la ecuación característica de modo que la variable ajustable $K = 20k$ apareciera como un factor multiplicativo.

Obtuvimos dos valores diferentes de k para satisfacer el requisito de que el factor de amortiguamiento relativo de los polos dominantes en lazo cerrado fuera igual a 0.4. La función de transferencia en lazo cerrado con $K = 0.4490$ se obtiene mediante

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{20}{s^3 + 5s^2 + 12.98s + 20}$$

$$= \frac{20}{(s + 1.0490 + j2.4065)(s + 1.0490 - j2.4065)(s + 2.9021)}$$

La función de transferencia en lazo cerrado con $k = 1.4130$ se obtiene mediante

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{20}{s^3 + 5s^2 + 32.26s + 20}$$

$$= \frac{20}{(s + 2.1589 + j4.9652)(s + 2.1589 - j4.9652)(s + 0.6823)}$$

Observe que el sistema con $k = 0.4490$ tiene un par de polos dominantes complejos conjugados en lazo cerrado, en tanto que en el sistema con $k = 1.4130$ es el polo dominante en lazo cerrado real en $s = -0.6823$ y no son los polos dominantes complejos conjugados en lazo cerrado. En este caso, la característica de respuesta se determina principalmente mediante el polo real en lazo cerrado.

Comparemos las respuestas escalón unitario de ambos sistemas. El programa MATLAB 6-8 se usa para graficar las curvas de respuesta escalón unitario en un diagrama. Las curvas de respuesta escalón unitario resultantes $[c_1(t)$ para $k = 0.4490$ y $c_2(t)$ para $k = 1.41301$ aparecen en la figura 6-27.

En el figura 6-27 observamos que es oscilatoria la respuesta del sistema con $k = 0.4490$. (El efecto del polo en lazo cerrado en $s = -2.9021$ en la respuesta escalón unitario es pequeño.) Para el sistema con $k = 1.4130$, las oscilaciones producidas por los polos en lazo cerrado en $s = -2.1589 \pm j4.9652$ se amortiguan mucho más rápido que una respuesta puramente exponencial, debido al polo en lazo cerrado en $s = -0.6823$.

```
Programa MATLAB 6–8

% -------- Respuesta escalón unitario ---------

% ***** Introduzca los numeradores y los denominadores del sis-
% tema con k = 0.4490 and k = 1.4130, respectivamente. *****

num1 = [0   0   0   20];
den1 = [1   5   12.98   20];
num2 = [0   0   0   20];
den2 = [1   5   32.26   20];
t = 0:0.1:10;
[c1,x1,t] = step(num1,den1,t);
[c2,x2,t] = step(num2,den2,t);
plot(t,c1,t,c2)
text(2.5,1.12,'k = 0.4490')
text(3.7,0.85,'k = 1.4130')
grid
title('Respuestas escalón unitario de dos sistemas')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salidas c1 y c2')
```

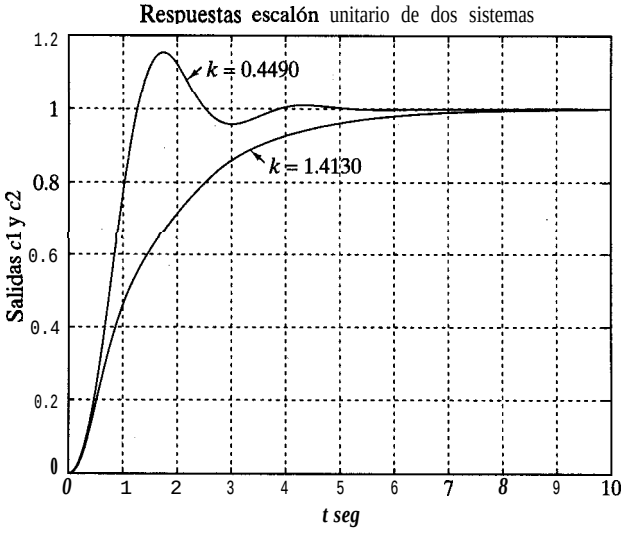


Figura 6-27
Curvas de respuestas escalón unitario para el sistema de la figura 6-25 cuando el factor de amortiguamiento relativo ζ de los polos dominantes en lazo cerrado se hace igual a 0.4. (Dos valores posibles de k producen el factor de amortiguamiento relativo ζ igual a 0.4.)

El sistema con k = 0.4490 (que presenta una respuesta más rápida con un sobrepaso máximo relativamente pequeño) tiene una característica de respuesta mucho mejor que el sistema con k = 1.4130 (el cual presenta una respuesta sobreamortiguada lenta). Por tanto, debemos elegir k = 0.4490 para el sistema actual.

Lugares geométricos de las raíces para sistemas con realimentación positiva.* En un sistema de control complejo, puede haber un lazo interno con realimentación positiva como el de la figura 6-28. Por lo general, un lazo semejante se estabiliza mediante el

* Bibliografía W-5.

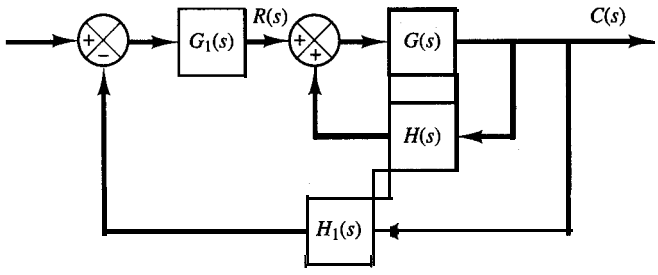


Figura 6-28
Sistema de control.

lazo externo.A continuación nos concentraremos en el lazo interno de realimentación positiva. La función de transferencia en lazo cerrado del lazo interno es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)}$$

La ecuación característica es

$$1 - G(s)H(s) = 0 \qquad (6\text{-}22)$$

Esta ecuación se despeja en forma similar al desarrollo del método del lugar geométrico de las raíces de la sección 6-2. Sin embargo, debe alterarse la condición de ángulo.

La ecuación (6-22) se escribe como

$$G(s)H(s) = 1$$

que es equivalente a las dos ecuaciones siguientes:

$$\underline{/G(s)H(s) = 0° \pm k360°} \qquad 0, 1, 2, \ldots)$$

$$|G(s)H(s)| = 1$$

La suma total de todos los ángulos a partir de los polos y ceros en lazo abierto debe ser igual a 0° $\pm$ $k360°$. Por tanto, el lugar geométrico de las raíces ocupa un lugar geométrico de 0°, en contraste con el lugar geométrico de 180° que se consideró antes. La condición de magnitud no cambia.

Para ilustrar la gráfica del lugar geométrico de las raíces para el sistema con realimentación positiva, usaremos como ejemplo las siguientes funciones de transferencia G(s) y H(s).

$$G(s) = \frac{K(s + 2)}{(s + 3)(s^2 + 2s + 2)}, \qquad H(s) = 1$$

Se supone que la ganancia K es positiva.

Las reglas generales para construir los lugares geométricos de las raíces ofrecidas en la sección 6-3 deben modificarse en la forma siguiente:

La regla 2 se modifica del modo siguiente: si el número total de polos reales y ceros reales a la derecha de un punto de prueba sobre el eje real es un número par, este punto de prueba se encuentra en el lugar geométrico de las raíces.

La regla 3 se modifica del modo siguiente:

$$\text{Ángulos de las asíntotas} = \frac{\pm k360^\circ}{n - m} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

en donde n = número de polos finitos de $G(s)H(s)$
m = número de ceros finitos de $G(s)H(s)$

La regla 5 se modifica del modo siguiente: cuando se calcula el ángulo de salida (o el ángulo de llegada) a partir de un polo complejo en lazo abierto (o de un cero complejo), se deben restar de 0" la suma de todos los ángulos de los vectores que parten de todos los otros polos y ceros hacia el polo complejo (o el cero complejo) en cuestión, incluyendo los signos adecuados.

Las otras reglas para construir la gráfica del lugar geométrico de las raíces no cambian. Ahora aplicaremos las reglas modificadas para desarrollar la gráfica del lugar geométrico.

1. Grafique en el plano complejo los polos ($s = -1 + j$, $s = -1 - j$, $s = -3$) y cero ($s = -2$) en lazo abierto. Conforme K aumenta de 0 a ∞, los polos en lazo cerrado empiezan en los polos en lazo abierto y terminan en los ceros en lazo abierto (finitos o infinitos), igual que en el caso de los sistemas con realimentación negativa.
2. Determine los lugares geométricos de las raíces sobre el eje real. Existen lugares geométricos de las raíces sobre el eje real entre -2 y $+\infty$ y entre -3 y $-\infty$.
3. Determine las asíntotas de los lugares geométricos de las raíces. Para el sistema actual,

$$\text{Ángulo de la asíntota} = \frac{\pm k360^\circ}{3 - 1} = \pm 180^\circ$$

Esto significa simplemente que las asíntotas están sobre el eje real.

4. Determine los puntos de desprendimiento y de ingreso. Dado que la ecuación característica es

$$(s + 3)(s^2 + 2s + 2) - K(s + 2) = 0$$

obtenemos

$$K = \frac{(s + 3)(s^2 + 2s + 2)}{s + 2}$$

Diferenciando K con respecto a s, obtenemos

$$\frac{dK}{ds} = \frac{2s^3 + 11s^2 + 20s + 10}{(s + 2)^2}$$

Observe que

$$2s^3 + 11s^2 + 20s + 10 = 2(s + 0.8)(s^2 + 4.7s + 6.24)$$
$$= 2(s + 0.8)(s + 2.35 + j0.77)(s + 2.35 - j0.77)$$

El punto $s = -0.8$ está en el lugar geométrico de las raíces. Dado que este punto se encuentra entre dos ceros (un cero finito y un cero infinito), es un punto de ingreso real. Los puntos $s = -2.37 \pm j0.77$ no satisfacen la condición de ángulo y,por tanto, no son puntos de desprendimiento ni de ingreso.

5. Encuentre el ángulo de salida del lugar geométrico de las raíces a partir de un polo complejo. Para el polo complejo en $s = -1 + j$, el ángulo de salida θ es

$$\theta = 0" - 27" - 90" + 45"$$

o bien

$$\theta = -72^\circ$$

(El ángulo de salida del polo complejo $s = -1 - j$ es 72°.)

6. Seleccione un punto de prueba en la vecindad amplia del eje $j\omega$ y el origen, y aplique la condición de ángulo. Ubique una cantidad suficiente de puntos que satisfagan la condición de ángulo.

La figura 6-29 muestra los lugares geométricos de las raíces para el sistema con realimentación positiva determinado. Los lugares geométricos de las raíces aparecen con líneas de guiones y una curva.

Observe que, si

$$K > \left.\frac{(s+3)(s^2+2s+2)}{s+2}\right|_{s=0} = 3$$

una raíz real se introduce en el semiplano derecho del plano s. Por tanto, para valores de K mayores que 3, el sistema se vuelve inestable. (Para $K > 3$, el sistema debe estabilizarse con un lazo externo.)

Observe que la función de transferencia en lazo cerrado para el sistema con realimentación positiva se obtiene mediante

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)} = \frac{K(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2) - K(s+2)}$$

Para comparar esta gráfica de un lugar geométrico de las raíces con la del sistema con realimentación negativa correspondiente, mostramos en la figura 6-30 los lugares geométricos de las raíces para el sistema con realimentación negativa cuya función de transferencia en lazo cerrado es

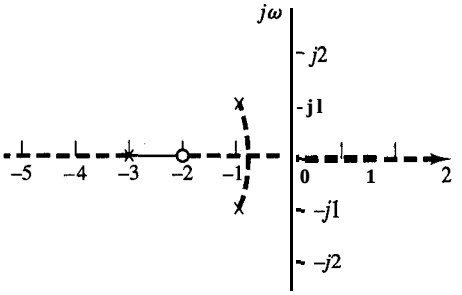


Figura 6-29
Gráfica del lugar geométrico de las raíces para el sistema con realimentación positiva con G(s) = $K(s+2)/[(s+3)(s^2+2s+2)]$, $H(s) = 1$.

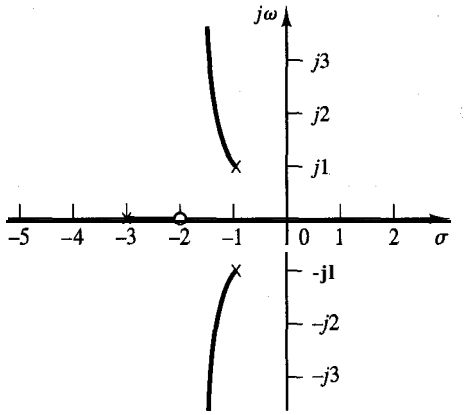
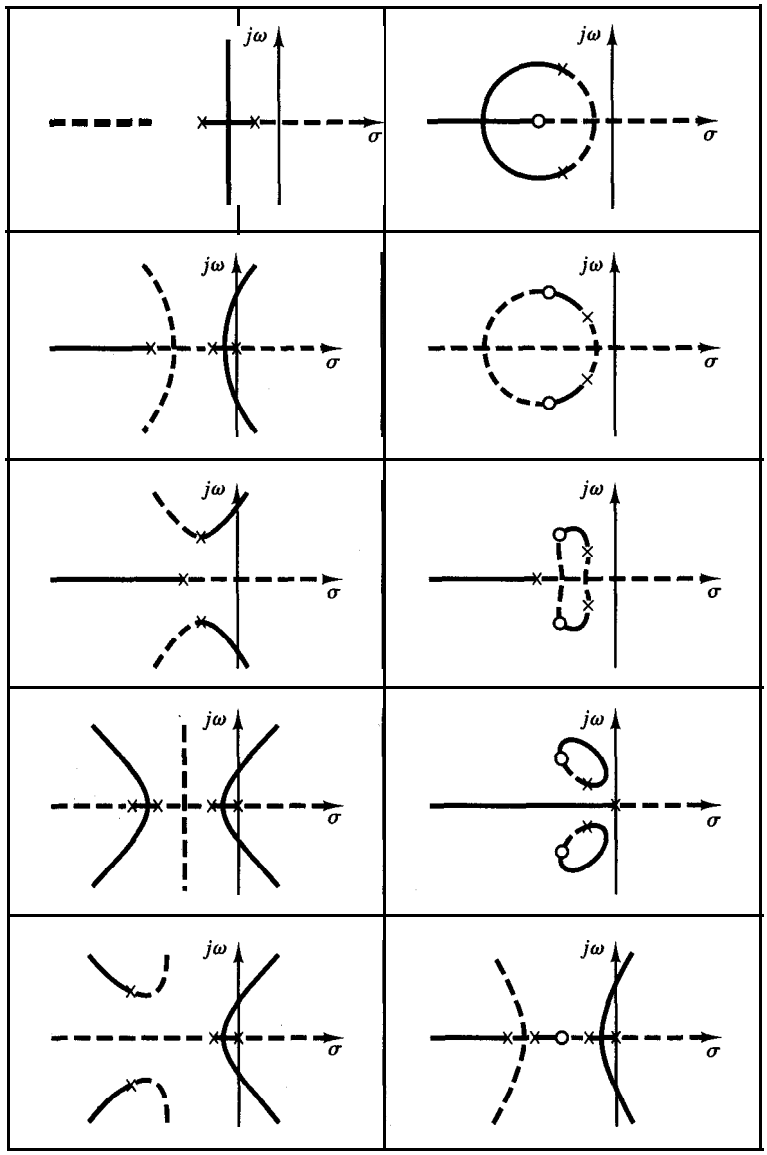


Figura 6–30
Gráfica del lugar geométrico de las raíces para el sistema con realimentación negativa con G(s) = $K(s+2)/[(s+3)(s^2+2s+2)]$, $H(s) = 1$.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s + 2)}{(s + 3)(s^2 + 2s + 2) + K(s + 2)}$$

La tabla 6-2 contiene varias gráficas del lugar geométrico de las raíces de sistemas con realimentación negativa y positiva. Las funciones de transferencia en lazo cerrado se obtienen mediante

Tabla 6-2 Gráficas del lugar geométrico de sistemas con realimentación negativa y positiva



Las líneas y curvas gruesas corresponden a los sistemas con realimentación negativa; las líneas y curvas punteadas corresponden a los sistemas con realimentación positiva.

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 + GH}, \quad \text{para sistemas con realimentación negativa}$$

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 + GH}, \quad \text{para sistemas con realimentación positiva}$$

en donde GH es la función de transferencia en lazo abierto. En la tabla 6-2, los lugares geométricos de las raíces para los sistemas con realimentación negativa se dibujan con líneas y curvas gruesas y los de los sistemas con realimentación positiva se dibujan con líneas y curvas punteadas.

6-6 ANÁLISIS DE SISTEMAS DE CONTROL MEDIANTE EL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES

En esta sección analizaremos primero la ortogonalidad de los lugares geométricos de las raíces y los lugares geométricos de ganancia constante para los sistemas en lazo cerrado. Luego analizaremos los sistemas condicionalmente estables. Por último, analizaremos los sistemas de fase no mínima.

Ortogonalidad de los lugares geométricos de las raíces y los lugares geométricos de ganancia constante. Considere el sistema cuya función de transferencia en lazo abierto es $G(s)H(s)$. En el plano $G(s)H(s)$, los lugares geométricos de $|G(s)H(s)|$ = una constante, son círculos con centro en el origen y los lugares geométricos correspondientes a $\angle G(s)H(s) = \pm 180°\ (2k + 1)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ se encuentran sobre el eje real negativo del plano $G(s)H(s)$, como se aprecia en la figura 6-31. [Observe que el plano complejo empleado aquí no es el plano s, sino el plano $G(s)H(s)$.]

Los lugares geométricos de las raíces y los lugares geométricos de ganancia constante en el plano s son mapeos conformes de los lugares geométricos de $\angle G(s)H(s) = \pm 180°\ (2k + 1)$ y de $|G(s)H(s)|$ = una constante, en el plano $G(s)H(s)$.

Dado que los lugares geométricos de fase constante y de ganancia constante en el plano G(s) y H(s) son ortogonales, los lugares geométricos de las raíces y los lugares geométricos de ganancia constante en el plano s son ortógonales La figura 6−32(a) contiene los lugares geométricos de las raíces y los lugares geométricos de ganancia constante para el sistema siguiente:

$$G(s) = \frac{K(s + 2)}{s^2 + 2s + 3}, \qquad H(s) = 1$$

observe que, dado que la configuración de polos y ceros es simétrica con respecto al eje real, los lugares geométricos de ganancia constante también son simétricos con respecto al mismo.

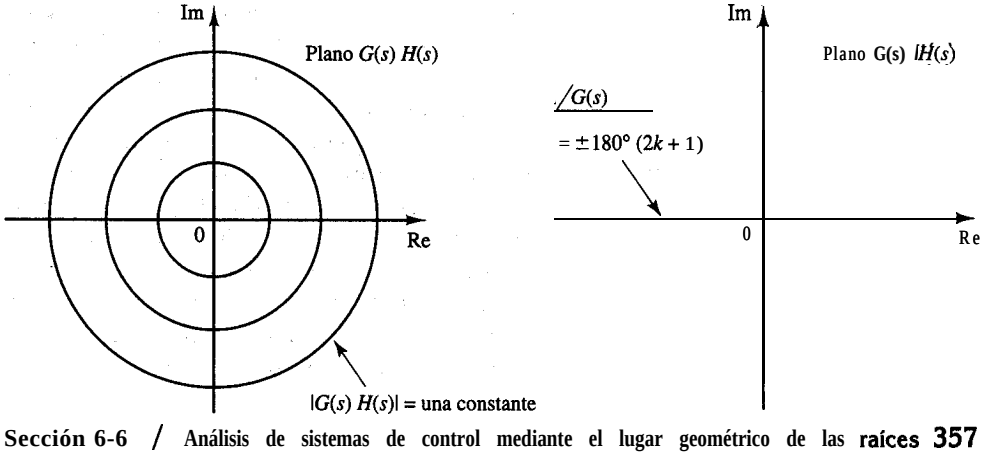


Figura 631
Gráficas de los lugares geométricos de ganancia constante y de fase constante en el plano $G(s)H(s)$.

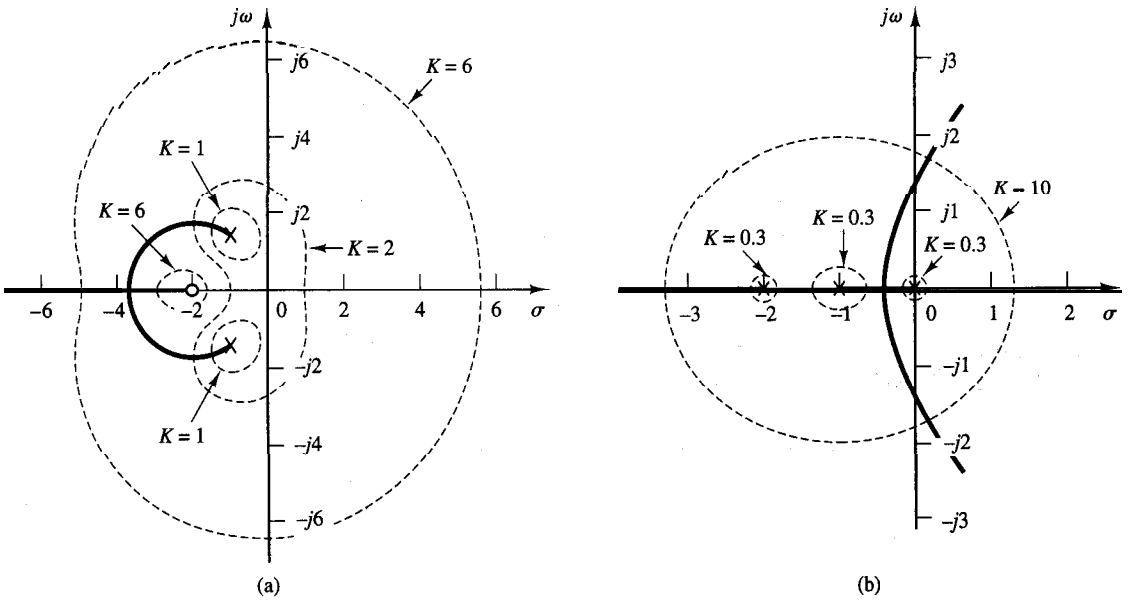


Figura 6-32
Gráficas de los lugares geométricos de las raíces y los lugares geométricos de ganancia constante. (a) sistema con G(s) = $K(s + 2)/(s^2 + 2s + 3)$, $H(s) = 1$; (b) sistema con G(s) = $K/[s(s + 1)(s + 2)]$, $H(s) = 1$.

La figura 6−32(b) muestra los lugares geométricos de las raíces y los lugares geométricos de ganancia constante para el sistema:

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 2)}, \qquad H(s) = 1$$

Observe que, dado que la configuración de los polos en el plano s es simétrica con respecto al eje real y la línea paralela hacia el eje imaginario que pasa a través del punto ($\sigma = -1$, $\omega = 0$), los lugares geométricos de ganancia constante son simétricos con respecto a la línea $\omega = 0$ (eje real) y la línea $\sigma = -1$.

Sistemas condicionalmente **estables.** Considere el sistema de la figura 6−33(a). Los lugares geométricos de las raíces para este sistema se grafican mediante las reglas generales y el procedimiento para construir lugares geométricos de las raíces. La figura 6−33(b) contiene una gráfica de un lugar geométrico de las raíces para este sistema. Se aprecia que este sistema es estable sólo para rangos limitados del valor de K; es decir, $0 < K < 14$ y $64 < K < 195$. El sistema se vuelve inestable para $14 < K < 64$ y $195 < K$. Si K adopta un valor correspondiente a una operación inestable, el sistema se colapsa o se vuelve no lineal, debido a que puede existir una no linealidad de saturación. Tal sistema se denomina condicionalmente estable.

En la práctica, no son convenientes los sistemas condicionalmente estables. La estabilidad condicional es peligrosa pero ocurre en ciertos sistemas, en particular, un sistema que tiene una trayectoria directa inestable. Tal trayectoria directa puede ocurrir si el sistema tiene un lazo menor. Es aconsejable evitar tal estabilidad condicional dado que, si por alguna razón la ganancia desciende más allá del valor crítico, el sistema se vuelve inestable. Observe que la adición de una red de compensación adecuada elimina la estabilidad condicional. [La adición de un cero provocará que los lugares geométricos de las raíces se inclinen a la izquierda. (Véase la sección 7-2.) Por tanto, la estabilidad condicional se elimina agregando la compensación adecuada.]

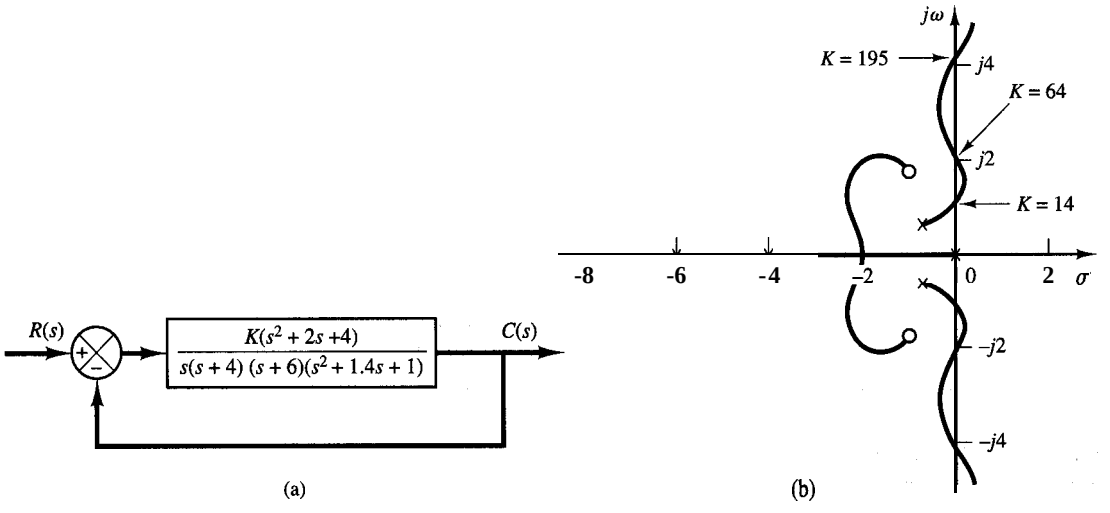


Figura 6-33
(a) Sistema condicionalmente estable; (b) gráfica del lugar geométrico de las raíces.

Sistemas de fase no mínima. Si todos los polos y ceros de un sistema se encuentran en el semiplano izquierdo del planos, el sistema se denomina de ***fase mínima.*** Si un sistema tiene al menos un polo o un cero en el semiplano derecho del plano s, el sistema se considera de ***fase no mínima.*** El término de fase no mínima proviene de las características de cambio de fase de tal sistema cuando está sujeto a entradas senoidales.

Considere el sistema de la figura 6−34(a). Para este sistema,

$$G(s) = \frac{K(1 - T_a s)}{s(Ts + 1)} \qquad (T_a > 0), \qquad H(s) = 1$$

Éste es un sistema de fase no mínima, dado que sólo hay un cero en el semiplano derecho del plano s. Para este sistema, la condición de ángulo se convierte en

$$\angle G(s) = \angle -\frac{K(T_a s - 1)}{s(Ts + 1)}$$

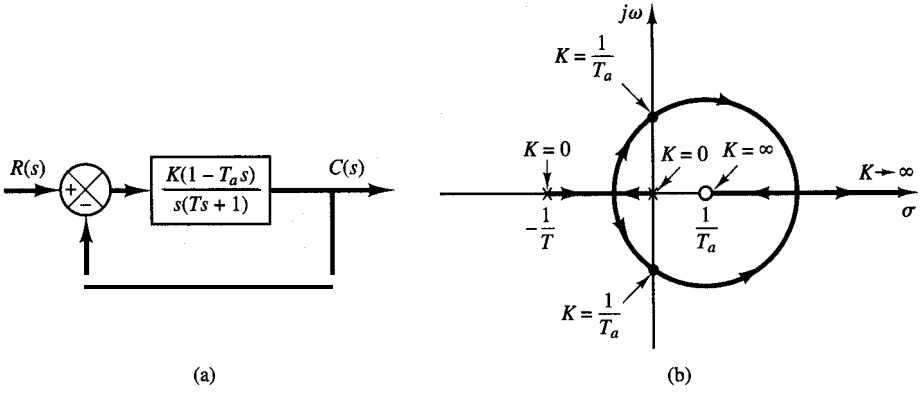


Figura 6-34
(a) Sistema de fase no mínima; (b) gráfica del lugar geométrico de las raíces.

$$= \angle \frac{K(T_a s - 1)}{s(Ts + 1)} + 180°$$

$$= \pm 180°(2k + 1) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

o bien

$$\angle \frac{K(T_a s - 1)}{s(Ts + 1)} = 0° \qquad (6\text{-}23)$$

Los lugares geométricos de las raíces se obtienen a partir de la ecuación (6-23). La figura 6−34(b) muestra una gráfica del lugar geométrico de las raíces para este sistema. A partir del diagrama, observamos que el sistema es estable si la ganancia K es menor que $1/T_a$.

6-7 LUGARES GEOMÉTRICOS DE LAS RAÍCES PARA SISTEMAS CON RETARDO DE TRANSPORTE

La figura 6-35 contiene un sistema térmico en el cual circula aire caliente para conservar constante la temperatura de una cámara. En este sistema, el elemento de medición se coloca corriente abajo a una distancia de L pie del horno, la velocidad del aire es v pie/seg, y transcurrirá $T = L/v$ seg antes de que el termómetro detecte cualquier cambio en la temperatura del horno. Tal retardo en la medición, la acción de control, la operación funcional, o situaciones similares, se denomina *retardo de transporte o tiempo muerto.* En la mayoría de los sistemas de control de procesos presentan un tiempo muerto.

La entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$ de un elemento de retardo de transporte o tiempo muerto se relacionan mediante

$$y(t) = x(t - T)$$

en donde T es el tiempo muerto. La función de transferencia del retardo de transporte o tiempo muerto se obtiene mediante

$$\text{Función de transferencia del retardo de transporte o tiempo muerto} = \frac{\mathcal{L}[x(t - T)1(t - T)]}{\mathcal{L}[x(t)1(t)]}$$

$$= \frac{X(s)e^{-Ts}}{X(s)} = e^{-Ts}$$

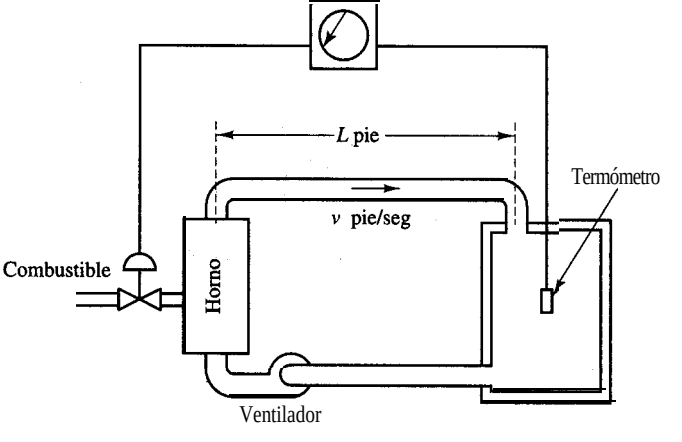


Figura 635
Sistema térmico.

Suponga que la función de transferencia de la trayectoria directa de este sistema térmico se aproxima mediante

$$G(s) = \frac{Ke^{-Ts}}{s + 1}$$

como se aprecia en la figura 6-36. Construyamos una gráfica del lugar geométrico de las raíces para este sistema. La ecuación característica para este sistema en lazo cerrado es

$$1 + \frac{Ke^{-Ts}}{s + 1} = 0 \tag{6-24}$$

Observe que, para sistemas con retardo de transporte, es necesario modificar las reglas de construcción que se presentaron antes. Por ejemplo, el número de ramificaciones del lugar geométrico de las raíces es infinito, dado que la ecuación característica tiene un número infinito de raíces. El número de asíntotas es infinito.Todas son paralelas al eje real del planos.

A partir de la ecuación (6−24), obtenemos

$$\frac{Ke^{-Ts}}{s + 1} = -1$$

Por tanto, la condición de ángulo se convierte en

$$\underline{\left/\frac{Ke^{-Ts}}{s + 1}\right.} = \underline{/e^{-Ts}} - \underline{/s + 1} = \pm 180°(2k + 1) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{6-25}$$

Para encontrar el ángulo de e-r', sustituya $s = \sigma + j\omega$. En tal caso, obtenemos

$$e^{-Ts} = e^{-T\sigma - j\omega T}$$

Dado que $e^{-T\sigma}$ es una cantidad real, el ángulo de $e^{-T\sigma}$ es cero. Por tanto,

$$\underline{/e^{-Ts}} = \underline{/e^{-j\omega T}} = \underline{/\cos \omega T - j \operatorname{sen} \omega T}$$

$$= -\omega T \text{ (radianes)}$$

$$= -57.3\omega T \quad \text{(grados)}$$

La condición de ángulo, ecuación (6−25), se vuelve, así,

$$-57.3\omega T - \underline{/s + 1} = \pm 180°(2k + 1)$$

Dado que T es una constante determinada, el ángulo de e^{-Ts} es una función de w solamente.

A continuación determinaremos la contribución del ángulo producida por e^{-Ts}. Para $k = 0$, la condición de ángulo se escribe

$$\underline{/s + 1} = \pm 180° - 57.3°\omega T \tag{6-26}$$

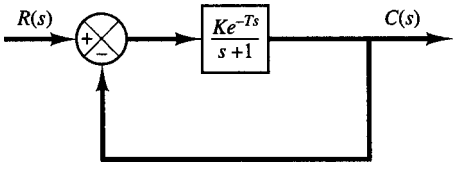


Figura 6–36
Diagrama de bloques del sistema de la figura 6−35.

Dado que la contribución de ángulo de e^{-Ts} es cero para $\omega = 0$, el eje real de -1 a $-\infty$ forma una parte de los lugares geométricos de las raíces. Ahora suponga un valor ω_1 para ω y calcule 57.3" $\omega_1 T$. En el punto -1 sobre el eje real negativo, dibuje una línea que forme un ángulo de 180" − 57.3" $\omega_1 T$ con el eje real. Encuentre la intersección de esta línea y la línea horizontal ω = WI. Esta intersección, punto T de la figura 6−37(a), es un punto que satisface la ecuación (6-26) y, por tanto, está sobre un lugar geométrico de las raíces. Continuando con el mismo proceso, obtenemos la gráfica del lugar geométrico de las raíces de la figura 6−37(b).

Observe que, conforme s tiende a $-\infty$, la función de transferencia en lazo abierto

$$\frac{Ke^{-Ts}}{s+1}$$

tiende a $-\infty$ dado que

$$\lim_{s=-\infty} \frac{Ke^{-Ts}}{s+1} = \left.\frac{\frac{d}{ds}(Ke^{-Ts})}{\frac{d}{ds}(s+1)}\right|_{s=-\infty}$$
$$= -KTe^{-Ts}\big|_{s=-\infty}$$
$$= -\infty$$

Por tanto, $s = -\infty$ es un polo de la función de transferencia en lazo abierto. En este caso, los lugares geométricos de las raíces empiezan en s = -1 o $s = -\infty$ y terminan en $s = \infty$, conforme K aumenta de cero a infinito. Dado que el primer miembro de la condición de ángulo obtenida mediante la ecuación (6-25) tiene un número infinito de valores, hay un número infinito de lugares geométricos de las raíces, conforme el valor de k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) va de cero a infinito. Por ejemplo, si k = 1, la condición de ángulo se convierte en

$$\angle s+1 = \pm 540° - 57.3°\omega T \qquad \text{(grados)}$$
$$= \pm 3\pi - \omega T \qquad \text{(radianes)}$$

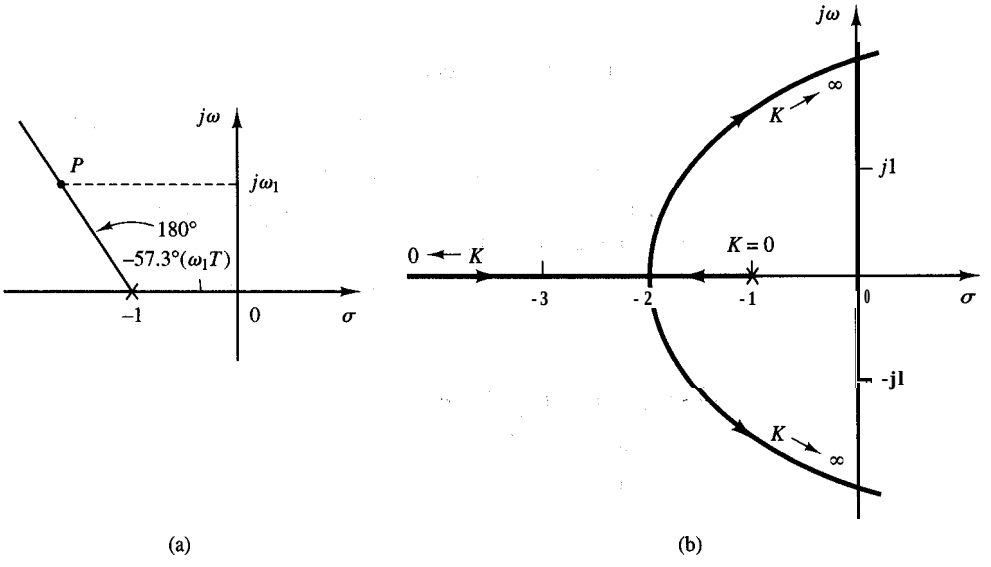


Figura 6-37
(a) Construcción del lugar geométrico de las raíces; (b) gráfica del lugar geométrico de las raíces.

La construcción de los lugares geométricos de las raíces para $k = 1$ es igual que para $k = 0$. Una gráfica de los lugares geométricos de las raíces para $k = 0, 1$ y 2 cuando $T = 1$ *seg*, aparece en la figura 6-38.

La condición de magnitud establece que

$$\left|\frac{Ke^{-Ts}}{s+1}\right| = 1$$

Dado que la magnitud de e^{-Ts} es igual a la de $e^{-T\sigma}$, o

$$|e^{-Ts}| = |e^{-T\sigma}| \cdot |e^{-j\omega T}| = e^{-T\sigma}$$

la condición de magnitud se convierte en

$$|s + 1| = Ke^{-T\sigma}$$

Los lugares geométricos de las raíces de la figura 6-38 se gradúan en términos de K cuando $T = 1$ seg.

Aunque hay un número infinito de ramificaciones del lugar geométrico de las raíces, la más importante es la ramificación primaria que se encuentra entre $-j\pi$ y $j\pi$. Remitiéndonos a la figura 6-38, el valor crítico de K en la ramificación primaria es igual a 2, en tanto que los valores críticos de K en otras ramificaciones son mucho más altos $(8, 14, \ldots)$. Por tanto, el valor crítico $K = 2$ en la ramificación primaria es el más importante desde el punto de vista de la estabilidad. La respuesta transitoria del sistema la determinan las raíces que se ubican más cerca del eje jo y que se encuentran sobre la ramificación primaria. En resumen, la ramificación del lugar geométrico de las raíces que corresponde a $k = 0$ es la dominante; otras ramificaciones que corresponden a $k = 1, 2, 3, \ldots$ no son tan importantes y pueden pasarse por alto.

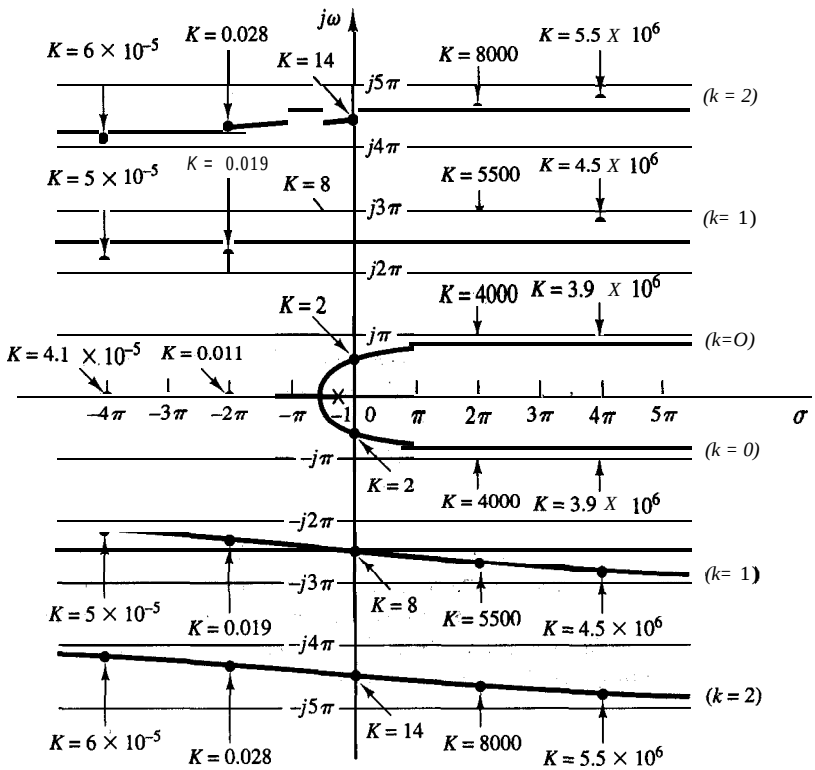


Figura 6-38
Gráfica del lugar geométrico de las raíces para el sistema de la figura **6-36 (T = *1* seg).**

Este ejemplo muestra el hecho de que el tiempo muerto produce inestabilidad, incluso en los sistemas de primer orden, debido a que los lugares geométricos de las raíces se introducen en el semiplano derecho del plano s para valores grandes de K. Por tanto, aunque el aumento K del sistema de primer orden se hace grande ante la ausencia de tiempo muerto, no puede hacerse demasiado alta si hay tiempo muerto. (Para el sistema que se considera aquí, el valor de ganancia K debe ser considerablemente menor que 2 para una operación satisfactoria.)

Aproximación del retardo de transporte o tiempo muerto. Si el tiempo muerto T es muy pequeño, e^{-Ts} se aproxima por lo común mediante

$$e^{-Ts} \doteqdot 1 - Ts$$

o bien

$$e^{-Ts} \doteqdot \frac{1}{Ts + 1}$$

Tales aproximaciones son buenas si el tiempo muerto es muy pequeño y, además, la función de entrada $f(t)$ para el elemento de tiempo muerto es regular y continua. [Esto significa que las derivadas de segundo orden y de orden superior de $f(t)$ son pequeñas.]

Hay una expresión más elaborada para aproximar e-r?

$$e^{-Ts} = \frac{1 - \frac{Ts}{2} + \frac{(Ts)^2}{8} - \frac{(Ts)^3}{48} + \cdots}{1 + \frac{Ts}{2} + \frac{(Ts)^2}{8} + \frac{(Ts)^3}{48} + \cdots}$$

Si sólo se consideran los primeros dos términos del numerador y el denominador, entonces

$$e^{-Ts} \doteqdot \frac{1 - \frac{Ts}{2}}{1 + \frac{Ts}{2}} = \frac{2 - Ts}{2 + Ts}$$

Esta aproximación también se usa con frecuencia.

6-8 GRÁFICAS DE CONTORNOS DE LAS RAÍCES

Efectos de las variaciones de parámetros sobre los polos en lazo cerrado. En muchos problemas de diseño, es necesario investigar los efectos que tienen las variaciones de parámetros diferentes a la ganancia K sobre los polos en laxo cerrado. Tales efectos se investigan con facilidad mediante el método del lugar geométrico de las raíces. Cuando varían dos (o más) parámetros, los lugares geométricos de las raíces correspondientes se denominan ***contornos de las raíces.***

Usaremos un ejemplo para ilustrar la construcción de los contornos de las raíces cuando varían dos parámetros, uno por uno, de cero a infinito.

Considere un sistema de seguimiento que tiene una realimentación con tacómetro igual a la dela figura 6−39(a). Si eliminamos el laxo menor, se simplifica el diagrama de bloques [figura 6−39(b)]. Si definimos

$$a = b + KK_h$$

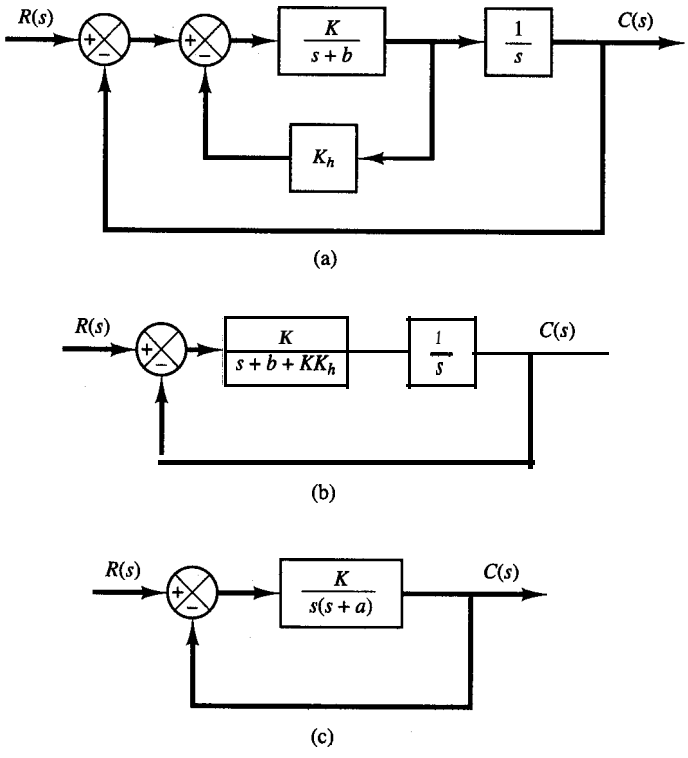


Figura 6-39
(a) Sistema de seguimiento con realimentación de tacómetro; (b), (c) diagramas de bloques simplificados ($a = b + KK_h$).

este diagrama de bloques se transforma en el que aparece en la figura 6−39(c). Este sistema contiene dos variables, el parámetro a y la ganancia K.

A continuación investigaremos el efecto de variar el parámetro a y la ganancia K. La función de transferencia en lazo cerrado de este sistema se vuelve

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + as + K}$$

La ecuación característica es

$$s^2 + as + K = 0 \qquad \textbf{(6-27)}$$

que se puede reescribir como

$$1 + \frac{as}{s^2 + K} = 0.$$

o bien

$$\frac{as}{s^2 + K} = -1 \qquad (6\text{–}28)$$

En la ecuación (6−28), el parámetro a se escribe como un factor multiplicativo. Para un valor determinado de K, el efecto de a sobre los polos en lazo cerrado se investiga a partir de la ecuación (6-28). Los contornos de las raíces para este sistema se construyen siguiendo el procedimiento normal para construir los lugares geométricos de las raíces.

Ahora construiremos los contornos de las raíces conforme k y a varían, cada uno, de cero a infinito. Los contornos de las raíces empiezan en los polos (en $s = \pm j\sqrt{K}$) y terminan en los ceros (en $s = 0$ e infinito).

Construiremos primero los lugares geométricos de las raíces cuando $a = 0$. Esto se hace con facilidad del modo siguiente: sustituya $a = 0$ en la ecuación (6-27). A continuación,

$$s^2 + K = 0$$

o bien

$$\frac{K}{s^2} = -1 \tag{6-29}$$

Por tanto, los polos en lazo abierto son un polo doble en el origen. La gráfica del lugar geométrico de las raíces de la ecuación (6-29) aparece en la figura 6−40(a).

Para construir los contornos de las raíces, supongamos que K es una constante; por ejemplo, $K = 4$. En este caso, la ecuación (6-28) se convierte en

$$\frac{as}{s^2 + 4} = -1 \tag{6-30}$$

Los polos en lazo abierto están en $s = \pm j2$. El cero finito en lazo abierto está en el origen. La gráfica del lugar geométrico de las raíces que corresponde a la ecuación (6-30) aparece en la figura 6−40(b). Para valores diferentes de K, la ecuación (6-30) produce lugares geométricos de las raíces similares.

Los contornos de las raíces, diagrama que muestra los lugares geométricos de las raíces que corresponden a $0 \leq K \leq \infty, 0 \leq a \leq \infty$, se grafican como en la figura 6−40(c). Es evidente que los contornos de las raíces empiezan en los polos de la función de transferencia

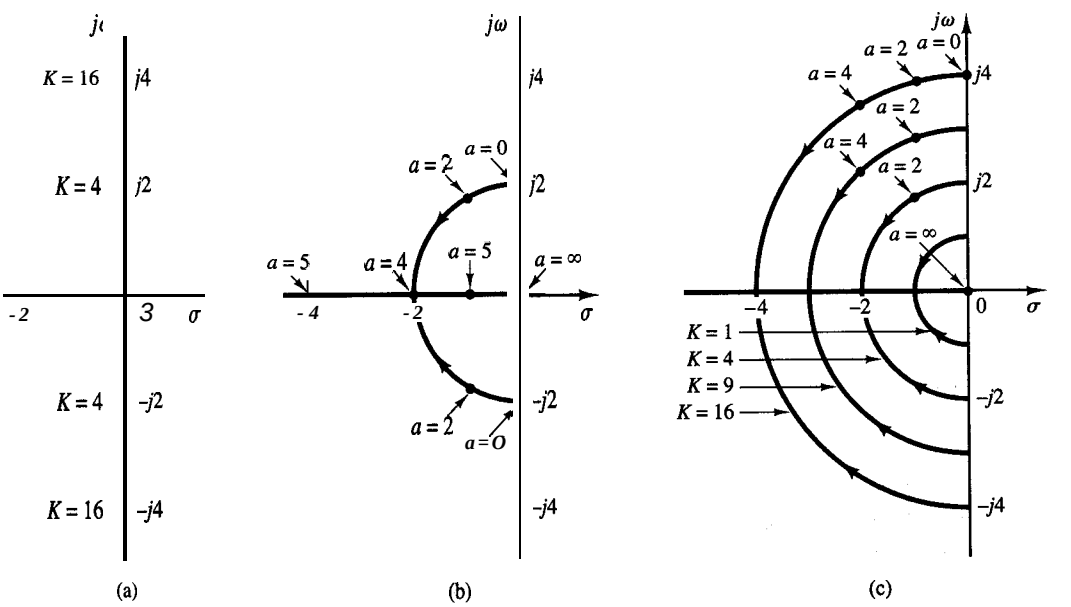


Figura 6−40
(a) Gráfica del lugar geométrico de las raíces para el sistema de la figura 6−39(c) ($a = 0, 0 \leq K \leq \infty$); (b) gráfica del lugar geométrico de las raíces ($0 \leq a \leq \infty$, $K = 4$); (c) gráfica de los contornos de las raíces.

$as/(s^2 + K)$ y terminan en sus ceros. Las puntas de flecha de los contornos de las raíces indican la dirección del incremento en el valor de a.

Los contornos de las raíces muestran los efectos de las variaciones de los parámetros del sistema sobre los polos en lazo cerrado. A partir de la gráfica de los contornos de las raíces de la figura 6−40(c) observamos que, para $0 < K < \infty$, $0 < a < \infty$, los polos en lazo cerrado se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s y el sistema es estable.

Observe que, si el valor de K es fijo, por ejemplo $K = 4$, los contornos de las raíces se convierten simplemente en los lugares geométricos de las raíces, como se observa en la figura 6−40(b).

Hemos mostrado un método para construir contornos de las raíces cuando varían la ganancia K y el parámetro a, cada uno, de cero a infinito. Básicamente, asignamos a uno de los parámetros un valor constante, y variamos el otro parámetro de 0 a ∞, a la vez que trazamos los lugares geométricos de las raíces. A continuación cambiamos el valor del primer parámetro y repetimos el trazo de los lugares geométricos de las raíces. Si repetimos este proceso podemos trazar los contornos de las raíces.

El programa MATLAB 6-9 sirve para generar una gráfica de los contornos de las raíces. La gráfica resultante aparece en la figura 6-41.

Programa MATLAB 6-9

```
% ---------- Gráfica de los contornos de las raíces ----------
% ***** Graficar los contornos de las raíces del sistema de la figura
% 6−39(c), en donde a y K son variables.*****

% ***** En la ecuación (6-28), as/(s^2 + K) = −1, suponer que
% K = 1, 4, 9, 16, . . . y graficar los lugares geométricos conforme a
% varía de cero a infinito *****

% ***** Introducir el numerador y los denominadores *****

num = [0   1   0];
den1 = [1   0   1];
den2 = [1   0   4];
den3 = [1   0   9];
den4 = [1   0   16];

% ***** Introducir el comando rlocus(num,den) *****

rlocus(num,den1)
hold
Current plot held
rlocus(num,den2)
rlocus(num,den3)
rlocus(num,den4)
v = [−5   2   −5   5]; axis(v); axis('square');
grid
title('Gráfica de los contornos de las raíces')

% ***** Suprimir hold en las gráficas *****

hold
Current plot released
```

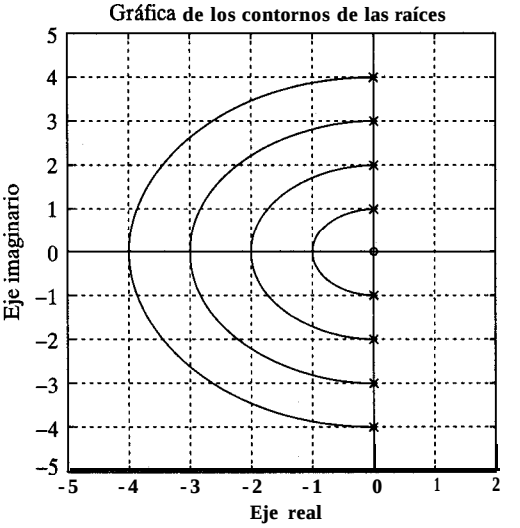


Figura 6-41
Gráfica de los contornos de las raíces generada con MATLAB.

EJEMPLO DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

A-6-1. Trace los lugares geométricos de las raíces para el sistema de la figura 6−42(a). (Se supone que la ganancia K es positivo.) Observe que para valores pequeños o grandes de K el sistema es sobreamortiguado y para valores medios de K es subamortiguado.

Solución. El procedimiento para graficar los lugares geométricos de las raíces es el siguiente:

1. Ubique los polos y ceros en lazo abierto sobre el plano complejo. Existen lugares geométricos de las raíces sobre el eje real negativo entre 0 y -1 y entre -2 y -3.

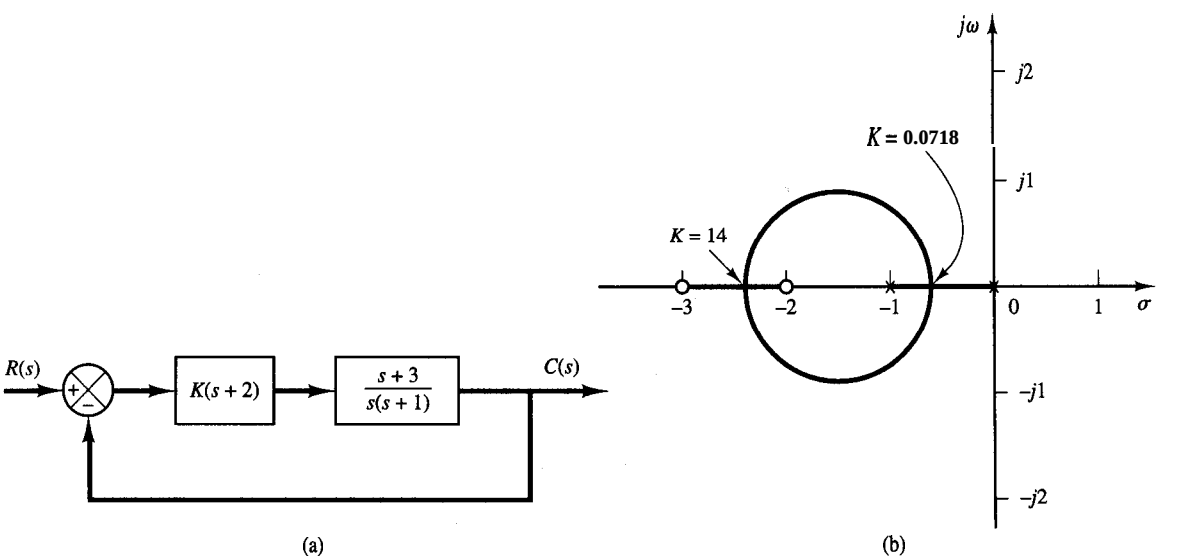


Figura 6-42
(a) Sistema de control; (b) gráfica del lugar geométrico de las raíces.

2. La cantidad de polos en lazo abierto y la de ceros finitos son iguales. Esto significa que no hay asíntotas en la región compleja del plano s.

3. Determine los puntos de desprendimiento y de ingreso. La ecuación característica para el sistema es

$$1 + \frac{K(s+2)(s+3)}{s(s+1)} = 0$$

o bien

$$K = -\frac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

Los puntos de desprendimiento y de ingreso se determinan a partir de

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(2s+1)(s+2)(s+3) - s(s+1)(2s+5)}{[(s+2)(s+3)]^2}$$

$$= -\frac{4(s+0.634)(s+2.366)}{[(s+2)(s+3)]^2}$$

$$= 0$$

del modo siguiente:

$$s = -0.634, \qquad s = -2.366$$

Observe que ambos puntos están sobre los lugares geométricos de las raíces. Por tanto, son puntos de desprendimiento y de ingreso reales. En el punto $s = -0.634$, el valor de K es

$$K = -\frac{(-0.634)(0.366)}{(1.366)(2.366)} = 0.0718$$

Asimismo, en $s = -2.366$,

$$K = -\frac{(-2.366)(-1.366)}{(-0.366)(0.634)} = 14$$

(Debido a que el puntos = -0.634 se encuentra entre dos polos, es un punto de desprendimiento y, debido a que el punto $s = -2.366$ se encuentra entre dos ceros, es un punto de ingreso.)

4. Determine una cantidad suficiente de puntos que satisfaga la condición de ángulo. (Se encuentra que el lugar geométrico de las raíces es un círculo con centro en -1.5 que atraviesa los puntos de desprendimiento y de ingreso.) La gráfica del lugar geométrico de las raíces para este sistema aparece en la figura 6−42(b).

Observe que este sistema es estable para cualquier valor positivo de K, dado que todos los lugares geométricos de las raíces se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s.

Los valores pequeños de K ($0 < K < 0.0718$) corresponden a un sistema sobreamortiguado. Los valores medios de K ($0.0718 < K < 14$) corresponden a un sistema subamortiguado. Por último, los valores grandes de K ($14 < K$) corresponden a un sistema sobreamortiguado. Para un valor grande de K, el estado estable se alcanza en un tiempo más corto que para un valor pequeño de K.

El valor de K debe ajustarse para que el desempeño del sistema sea óptimo, de acuerdo con un índice de desempeño determinado.

A-6-2. Una forma simplificada de la función de transferencia en lazo abierto de un avión con piloto automático en el modo longitudinal es

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+a)}{s(s-b)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}, \qquad a > 0, \qquad b > 0$$

Este sistema con un polo en lazo abierto en el semiplano derecho del plano s puede ser condicionalmente estable. Trace los lugares geométricos de las raíces cuando $a = b = 1$, $\zeta = 0.5$, y $\omega_n = 4$. Encuentre el rango de valores de la ganancia K para la estabilidad.

Solución. La función de transferencia en lazo abierto para el sistema es

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + 1)}{s(s - 1)(s^2 + 4s + 16)}$$

Para trazar los lugares geométricos de las raíces, seguimos este procedimiento:

1. Ubique los polos y el cero en lazo abierto en el plano complejo. Los lugares geométricos de las raíces existen sobre el eje real entre 1 y 0 y entre -1 y $-\infty$.

2. Determine las asíntotas de los lugares geométricos de las raíces. Hay tres asíntotas cuyos ángulos se determinan como

$$\text{Ángulos de las asíntotas} = \frac{180°(2k + 1)}{4 - 1} = 60°, -60°, 180°$$

Remitiéndonos a la ecuación (6−15), la abscisa de la intersección de las asíntotas y el eje real es

$$\sigma_a = -\frac{(0 - 1 + 2 + j2\sqrt{3} + 2 - j2\sqrt{3}) - 1}{4 - 1} = -\frac{2}{3}$$

3. Determine los puntos de desprendimiento y de ingreso. Dado que la ecuación característica es

$$1 + \frac{K(s + 1)}{s(s - 1)(s^2 + 4s + 16)} = 0$$

obtenemos

$$K = -\frac{s(s - 1)(s^2 + 4s + 16)}{s + 1}$$

Diferenciando K con respecto a s, obtenemos

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{3s^4 + 10s^3 + 21s^2 + 24s - 16}{(s + 1)^2}$$

El numerador se factoriza del modo siguiente:

$$3s^4 + 10s^3 + 21s^2 + 24s - 16$$
$$= 3(s + 0.76 + j2.16)(s + 0.76 - j2.16)(s + 2.26)(s - 0.45)$$

Los puntos $s = 0.45$ y $s = -2.26$ están en los lugares geométricos de las raíces sobre el eje real. Por tanto, son puntos de desprendimiento y de ingreso, respectivamente. Los puntos $s = -0.76 \pm j2.16$ no satisfacen la condición de ángulo. Por tanto, no son puntos de desprendimiento ni de ingreso.

4. Usando el criterio de estabilidad de Routh, determine el valor de K en el cual los lugares geométricos de las raíces cruzan el eje imaginario. Dado que la ecuación característica es

$$s^4 + 3s^3 + 12s^2 + (K - 16)s + K = 0$$

el arreglo de Routh se convierte en

s^4	1	12	K
s^3	3	$K - 16$	0
s^2	$\frac{52 - K}{3}$	K	0
s^1	$\frac{-K^2 + 59K - 832}{52 - K}$	0	
s^0	K		

Los valores de K que forman el término s^1 en la primera columna igual a cero son $K = 35.7$ y $K = 23.3$.

Los puntos que cruzan sobre el eje imaginario se encuentran despejando la ecuación auxiliar obtenida de la fila s^2, es decir, despejando la siguiente ecuación para s:

$$\frac{52 - K}{3} s^2 + K = 0$$

Los resultados son

$$s = \pm j2.56, \quad \text{para } K = 35.7$$

$$s = \pm j1.56, \quad \text{para } K = 23.3$$

Los puntos que cruzan sobre el eje imaginario son, entonces, $s = \pm j2.56$ y $s = \pm j1.56$.

5. Encuentre los ángulos de salida de los lugares geométricos de las raíces a partir de los polos complejos. Para el polo en lazo abierto en $s = -2 + j2\sqrt{3}$, el ángulo de salida θ es

$$\theta = 180° - 120° - 130.5° - 90° + 106°$$

o bien

$$\theta = -54.5°$$

(El ángulo de salida a partir del polo en lazo abierto en $s = -2 - j2\sqrt{3}$ es 54.5°.)

6. Seleccione un punto de prueba en la vecindad amplia del eje $j\omega$ y el origen y aplique la condición de ángulo. Si el punto de prueba no satisface la condición de ángulo, seleccione otros hasta que uno la cumpla. Prosiga con el mismo proceso y ubique una cantidad suficiente de puntos que satisfagan la condición de ángulo.

La figura 6-43 muestra los lugares geométricos de las raíces para este sistema. A partir del paso 4 el sistema es estable para $23.3 < K < 35.7$. De lo contrario, es inestable.

A-6-3. Trace los lugares geométricos de las raíces del sistema de control de la figura 6−44(a).

Solución. Los polos en lazo abierto se localizan en $s = 0$, $s = -3 + j4$ y $s = -3 - j4$. Existe una ramificación del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real entre el origen y $-\infty$. Hay tres asíntotas para los lugares geométricos de las raíces. Los ángulos de las asíntotas son

$$\text{Ángulos de las asíntotas} = \frac{\pm 180°(2k + 1)}{3} = 60°, -60°, 180°$$

Remitiéndonos a la ecuación (6−15), la intersección de las asíntotas y el eje real se obtiene como

$$\sigma_a = -\frac{0 + 3 + 3}{3} = -2$$

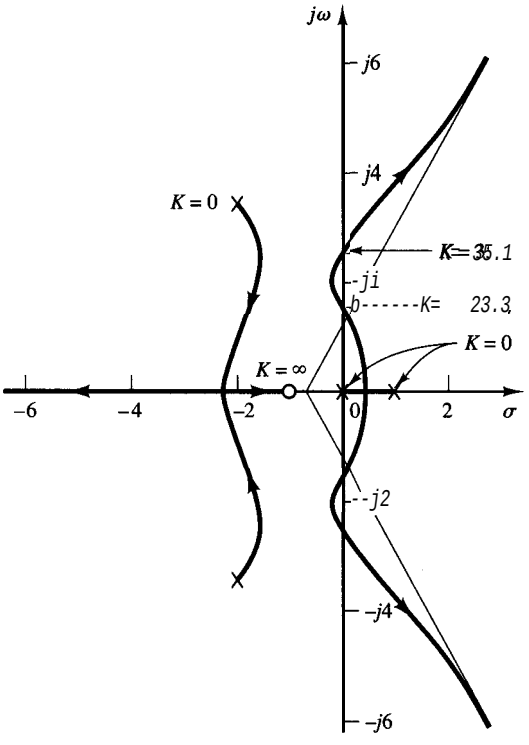


Figura 6-43
Gráfica del lugar geométrico de las raíces.

A continuación verifiquemos los puntos de desprendimiento y de ingreso. Para este sistema tenemos que

$$K = -s(s^2 + 6s + 25)$$

Ahora establecemos

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 12s + 25) = 0$$

lo cual produce

$$s = -2 + j2.0817, \qquad s = -2 - j2.0817$$

Observe que la condición de ángulo en los puntos $s = -2 \pm j2.0817$ no se satisface, por lo que no se trata de puntos de desprendimiento ni de ingreso. De hecho, si calculamos el valor de K, obtenemos

$$K = -s(s^2 + 6s + 25)\Big|_{s=-2\pm j2.0817} = 34 \pm j18.04$$

(Para tratarse de un punto de desprendimiento o de ingreso real, el valor correspondiente de K debe ser real y positivo.)

El ángulo de salida del polo complejo de la mitad superior del plano s es

$$\theta = 180° - 126.87° - 90°$$

o bien

$$\theta = -36.87°$$

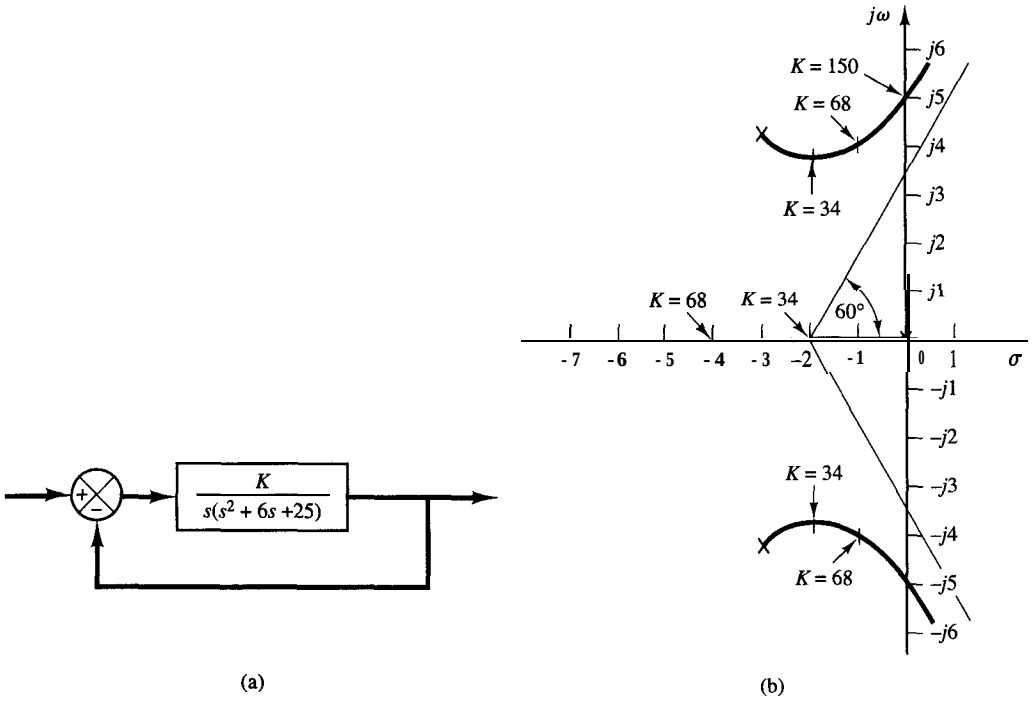


Figura 6-44
(a) Sistema de control; (b) gráfica del lugar geométrico de las raíces.

Los puntos en los que las ramificaciones del lugar geométrico cruzan el eje imaginario se encuentran sustituyendo $s = j\omega$ en la ecuación característica y despejando la ecuación para ω y K del modo siguiente: considere que la ecuación característica es

$$s^3 + 6s^2 + 25s + K = 0$$

de aquí

$$(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 25(j\omega) + K = (-6\omega^2 + K) + j\omega(25 - \omega^2) = 0$$

lo cual produce

$$\omega = \pm 5, \quad K = 150 \quad \text{u} \quad \omega = 0 \quad K = 0$$

Las ramificaciones del lugar geométrico de las raíces cruzan el eje imaginario en $\omega = 5$ y $\omega = -5$. El valor de la ganancia K en los puntos de cruce es 150. Asimismo, la ramificación del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real toca el eje imaginario en $\omega = 0$. La figura 6-44(b) muestra una **gráfica** del lugar geométrico de las raíces para el sistema.

Se observa que, si el orden del numerador de $G(s)H(s)$ es menor que el del denominador en dos o más, y si algunos de los polos en lazo cerrado se mueven sobre el lugar geométrico de las raíces hacia la derecha, conforme la ganancia K se incrementa, los otros polos en lazo cerrado deben moverse hacia la izquierda conforme la ganancia K se incrementa. Este hecho se observa claramente en este problema. Si se incrementa la ganancia K de $K = 34$ a $K = 68$, los polos complejos conjugados en lazo cerrado se mueven de $s = -2 + j3.65$ a $s = -1 + j4$; el tercer polo se mueve de $s = -2$ (que corresponde a $K = 34$) as $= -4$ (que corresponde a $K = 68$). Por tanto, el movimiento de los dos polos en lazo cerrado complejos conjugados a la derecha en una unidad provocan que el polo en lazo cerrado restante (en este caso el polo real), se mueva a la izquierda en dos unidades.

A-6-4. Considere el sistema de la figura 6−45(a). Trace los lugares geométricos de las raíces para el sistema. Observe que para valores pequeños o grandes de K el sistema es subamortiguado y para valores medios de K es sobreamortiguado.

Solución. Existe un lugar geométrico de las raíces sobre el eje real entre el origen y $-\infty$. Los ángulos de las asíntotas de las ramificaciones de este lugar geométrico se obtienen como

$$\text{Ángulos de las asíntotas} = \frac{\pm 180°(2k + 1)}{3} = 60°, -60°, -180°$$

La intersección de las asíntotas y el eje real se ubica sobre el eje real en

$$\sigma_a = -\frac{0 + 2 + 2}{3} = -1.3333$$

Los puntos de desprendimiento y de ingreso se encuentran a partir de $dK/ds = 0$. Dado que la ecuación característica es

$$s^3 + 4s^2 + 5s + K = 0$$

tenemos que

$$K = -(s^3 + 4s^2 + 5s)$$

Ahora establecemos

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 8s + 5) = 0$$

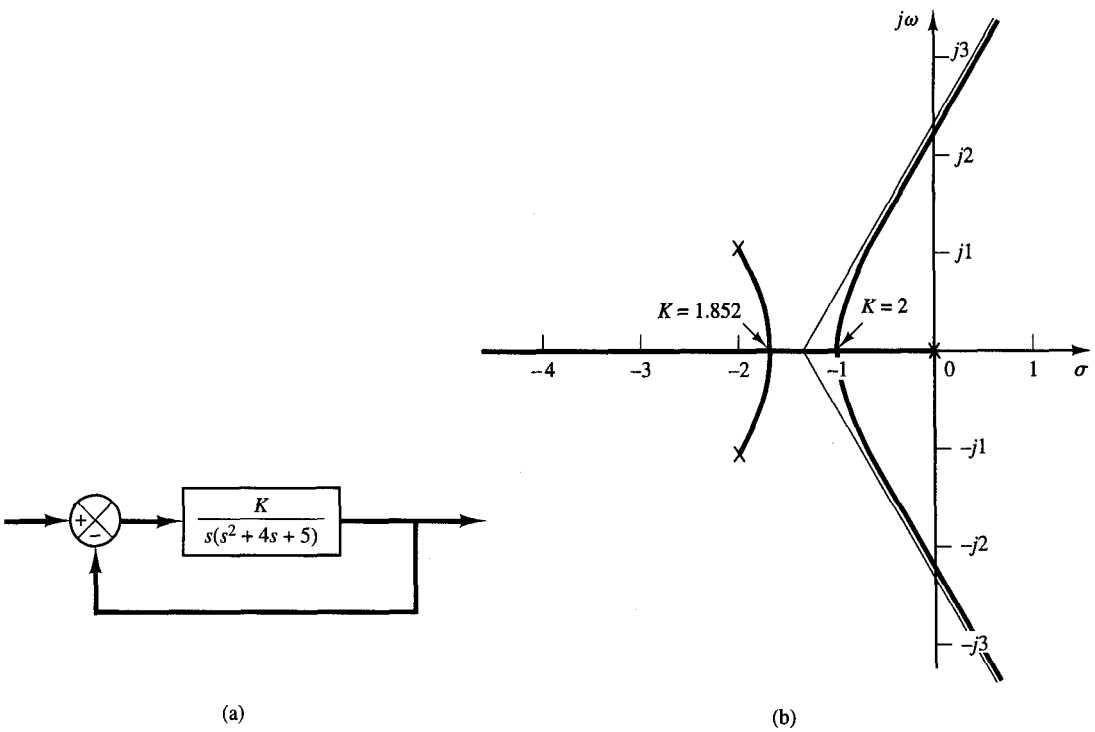


Figura 6-45
(a) Sistema de control; (b) gráfica del lugar geométrico de las raíces.

10 cual produce

$$s = -1, \qquad s = -1.6667$$

Dado que estos puntos están sobre los lugares geométricos de las raíces, son puntos de desprendimiento y de ingreso reales. (En el punto $s = -1$, el valor de K es 2, y en el punto $s = -1.6667$, el valor de K es 1.852.)

El ángulo de salida de un polo complejo en la mitad superior del planos se obtiene a partir de

$$\theta = 180° - 153.43° - 90°$$

o bien

$$\theta = -63.43°$$

La ramificación del lugar geométrico de las raíces a partir del polo complejo en la mitad superior del plano s corta el eje real en $s = -1.6667$.

A continuación determinaremos los puntos en donde las ramificaciones del lugar geométrico de las raíces cruzan el eje imaginario. Sustituyendo $s = j\omega$ en la ecuación característica, tenemos que

$$(j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + 5(j\omega) + K = 0$$

o bien

$$(K - 4\omega^2) + jw(5 - \omega^2) = 0$$

a partir de lo cual obtenemos

$$\omega = \pm\sqrt{5}, \qquad K = 20 \qquad u \qquad \omega = 0, \qquad K = O$$

Las ramificaciones del lugar geométrico de las raíces cruzan el eje imaginario en $\omega = \sqrt{5}$ y $\omega = -\sqrt{5}$. La ramificación del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real toca el eje $j\omega$ en $\omega = 0$. La figura 6–45(b) contiene un trazo de los lugares geométricos de las raíces para el sistema.

Observe que, dado que este sistema es de tercer orden, existen tres polos en lazo cerrado. La naturaleza de la respuesta del sistema a una entrada determinada depende de las ubicaciones de los polos en lazo cerrado.

Para $0 < K < 1.852$, existe un conjunto de polos complejos conjugados en lazo cerrado y un polo real en lazo cerrado. Para $1.852 \leq K \leq 2$, hay tres polos reales en lazo cerrado. Por ejemplo, los polos en lazo cerrado se ubican en

$$s = -1.667, \qquad s = -1.667, \qquad s = -0.667, \qquad \text{para } K = 1.852$$

$$s = -1, \qquad s = -1, \qquad s = -2, \qquad \text{para } K = 2$$

Para $2 < K$, hay un conjunto de polos complejos conjugados en lazo cerrado y un polo real en lazo cerrado. Por tanto, los valores pequeños de K ($0 < K < 1.852$) corresponden a un sistema subamortiguado. (Dado que el polo real en lazo cerrado domina, sólo aparece una pequeña onda en la respuesta transitoria.) Los valores medios de K ($1.852 \leq K \leq 2$) corresponden a un sistema sobreamortiguado. Los valores grandes de K ($2 < K$) corresponden a un sistema subamortiguado. Para valores grandes de K el sistema responde con mucho mayor rapidez que para valores más pequeños de K.

A-6-5. Trace los lugares geométricos de las raíces para el sistema de la figura 6–46(a).

Solución. Los polos en lazo abierto se localizan en $s = 0$, $s = -1$, $s = -2 + j3$ y $s = -2 - j3$. Existe un lugar geométrico de las raíces sobre el eje real entre los puntos $s = 0$ y $s = -1$. Las asíntotas se encuentran del modo siguiente:

$$\text{Ángulos de las asíntotas} = \frac{\pm 180°(2k + 1)}{4} = 45°, -45°, 135°, -135°$$

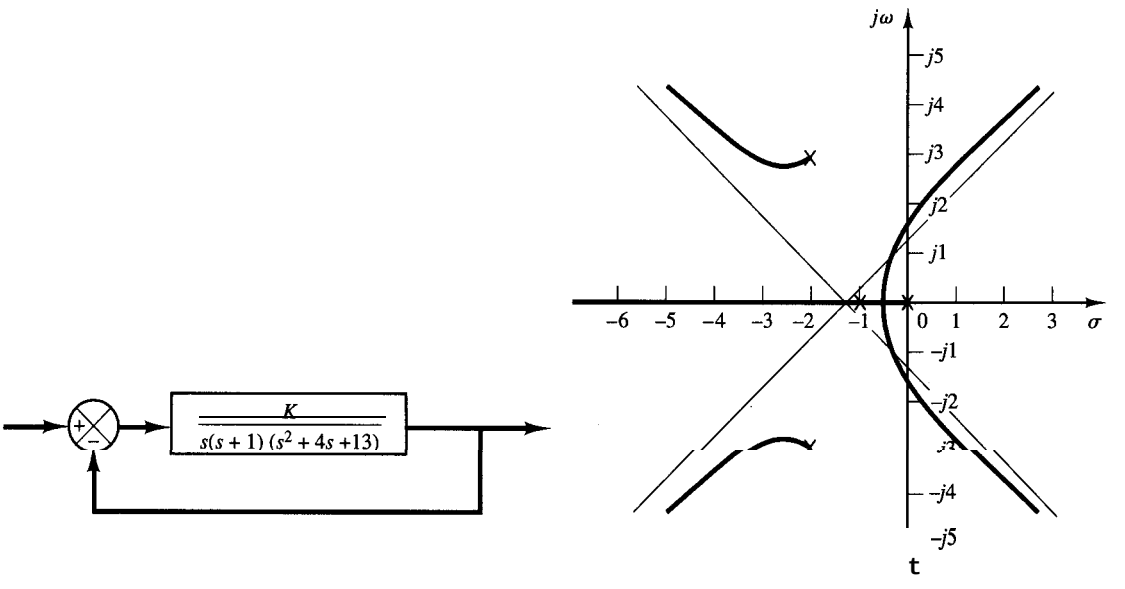


Figura 6-46
(a) Sistema de control; (b) gráfica del lugar geométrico de las raíces.

La intersección de las asíntotas y el eje real se encuentra a partir de

$$\sigma_a = -\frac{0 + 1 + 2 + 2}{4} = -1.25$$

Los puntos de desprendimiento y de ingreso se encuentran a partir de $dK/ds = 0$. Considerando que

$$K = -s(s + 1)(s^2 + 4s + 13) = -(s^4 + 5s^3 + 17s^2 + 13s)$$

tenemos que

$$\frac{dK}{ds} = -(4s^3 + 15s^2 + 34s + 13) = 0$$

a partir de lo cual obtenemos

$$s = -0.467, \qquad s = -1.642 + j2.067, \qquad s = -1.642 - j2.067$$

El punto $s = -0.467$ está sobre un lugar geométrico de las raíces. Por tanto, se trata un punto de desprendimiento real. Los valores de la ganancia K que corresponden a los puntos $s = -1.642 \pm j2.067$ son cantidades complejas. Dado que los valores de ganancia no son positivos reales, estos puntos no son de desprendimiento ni de ingreso.

El ángulo de salida del polo complejo en la mitad superior del plano s es

$$\theta = 180° - 123.69° - 108.44° - 90°$$

o bien

$$\theta = -142.13°$$

A continuación encontraremos los puntos en donde los lugares geométricos de las raíces cruzan el eje $j\omega$. Dado que la ecuación característica es

$$. s^4 + 5s^3 + 17s^2 + 13s + K = 0$$

si sustituimos s por $j\omega$ dentro de ella, obtenemos

$$(j\omega)^4 + 5(j\omega)^3 + 17(j\omega)^2 + 13(j\omega) + K = 0$$

o bien

$$(K + \omega^4 - 17\omega^2) + j\omega(13 - 5\omega^2) = 0$$

a partir de la cual obtenemos

$$\omega = \pm 1.6125, \qquad K = 37.44 \qquad \text{u} \qquad \omega = 0, \qquad K = 0$$

Las ramificaciones del lugar geométrico de las raíces que se extienden al semiplano derecho del plano s cruzan el eje imaginario en $\omega = \pm 1.6125$. Asimismo, la ramificación del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real toca el eje imaginario en $\omega = 0$. La figura 6–46(b) muestra un trazo de los lugares geométricos de las raíces para el sistema. Observe que cada ramificación del lugar geométrico que se extiende al semiplano derecho del plano s cruza su propia asíntota.

A-6-6. Trace los lugares geométricos de las raíces para el sistema de la figura 6–47(a).

Solución. Existe un lugar geométrico de las raíces sobre el eje real entre los puntos s = – 1 y s = -3.6. Las asíntotas se determinan del modo siguiente:

$$\text{Ángulos de las asíntotas} = \frac{\pm 180°(2k + 1)}{3 - 1} = 90°, -90°$$

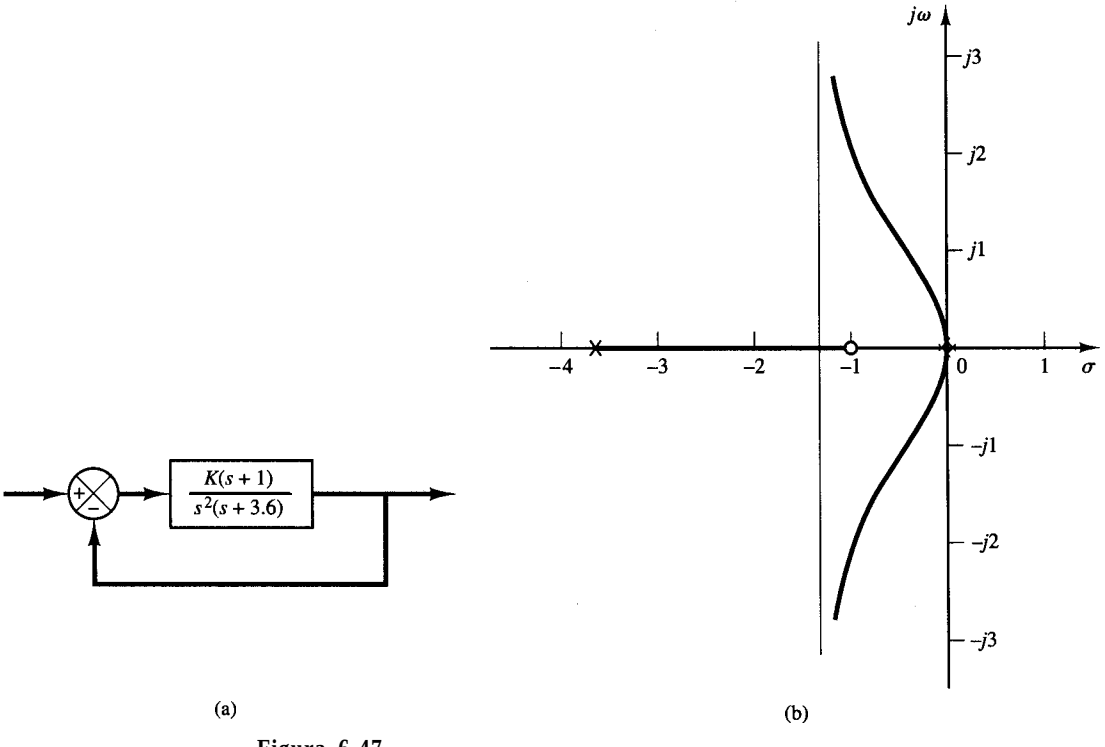


Figura 6-47
(a) Sistema de control; (b) gráfica del lugar geométrico de las raíces.

La intersección de las asíntotas y el eje real se encuentra a partir de

$$\sigma_a = -\frac{0 + 0 + 3.6 - 1}{3 - 1} = -1.3$$

Dado que la ecuación característica es

$$s^3 + 3.6s^2 + K(s + 1) = 0$$

tenemos que

$$K = -\frac{s^3 + 3.6s^2}{s + 1}$$

Los puntos de desprendimiento y de ingreso se encuentran a partir de

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(3s^2 + 7.2s)(s + 1) - (s^3 + 3.6s^2)}{(s + 1)^2} = 0$$

o bien

$$s^3 + 3.3s^2 + 3.6s = 0$$

a partir de lo cual obtenemos

$$s = 0, \qquad s = -1.65 + j0.9367, \qquad s = -1.65 - jo.9367$$

El puntos = 0 corresponde al punto de desprendimiento real. Pero los puntos s = − 1.65 ± jo.9367 no son ni de desprendimiento ni de ingreso, debido a que los valores de la ganancia K correspondientes se convierten en cantidades complejas.

Para verificar los puntos en los que las ramificaciones del lugar geométrico de las raíces cruzan el eje imaginario, sustituya s por jo en la ecuación característica.

$$(j\omega)^3 + 3.6(j\omega)^2 + Kj\omega + K = 0$$

o bien

$$(K - 3.6\omega^2) + j\omega(K - \omega^2) = 0$$

Observe que esta ecuación se satisface sólo si $\omega = 0$, $K = 0$. Debido a la presencia de un polo doble en el origen, el lugar geométrico de las raíces es tangente al eje $j\omega$ en $\omega = 0$. Las ramificaciones del lugar geométrico de las raíces no cruzan el eje jw. La figura 6−47(b) es un trazo del lugar geométrico de las raíces para este sistema.

A-6-7. Trace los lugares geométricos de las raíces para el sistema de la figura 6−48(a).

Solución. Existe un lugar geométrico de las raíces sobre el eje real entre el punto s = -0.4 y s = -3.6. las asíntotas se encuentran del modo siguiente:

$$\text{Ángulos de las asíntotas} = \frac{\pm 180°(2k + 1)}{3 - 1} = 90°, -90°$$

La intersección de las asíntotas y el eje real se obtiene a partir de

$$\sigma_a = -\frac{0 + 0 + 3.6 - 0.4}{3 - 1} = -1.6$$

A continuación encontraremos los puntos de desprendimiento. Dado que la ecuación característica es

$$s^3 + 3.6s^2 + Ks + 0.4K = 0$$

tenemos que

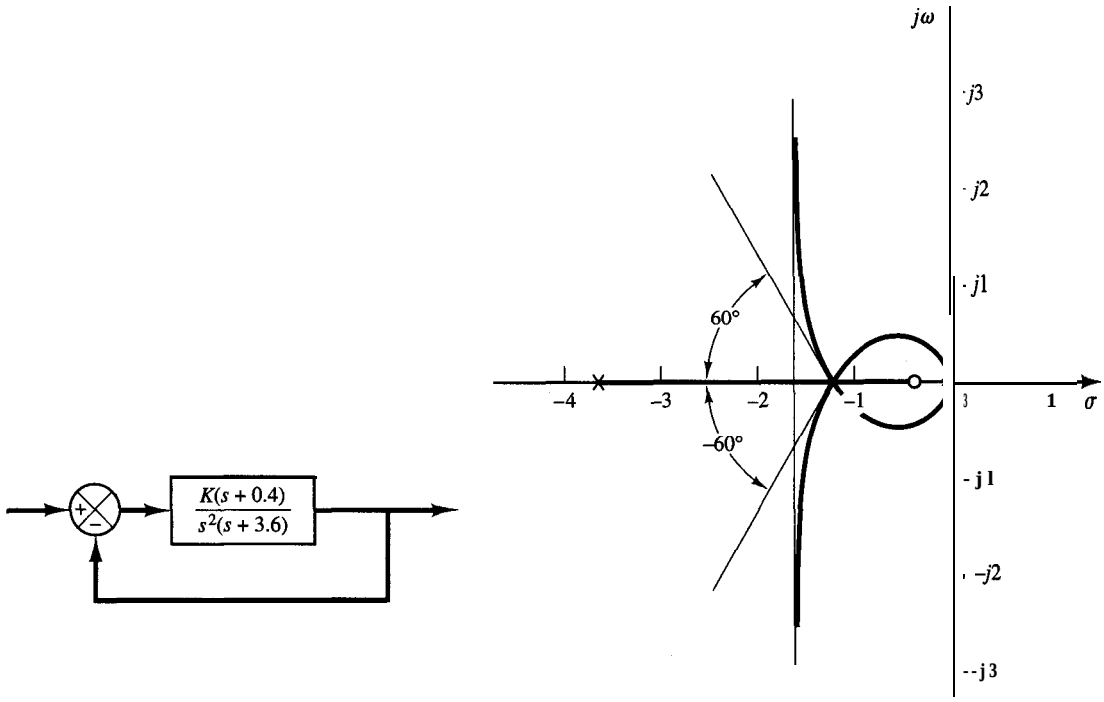


Figura **6–48**
(a) Sistema de control; (b) gráfica del lugar geométrico de las raíces.

$$K = -\frac{s^3 + 3.6s^2}{s + 0.4}$$

Los puntos de desprendimiento y de ingreso se encuentran a partir de

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(3s^2 + 7.2s)(s + 0.4) \quad (s^3 + 3.6s^2)}{(s + 0.4)^2} = 0$$

con lo cual obtenemos

$$s^3 + 2.4s^2 + 1.44s = 0$$

o bien

$$s(s + 1.2)^2 = 0$$

Por tanto, los puntos de desprendimiento o de ingreso están en $s = 0$ y $s = -1.2$. Observe que $s = -1.2$ es una raíz doble. Cuando ocurre una raíz doble en $dK/ds = 0$ en el punto $s = -1.2$, $d^2K/(ds^2) = 0$ en este punto. El valor de la ganancia K en el punto $s = -1.2$ es

$$K = -\frac{s^3 + 3.6s^2}{s + 0.4}\bigg|_{s=-1.2} = 4.32$$

Esto significa que, con $K = 4.32$ la ecuación característica tiene una raíz triple en el punto $s = -1.2$. Esto se verifica fácilmente del modo siguiente:

$$s^3 + 3.6s^2 + 4.32s + 1.728 = (s + 1.2)^3 = 0$$

Por tanto, se encuentran tres ramificaciones del lugar geométrico de las raíces en el puntos = -1.2. Los ángulos de salida en el puntos = -1.2 de las ramificaciones del lugar geométrico de las raíces que se aproximan a las asíntotas son $\pm 180°/3$, es decir, 60" y -60". (Véase el problema A-6-8.)

Por último, examinaremos si las ramificaciones del lugar geométrico de las raíces cruzan el eje imaginario. Sustituyendo s por jo en la ecuación característica, tenemos que

$$(j\omega)^3 + 3.6(j\omega)^2 + K(j\omega) + 0.4K = 0$$

o bien

$$(0.4K - 3.6\omega^2) + j\omega(K - \omega^2) = 0$$

Esta ecuación se satisface sólo si $\omega = 0$, $K = 0$. En el punto $\omega = 0$, el lugar geométrico de las raíces es tangente al eje $j\omega$ por la presencia de un polo doble en el origen. No hay puntos en los que las ramificaciones del lugar geométrico de las raíces crucen el eje imaginario.

Un trazo de los lugares geométricos de las raíces para este sistema aparece en la figura 6−48(b).

A-6-8. Remitiéndonos al problema A-6-7, obtenga las ecuaciones para las ramificaciones del lugar geométrico de las raíces del sistema de la figura 6−48(a). Demuestre que las ramificaciones del lugar geométrico de las raíces cruzan el eje real en el punto de desprendimiento en los ángulos $\pm 60°$.

Solución. Las ecuaciones para las ramificaciones del lugar geométrico de las raíces se obtienen a partir de la condición de ángulo

$$\underline{/\frac{K(s + 0.4)}{s^2(s + 3.6)}} = \pm 180°(2k + 1)$$

que puede reescribirse como

$$\underline{/s + 0.4} - 2\underline{/s} - \underline{/s + 3.6} = \pm 180°(2k + 1)$$

Sustituyendo s por σ + jo obtenemos

$$\underline{/\sigma + j\omega + 0.4} - 2\underline{/\sigma + \text{jo}} - \underline{/\sigma + j\omega + 3.6} = \pm 180°(2k + 1)$$

o bien

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + 0.4}\right) - 2\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + 3.6}\right) = \pm 180°(2k + 1)$$

Volviendo a ordenar, tenemos

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + 0.4}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + 3.6}\right) \pm 180°(2k + 1)$$

Tomando las tangentes de ambos miembros de esta última ecuación, y considerando que

$$\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + 3.6}\right) \pm 180°(2k + 1)\right] = \frac{\omega}{\sigma + 3.6}$$

obtenemos

$$\frac{\frac{\omega}{\sigma + 0.4} - \frac{\omega}{\sigma}}{1 + \frac{\omega}{\sigma + 0.4}\frac{\omega}{\sigma}} = \frac{\frac{\omega}{\sigma} + \frac{\omega}{\sigma + 3.6}}{1 - \frac{\omega}{\sigma}\frac{\omega}{\sigma + 3.6}}$$

10 cual se simplifica a

$$\frac{\omega\sigma - \omega(\sigma + 0.4)}{(\sigma + 0.4)\sigma + \omega^2} - \frac{\omega(\sigma + 3.6) + \omega\sigma}{\sigma(\sigma + 3.6) - \omega^2}$$

o bien

$$\omega(\sigma^3 + 2.4\sigma^2 + 1.44\sigma + 1.6\omega^2 + \sigma\omega^2) = 0$$

que puede simplificarse todavía más a

$$\omega[\sigma(\sigma + 1.2)^2 + (\sigma + 1.6)\omega^2] = 0$$

Para $\sigma \neq -1.6$, escribimos esta última ecuación como

$$\omega\left[\omega - (\sigma + 1.2)\sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma + 1.6}}\right]\left[\omega + (\sigma + 1.2)\sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma + 1.6}}\right] = 0$$

lo cual produce las ecuaciones para el lugar geométrico de las raíces del modo siguiente:

$$\omega = 0$$

$$\omega = (\sigma + 1.2)\sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma + 1.6}}$$

$$\omega = -(\sigma + 1.2)\sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma + 1.6}}$$

La ecuación $\omega = 0$ representa el eje real. El lugar geométrico de las raíces para $0 \leq K \leq cc$ está entre los puntos $s = -0.4$ y $s = -3.6$. (El eje real que no es este segmento de línea y el origen $s = 0$ corresponde al lugar geométrico de las raíces para $-\infty \leq K \leq 0.$)

Las ecuaciones

$$\omega = \pm(\sigma + 1.2)\sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma + 1.6}} \tag{6–31}$$

representan las ramificaciones complejas para $0 \leq K \leq \infty$. Estas dos ramificaciones se encuentran entre $\sigma = -1.6$ y $\sigma = 0$. [Véase la figura 6–48(b).] Las pendientes de las ramificaciones de los lugares geométricos de las raíces complejas en el punto de desprendimiento ($\sigma = -1.2$) se encuentran calculando los valores de $d\omega/d\sigma$ de la ecuación (6-31) en el punto $\sigma = -1.2$.

$$\left.\frac{d\omega}{d\sigma}\right|_{\sigma=-1.2} = \left.\pm\sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma + 1.6}}\right|_{\sigma=-1.2} = \pm\sqrt{\frac{1.2}{0.4}} = \pm\sqrt{3}$$

Dado que tan-l $\sqrt{3} = 60°$, las ramificaciones del lugar geométrico de las raíces intersecan el eje real con ángulos de $\pm 60°$.

A-6-9. Considere el sistema de la figura 6-49, que tiene una función de transferencia de la trayectoria directa inestable.Trace la gráfica del lugar geométrico de las raíces y ubique los polos en lazo cerrado. Demuestre que, aunque los polos en lazo cerrado se encuentran en el eje real negativo y el sistema no es oscilatorio, la curva de respuesta escalón unitario exhibirá un sobrepaso.

Solución. La gráfica del lugar geométrico de las raíces para este sistema aparece en la figura 6–50. Los polos en lazo cerrado se ubican en $s = -2$ y $s = -5$.

La función de transferencia en lazo cerrado se convierte en

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10(s + 1)}{s^2 + 7s + 10}$$

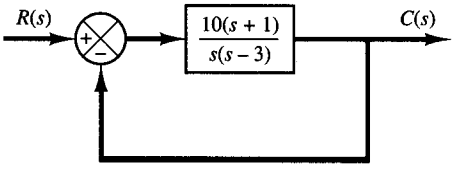


Figura 6–49
Sistema de control.

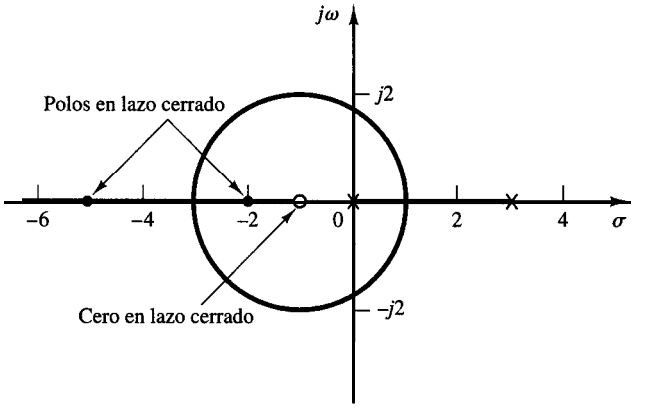


Figura 6–50
Gráfica del lugar geométrico de las raíces para el sistema de la figura 6-49.

La respuesta escalón unitario de este sistema es

$$C(s) = \frac{10(s + 1)}{s(s + 2)(s + 5)}$$

La transformada inversa de Laplace de $C(s)$ produce

$$c(t) = 1 + 1.666e^{-2t} - 2.666e^{-5t}, \qquad \text{para } t \geq 0$$

La curva de respuesta escalón unitario aparece en la figura 6-51. Aunque el sistema no es oscilatorio, la curva de respuesta escalón unitario exhibe un sobrepaso. (Esto se debe a la presencia de un cero en $s = -1$.)

A-6-10. Trace los lugares geométricos del sistema de control de la figura 6−52(a). Determine el rango de valores de la ganancia K para la estabilidad.

Solución. Los polos en laxo abierto se ubican en $s = 1$,s = -2 + $j\sqrt{3}$ y $s = -2 - j\sqrt{3}$. Existe un lugar geométrico de las raíces sobre el eje real entre los puntos $s = 1$ y $s = -\infty$. Las asíntotas de las ramificaciones del lugar geométrico de las raíces se encuentran del modo siguiente:

$$\text{Angulos de las asíntotas} = \frac{\pm 180°(2k + 1)}{3} = 60°, -60°, 180"$$

La intersección de las asíntotas y el eje real se obtiene como

$$\sigma_a = -\frac{-1 + 2 + 2}{3} = -1$$

Los puntos de desprendimiento y de ingreso se ubican a partir de $dK/ds = 0$. Dado que

$$K = -(s - 1)(s^2 + 4s + 7) = -(s^3 + 3s^2 + 3s - 7)$$

tenemos que

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 6s + 3) = 0$$

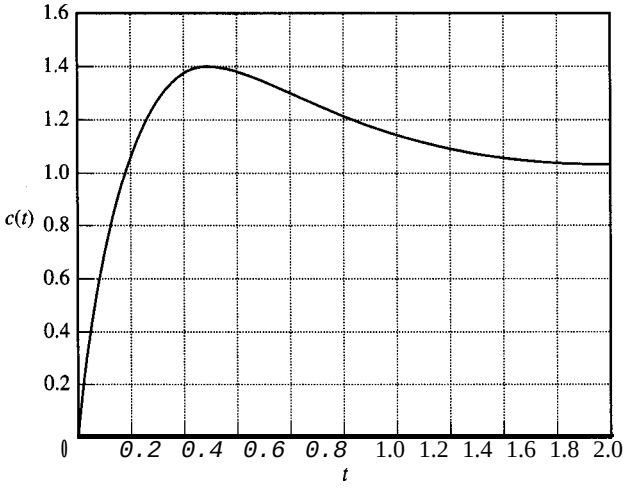


Figura 6-51
Curva de respuesta escalón unitario para el sistema de la figura 6-49.

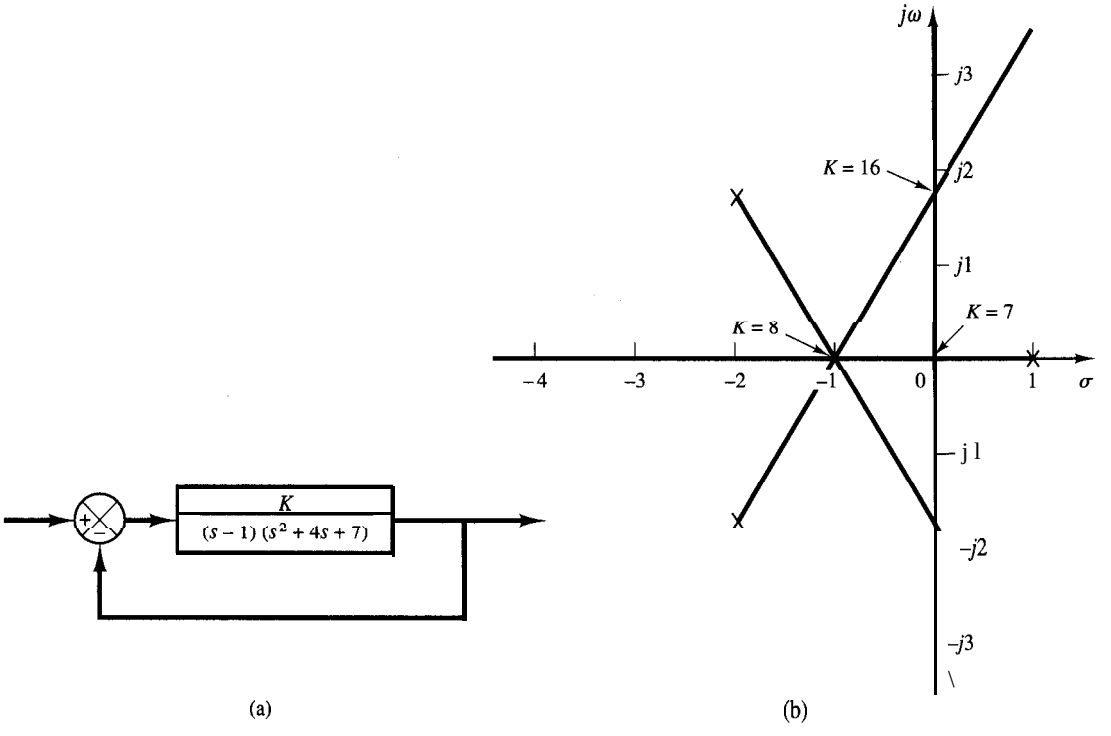


Figura 6–52
(a) Sistema de control; (b) gráfica del lugar geométrico de las raíces.

lo cual produce

$$(s + 1)^2 = 0$$

Por tanto, la ecuación $dK/ds = 0$ tiene una raíz doble en $s = -1$. El punto de desprendimiento se ubica en $s = -1$. Tres ramificaciones del lugar geométrico de las raíces se encuentran en este punto de desprendimiento. Los ángulos de salida de las ramificaciones en el punto de desprendimiento son $\pm 180°/3$, es decir, 60° y -60°.

A continuación determinaremos los puntos en los que las ramificaciones del lugar geométrico de las raíces cruzan el eje imaginario. Considerando que la ecuación característica es

$$(s-1)(s^2+4s+7)+K=0$$

0 bien

$$s^3+3s^2+3s-7+K=0$$

sustituimos s por $j\omega$ en ella y obtenemos

$$(j\omega)^3+3(j\omega)^2+3(j\omega)-7+K=0$$

Volviendo a escribir esta última ecuación, tenemos

$$(K-7-3\omega^2)+j\omega(3-\omega^2)=0$$

Esta ecuación se satisface cuando

$$\omega=\pm\sqrt{3}, \qquad K=7+3\omega^2=16 \qquad u \qquad \omega=0, \qquad K=7$$

Las ramificaciones del lugar geométrico cruzan el eje imaginario en $\omega=\pm\sqrt{3}$ (en donde $K=16$) y $\omega=0$ (en donde $K=7$). Dado que el valor de la ganancia K en el origen es 7, el rango de valores de la ganancia K para la estabilidad es

$$7<K<16$$

La figura 6−52(b) muestra un trazo de los lugares geométricos de las raíces para el sistema. Observe que todas las ramificaciones tienen partes rectas.

El hecho de que las ramificaciones del lugar geométrico de las raíces estén formadas por líneas rectas se verifica del modo siguiente: dado que la condición de ángulo es

$$\frac{K}{(s-1)(s+2+j\sqrt{3})(s+2-j\sqrt{3})}=\pm 180°(2k+1)$$

tenemos que

$$-\underline{/s-1}-\underline{/s+2+j\sqrt{3}}-\underline{/s+2-j\sqrt{3}}=\pm 180°(2k+1)$$

Sustituyendo s por $\sigma+j\omega$ en esta última ecuación,

$$\underline{\sigma-1+j\omega}+\underline{\sigma+2+j\omega+j\sqrt{3}}+\underline{\sigma+2+j\omega-j\sqrt{3}}=\pm 180°(2k+1)$$

o bien

$$\underline{\sigma+2+j(\omega+j\sqrt{3})}+\underline{\sigma+2+j(\omega-j\sqrt{3})}=-\underline{/\sigma-1+j\omega}\pm 180°(2k+1)$$

lo cual puede reescribirse como

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega+\sqrt{3}}{\sigma+2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\omega-\sqrt{3}}{\sigma+2}\right)=-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma-1}\right)\pm 180°(2k+1)$$

Tomando las tangentes de ambos miembros de esta última ecuación, obtenemos

$$\frac{\dfrac{\omega+\sqrt{3}}{\sigma+2}+\dfrac{\omega-\sqrt{3}}{\sigma+2}}{1-\left(\dfrac{\omega+\sqrt{3}}{\sigma+2}\right)\left(\dfrac{\omega-\sqrt{3}}{\sigma+2}\right)}=-\frac{\omega}{\sigma-1}$$

o bien

$$\frac{2\omega(\sigma + 2)}{\sigma^2 + 4\sigma + 4 - \omega^2 + 3} = -\frac{\omega}{\sigma - 1}$$

lo cual se simplifica a

$$2\omega(\sigma + 2)(\sigma - 1) = -\omega(\sigma^2 + 4\sigma + 7 - \omega^2)$$

o bien

$$\omega(3\sigma^2 + 6\sigma + 3 - \omega^2) = 0$$

Una simplificación adicional de esta última ecuación produce

$$\omega\left(\sigma + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\omega\right)\left(\sigma + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$$

lo cual define tres líneas:

$$\omega = 0, \qquad \sigma + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\omega = 0, \qquad \sigma + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\omega = 0$$

Por tanto, las ramificaciones del lugar geométrico de las raíces tienen tres líneas. Observe que los lugares geométricos de las raíces para $K > 0$ tienen partes de las rectas que aparecen en la figura 6–52(b). (Observe que cada recta empieza a partir de un polo en lazo abierto y se extiende a infinito en la dirección de 180°, 60" o −60°, medidos a partir del eje real.) La parte restante de cada recta corresponde a $K < 0$.

A-6-11. Considere el sistema de la figura 6–53(a). Trace los lugares geométricos de las raíces.

Solución. Los ceros en lazo abierto del sistema se ubican en $s = \pm j$. Los polos en lazo abierto se ubican en $s = 0$ y $s = -2$. Este sistema contiene dos polos y dos ceros. Por tanto, hay una posibilidad de que exista una ramificación circular del lugar geométrico de las raíces. De hecho, en este caso existe semejante lugar geométrico circular, como se aprecia a continuación. La condición de ángulo es:

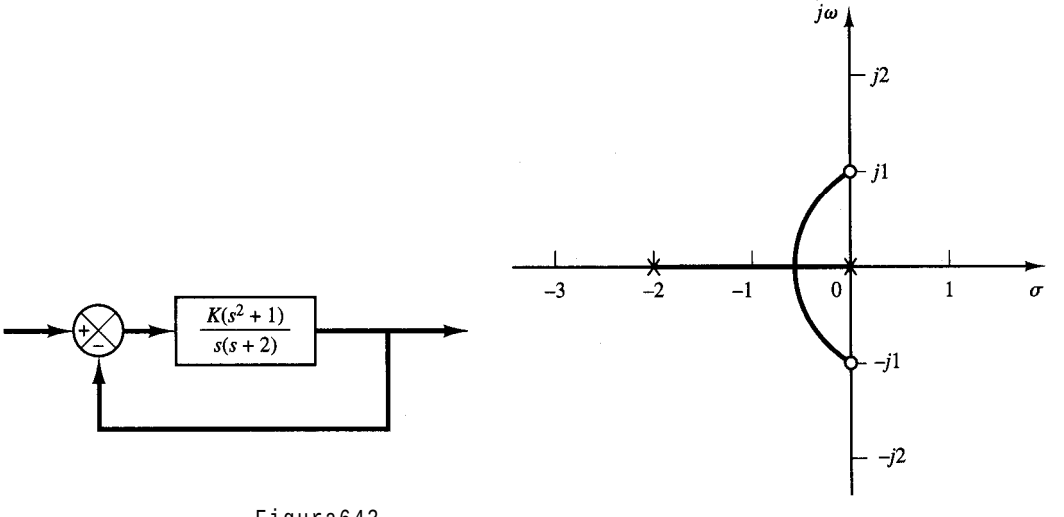


Figura643
(a) Sistema de control; (b) gráfica del lugar geométrico de las raíces.

$$\angle \frac{K(s+j)(s-j)}{s(s+2)} = \pm 180°(2k + 1)$$

o bien

$$\angle s + j + \angle s - j \quad \angle s \quad \angle s + 2 = \pm 180°(2k + 1)$$

Sustituyendo s por $\sigma + j\omega$ en este última ecuación, obtenemos

$$\angle \sigma + j\omega + j + \angle \sigma + j\omega - j = \angle \sigma + j\omega + \angle \sigma + 2 + j\omega \pm 180°(2k + 1)$$

o bien

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega + 1}{\sigma}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega - 1}{\sigma}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + 2}\right) \pm 180°(2k + 1)$$

Tomando las tangentes de ambos miembros de esta ecuación y considerando que

$$\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + 2}\right) \pm 180°\right] = \frac{\omega}{\sigma + 2}$$

obtenemos

$$\frac{\frac{\omega + 1}{\sigma} + \frac{\omega - 1}{\sigma}}{1 - \frac{\omega + 1}{\sigma}\frac{\omega - 1}{\sigma}} = \frac{\frac{\omega}{\sigma} + \frac{\omega}{\text{a-I-2}}}{1 \quad - \quad ; \quad *}$$

o bien

$$\omega\left[\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^2 + \omega^2 - \frac{5}{4}\right] = 0$$

lo cual es equivalente a

$$\omega = 0 \qquad \text{o} \qquad \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^2 + \omega^2 = \frac{5}{4}$$

Estas dos son las ecuaciones para los lugares geométricos de las raíces. La primera corresponde al lugar geométrico de las raíces sobre el eje real. (El segmento entre $s = 0$ y $s = -2$ corresponde al lugar geométrico de las raíces para $0 \leq K < \infty$. Las partes restantes del eje real corresponden al lugar geométrico de las raíces para $K < 0$.) La segunda ecuación corresponde a un circulo. Por tanto, existe un lugar geométrico de las raíces circular con centro en $\sigma = \frac{1}{2}$, $\omega = 0$ y radio igual a $\sqrt{5/2}$. Los lugares geométricos de las raíces se trazan en la figura 6−53(b). [La parte circular del lugar geométrico de las raíces a la izquierda de los ceros imaginarios, corresponde a $K > 0$. La parte circular del lugar geométrico de las raíces que no aparece en la figura 6−53(b) corresponde a $K < 0$.]

A-6-12. Considere el sistema de la figura 6-54. Determine el valor de α tal que el factor de amortiguamiento relativo ζ de los polos dominantes en lazo cerrado sea 0.5.

Solución. En este sistema, la ecuación característica es

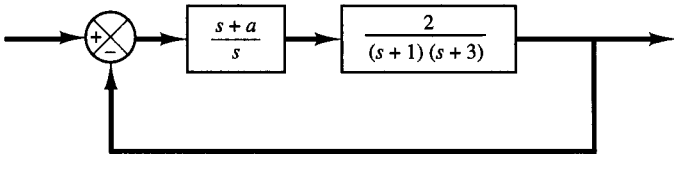


Figura 6–54
Sistema de control.

$$1 + \frac{2(s + a)}{s(s + 1)(s + 3)} = 0$$

Observe que la variable a no es un factor multiplicativo. Por tanto, necesitamos volver a escribir la ecuación característica

$$s(s + 1)(s + 3) + 2s + 2a = 0$$

del modo siguiente:

$$1 + \frac{2a}{s^3 + 4s^2 + 5s} = 0$$

Defina

$$2a = K$$

A continuación, obtenemos la ecuación característica en la forma

$$1 + \frac{K}{s(s^2 + 4s + 5)} = 0 \qquad (6\text{-}32)$$

En el problema A-6-4 construimos el diagrama del lugar geométrico de las raíces para el sistema definido mediante la ecuación (6-32). Por tanto, la solución para este problema está disponible en el problema A-6-4. Remitiéndonos a la figura 6−45(b) los polos en lazo cerrado que tienen el factor de amortiguamiento relativo $\zeta = 0.5$ se localizan en $s = 0.63 \pm j1.09$. El valor de K en el punto $s = -0.63 + j1.09$ se encuentra como 4.32. Por tanto, el valor de a en este problema se obtiene del modo siguiente:

$$a = \frac{K}{2} = 2.16$$

A-6-13. Considere el sistema de la figura 6−55(a). Determine el valor de a de modo que el factor de amortiguamiento relativo ζ de los polos dominantes en lazo cerrado sea 0.5.

Solución. La ecuación característica es

$$1 + \frac{10(s + a)}{s(s + 1)(s + 8)} = 0$$

La variable a no es un factor multiplicativo. Por tanto, necesitamos modificar la ecuación característica. Dado que la ecuación característica se escribe como

$$s^3 + 9s^2 + 18s + 10a = 0$$

volvemos a escribir esta ecuación de modo que a aparezca como un factor multiplicativo:

$$1 + \frac{10a}{s(s^2 + 9s + 18)} = 0$$

Defina

$$10a = K$$

Por tanto, la ecuación característica se convierte en

$$1 + \frac{K}{s(s^2 + 9s + 18)} = 0$$

Observe que la ecuación característica está en una forma conveniente para la construcción de los lugares geométricos de las raíces.

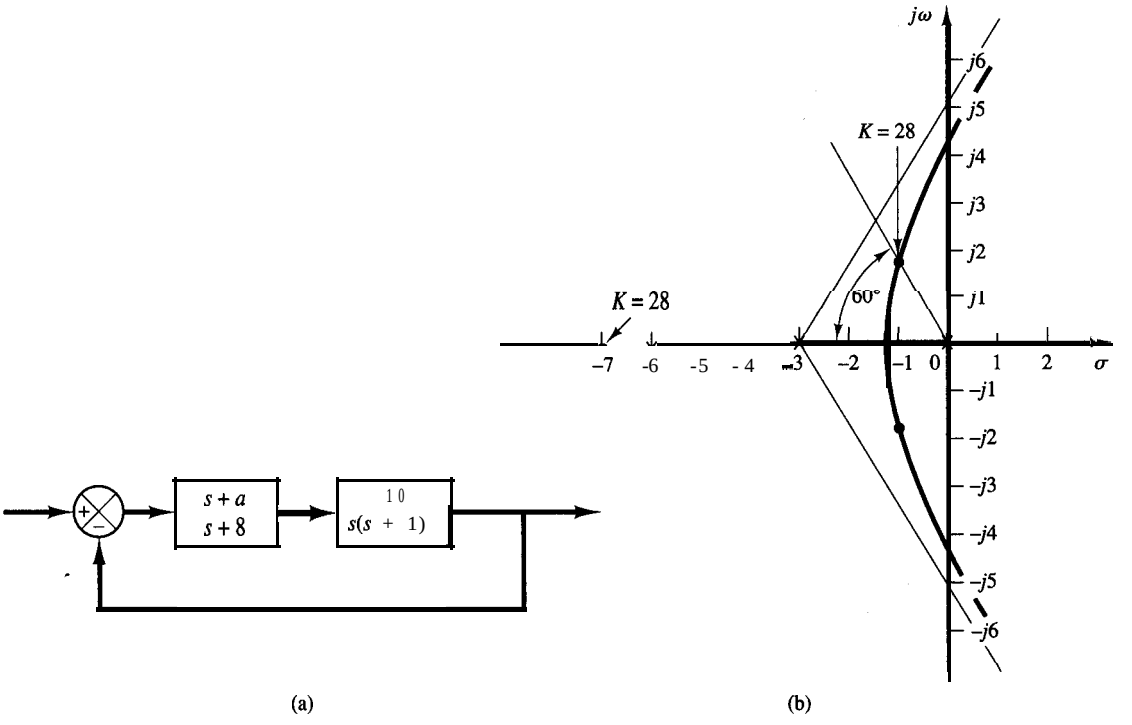


Figura 6–55
(a) Sistema de control; (b) gráfica del lugar geométrico de las raíces, en donde $K = 10a$.

Este sistema contiene tres polos y ningún cero. Los tres polos están en $s = 0$,s = -3 y $s = -6$. Existe una ramificación del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real entre los puntos $s = 0$ y $s = -3$. Asimismo, existe otra ramificación entre los puntos $s = -6$ y $s = -\infty$.

Las asíntotas para los lugares geométricos de las raíces se encuentran del modo siguiente:

$$\text{Ángulos de las asíntotas} = \frac{\pm 180°(2k + 1)}{3} = 60°, -60°, 180"$$

La intersección de las asíntotas y el eje real se obtiene a partir de

$$\sigma_a = -\frac{0 + 3 + 6}{3} = -3$$

Los puntos de desprendimiento y de ingreso se determinan a partir de $dK/ds = 0$, en donde

$$K = -(s^3 + 9s^2 + 18s)$$

Ahora establecemos

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 18s + 18) = 0$$

lo cual produce

$$s^2 + 6s + 6 = 0$$

o bien

$$s = -1.268, \qquad s = -4.732$$

El punto $s = -1.268$ está sobre una ramificación del lugar geométrico de las raíces. Por tanto, el punto $s = -1.268$ es un punto de desprendimiento real. Pero el punto $s = -4.732$ no está sobre el lugar geometrico de las raíces y, por tanto, no es un punto de desprendimiento ni de ingreso.

A continuación encontraremos los puntos en los que las ramificaciones del lugar geométrico de las raíces cruzan el eje imaginario. Sustituimos s por $j\omega$ en la ecuación característica

$$s^3 + 9s^2 + 18s + K = 0$$

del modo siguiente:

$$(j\omega)^3 + 9(j\omega)^2 + 18(j\omega) + K = 0$$

o bien

$$(K - 9\omega^2) + j\omega(18 - \omega^2) = 0$$

a partir de lo cual obtenemos

$$\omega = \pm 3\sqrt{2}, \qquad K = 9\omega^2 = 162 \qquad \text{u} \qquad \omega = 0, \qquad K = 0$$

Los puntos de cruce están en $\omega = \pm\sqrt{2}$ y el valor correspondiente de la ganancia K es 162. Asimismo, una ramificación del lugar geométrico de las raíces toca el eje imaginario en $\omega = 0$. La figura 6–55(b) muestra un trazo de los lugares geométricos de las raíces para el sistema.

Dado que el factor de amortiguamiento relativo de los polos dominantes en lazo cerrado se especifica como 0.5, el polo en lazo cerrado deseado en la mitad superior del plano s se ubica en la intersección de la ramificación del lugar geométrico de las raíces en la mitad superior del plano s con una línea recta que tiene un ángulo de 60° con el eje real negativo. Los polos dominantes en lazo cerrado deseados se ubican en

$$s = -1 + j1.732, \qquad s = -1 - j1.732$$

En estos puntos, el valor de la ganancia K es 28. Por tanto,

$$a = \frac{K}{10} = 2.8$$

Dado que el sistema contiene dos polos más que ceros, o más (de hecho, tres polos y ningún cero), el tercer polo se ubica sobre el eje real negativo partiendo del hecho de que la suma de los tres polos en lazo cerrado es -9. Por tanto, el tercer polo está en

$$s = -9 - (-1 + j1.732) - (-1 - j1.732)$$

o bien

$$s = -7$$

A-6-14. Considere el sistema de la figura 6–56(a). Trace los lugares geométricos de las raíces del sistema conforme la ganancia k de la realimentación de la velocidad varía de cero a infinito. Determine el valor de k de modo que los polos en lazo cerrado tengan un factor de amortiguamiento relativo ζ de 0.7.

Solución. La función de transferencia en lazo abierto es

$$\text{Función de transferencia en lazo abierto} = \frac{10}{(s + 1 + 10k)s + 10}$$

Dado que k no es un factor multiplicativo, modificamos la ecuación de modo que k aparezca como un factor multiplicativo. Dado que la ecuación característica es

$$s^2 + s + 10ks + 10 = 0$$

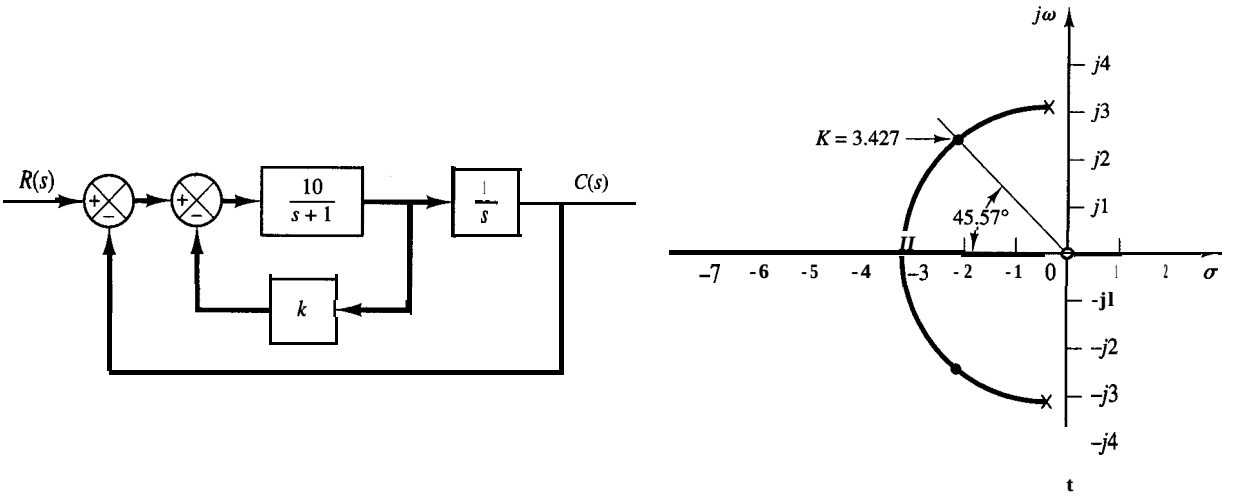


Figura 6-56
(a) Sistema de control; (b) gráfica del lugar geométrico de las raíces, en donde $K = 10k$.

volvemos a escribir esta ecuación del modo siguiente:

$$1 + \frac{10ks}{s^2 + s + 10} = 0 \tag{6-33}$$

Defina

$$10k = K$$

Por tanto, la ecuación (6-33) se convierte en

$$1 + \frac{Ks}{s^2 + s + 10} = 0$$

Observe que el sistema tiene un cero en $s = 0$ y dos polos en $s = -0.5 \pm j3.1225$. Dado que este sistema contiene dos polos y un cero, hay una posibilidad de que exista un lugar geométrico de las raíces circular. De hecho, este sistema tiene un lugar geométrico de las raíces circular, como se verá pronto. Dado que la condición de ángulo es

$$\underline{/\ \frac{Ks}{s^2 + s + 10}} = \pm 180°(2k + 1)$$

tenemos que

$$\underline{/\ s} - \underline{/\ s + 0.5 + j3.1225} - \underline{\ s + 0.5 - j3.1225} = \pm 180°(2k + 1)$$

Sustituyendo s por $\sigma + j\omega$ en esta última ecuación y volviendo a ordenar, obtenemos

$$\underline{\sigma + 0.5 + j(\omega + 3.1225) + \ \sigma + 0.5 + j(\omega - 3.1225)} = \underline{/\ \sigma + j\omega} \pm 180°(2k + 1)$$

lo cual se puede reescribir como

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega + 3.1225}{\sigma + 0.5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega - 3.1225}{\sigma + 0.5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) \pm 180°(2k + 1)$$

Tomando las tangentes de ambos miembros de esta última ecuación, obtenemos

$$\frac{\dfrac{\omega + 3.1225}{\sigma + 0.5} + \dfrac{\omega - 3.1225}{\sigma + 0.5}}{1 - \left(\dfrac{\omega + 3.1225}{\sigma + 0.5}\right)\left(\dfrac{\omega - 3.1225}{\sigma + 0.5}\right)} = \frac{\omega}{\sigma}$$

que se simplifica a

$$\frac{2\omega(\sigma + 0.5)}{(\sigma + 0.5)^2 - (\omega^2 - 3.1225^2)} = \frac{\omega}{\sigma}$$

o bien

$$\omega(\sigma^2 - 10 + \omega^2) = 0$$

lo cual produce

$$\omega = 0 \qquad \text{o} \qquad \sigma^2 + \omega^2 = 10$$

Observe que $\omega = 0$ corresponde al eje real. El eje real negativo (entre $s = 0$ y $s = -\infty$) corresponde a $K \geq 0$, y el eje real positivo corresponde a $K < 0$. La ecuación

$$\sigma^2 + \omega^2 = 10$$

es la ecuación de un círculo con centro en $\sigma = 0$, $\omega = 0$ y radio igual a $\sqrt{10}$. La parte de este círculo que se encuentra a la izquierda de los polos complejos corresponde al lugar geométrico de las raíces para $K > 0$. La parte del círculo que se encuentra a la derecha de los polos complejos corresponde al lugar geométrico de las raíces para $K < 0$. Por tanto, esta parte no es un lugar geométrico de las raíces para el sistema actual, en donde $K > 0$. La figura 6-56 (b) contiene un trazo de los lugares geométricos de las raíces.

Dado que requerimos que $\zeta = 0.7$ para los polos en lazo cerrado, encontramos la intersección del lugar geométrico de las raíces circular y una línea que tiene un ángulo de 45.57" (observe que cos 45.57" = 0.7), con el eje real negativo. La intersección está en $s = -2.214 + j\,2.258$. La ganancia K que corresponde a este punto es 3.427. Por tanto, el valor deseado de la ganancia de la realimentación de velocidad k es

$$k = \frac{K}{10} = 0.3427$$

A-6-15. Considere el sistema de control de la figura 6-57. Grafique los lugares geométricos de las raíces con MATLAB.

Solución. El programa MATLAB 6-10 genera una gráfica del lugar geométrico de las raíces como en la figura 6-58. Los lugares geométricos de las raíces deben ser simétricos con respecto al eje real. Sin embargo, la figura 6-58 demuestra lo contrario.

MATLAB proporciona su propio conjunto de valores de ganancia que se usan para calcular una gráfica del lugar geométrico de las raíces. Lo consigue mediante una rutina interna de adaptación de paso. Sin embargo, en ciertos sistemas, los cambios muy pequeños en la ganancia producen modificaciones drásticas en las ubicaciones de las raíces dentro de ciertos rangos de ganancias. Por lo tanto, MATLAB da un salto bastante grande en los valores de ganancia al calcular las raíces, y las ubicaciones de las raíces cambian en una cantidad relativamente grande. Al momento de graficar, MATLAB conecta estos puntos y produce una gráfica de aspecto extraño en la ubicación de las ganancias sensibles. Tales gráficas erróneas del lugar geométrico de las raíces son comunes cuando los lugares geométricos se aproximan a un polo doble (o triple o superior), dado que el lugar geométrico es muy sensible a los cambios de ganancia pequeños.

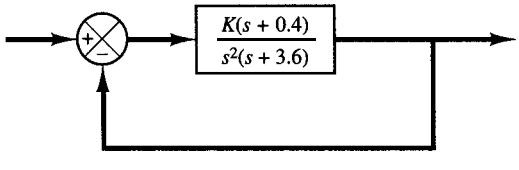


Figura 6–57
Sistema de control.

```
Programa MATLAB 6–10

% ---------- Gráfica del lugar geométrico de las raíces ----------

num = [0  0  1  0.4];
den = [1  3.6  0  0];
rlocus(num,den);
v = [–5  1  –3  3]; axis(v)
grid
title('Gráfica del lugar geométrico de las raíces
de G(s) = K(s + 0.4)/[s^2(s + 3.6)]')
```

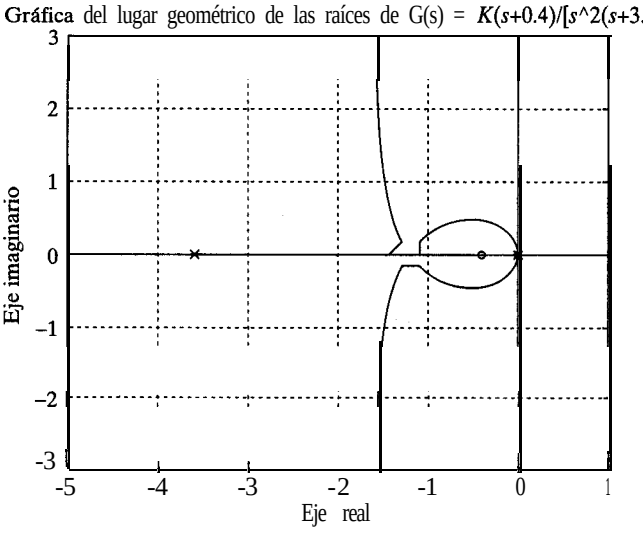


Figura 6–58
Gráfica del lugar geométrico de las raíces.

En el problema que se considera aquí, la región crítica de la ganancia K está entre 4.2 y 4.4. Por tanto, necesitamos configurar el tamaño de paso suficientemente pequeño en esta región. Dividimos la región para K del modo siguiente:

```
K1 = [0:0.2:4.2];
K2 = [4.2:0.002:4.4];
K3 = [4.4:0.2:10];
K4 = [10:5:200];
K  = [K1  K2  K3  K4];
```

Introduciendo el programa MATLAB 6-11 en la computadora, obtenemos la gráfica de la figura 6-59. Si cambiamos el comando `plot(r,'o')` del programa MATLAB 6-11 por `plot(r,'-')` obtenemos la figura 6-60. Las figuras 6-59 y 6-60 muestran respectivamente gráficas satisfactorias del lugar geométrico de las raíces.

A-6-16. Considere el sistema cuya función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$ se obtiene mediante

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 2)}$$

Usando MATLAB, grafique los lugares geométricos de las raíces y sus asíntotas.

Programa MATLAB 6–11

```
% ------- Gráfica del lugar geométrico de las raíces -------

num = [0  0  1  0.4];
den = [1  3.6  0  0];
K1 = [0:0.2:4.2];
K2 = [4.2:0.002:4.4];
K3 = [4.4:0.02:10];
K4 = [10:5:200];
K = [K1  K2  K3  K4];
r = rlocus(num,den,K);
plot(r,'o')
v = [-5  1  -5  5]; axis(v)
grid
title('Gráfica del lugar geométrico de las raíces
de G(s) = K(s + 0.4)/[s^2(s + 3.6)]')
xlabel('Eje real')
ylabel('Eje imaginario')
```

Solución. Ahora graficaremos en un diagrama los lugares geométricos de las raíces y las asíntotas. Dado que la función de transferencia en lazo abierto se obtiene mediante

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 2)} = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

la ecuación para las asíntotas se obtiene del modo siguiente: considerando que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 2s} \doteq \lim_{s\to\infty} \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} = \frac{K}{(s + 1)^3}$$

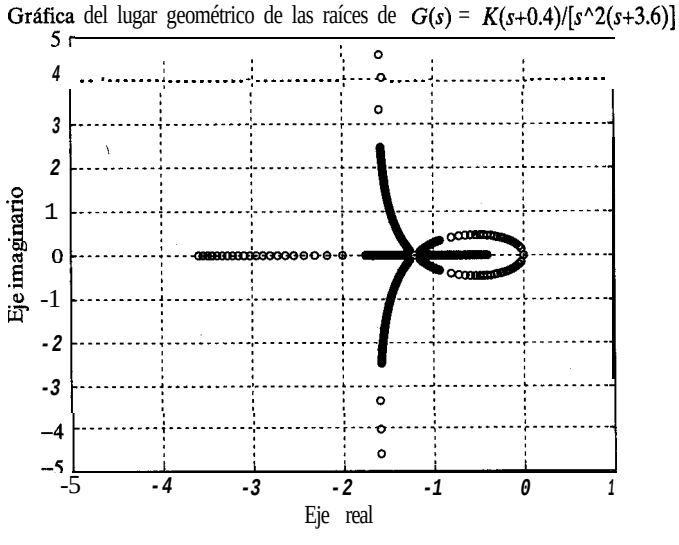


Figura 6-59
Gráfica del lugar geométrico de las raíces.

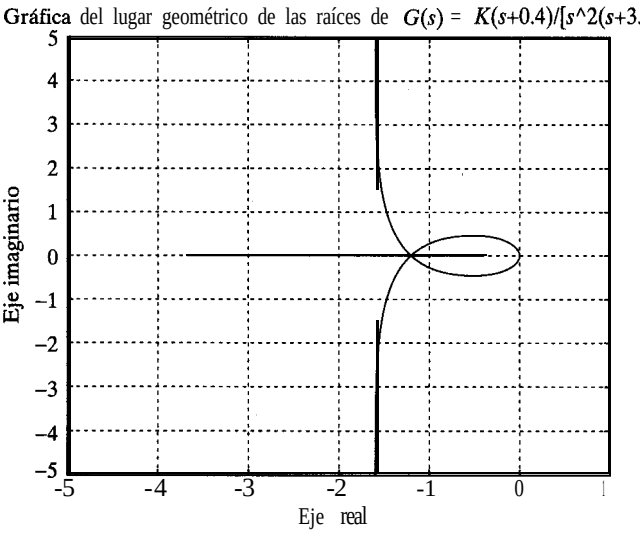


Figura 6-60
Gráfica del lugar geométrico de las raíces.

la ecuación para las asíntotas se obtiene mediante

$$G_a(s)H_a(s) = \frac{K}{(s+1)^3}$$

Por tanto, para el sistema, tenemos que

```
num = [0   0   0   1]
den = [1   3   2   0]
```

y para las asíntotas,

```
numa = [0   0   0   1]
dena = [1   3   3   1]
```

Al usar los siguientes comandos root-locus (lugar geométrico de las raíces) y plot **(graficar)**

```
r = rlocus(num,den)
a = rlocus(numa,dena)
plot([r a])
```

el número de renglones de r y de a debe ser el mismo. Para asegurar esto, incluimos la constante de ganancia K en los comandos. Por ejemplo,

```
K1 = 0:0.1:0.3;
K2 = 0.3:0.005:0.5:
K3 = 0.5:0.5:10;
K4 = 10:5:100;
K  = [K1  K2  K3  K4]
r  = rlocus(num,den,K)
a = rlocus(numa,dena,K)
y = Ir    al
plot(y,'')
```

Incluir la ganancia K en el comando rlocus asegura que la matriz r y la matriz a tengan la misma cantidad de renglones. El programa MATLAB 6-12 generará una gráfica de los lugares geométricos de las raíces y sus asíntotas.VCase la figura 6-61.

Programa MATLAB 6–12

```
% -------- Gráficas del lugar geométrico de las raíces ---------

num = [0   0   0   1];
den = [1   3   2   0];
numa = [0   0   0   1];
dena = [1   3   3   1];
K1 = 0:0.1:0.3;
K2 = 0.3:0.005:0.5;
K3 = 0.5:0.5:10;
K4 = 10:5:100;
K = [K1   K2   K3   K4];
r = rlocus(num,den,K);
a = rlocus(numa,dena,K);
y = [r   a];
plot(y,'-')
v = [-4   4   -4   4]; axis(v)
grid
title('Gráfica del lugar geométrico de las raíces
de G(s) = K/[s(s + 1)(s + 2)] y asíntotas')
xlabel('Eje real')
ylabel('Eje imaginario')

% ***** Dibujar en forma manual los polos en lazo abierto
en la copia permanente *****
```

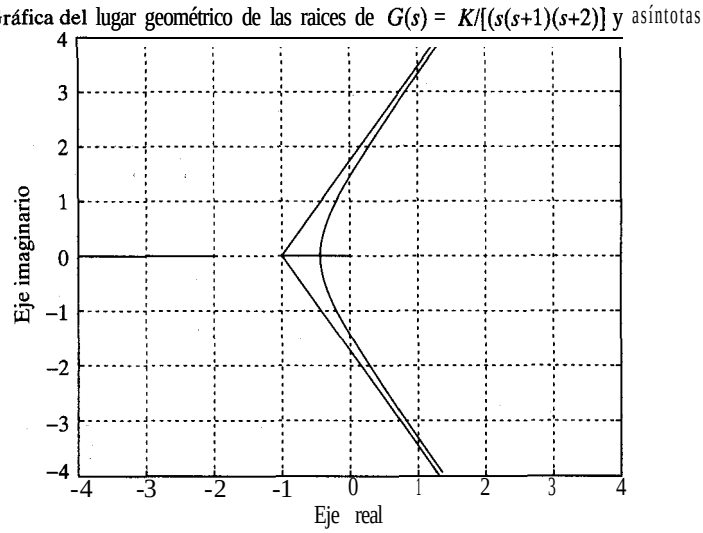


Figura 6–61
Gráfica del lugar geométrico de las raíces.

Es posible dibujar dos o más gráficas en un diagrama mediante el comando hold (mantener). El programa MATLAB 6-13 usa el comando **hold.** La **gráfica** del lugar geométrico de las raíces resultante aparece en la figura 6-62.

Programa MATLAB 6-13

```
% ---------- Gráficas del lugar geométrico de las raíces ----------

num = [0   0   0   1];
den = [1   3   2   0];
numa = [0   0   0   1];
dena = [1   3   3   1];
K1 = 0:0.1:0.3;
K2 = 0.3:0.005:0.5;
K3 = 0.5:0.5:10;
K4 = 10:5:100;
K = [K1   K2   K3   K4];
r = rlocus(num,den,K);
a = rlocus(numa,dena,K);
plot(r,'o')
hold
Current plot held
plot(a,'-')
v = [-4   4   -4   4]; axis(v)
grid
title('Gráfica del lugar geométrico de las raíces
de G(s) = K/[s(s + 1)(s + 2)] y las asíntotas')
xlabel('Eje real')
ylabel('Eje imaginario')

% ***** Dibujar manualmente los polos en lazo abierto en la copia
permanente *****

% ***** Eliminar el efecto de hold sobre las gráficas *****

hold
Current plot released
```

A-6-17. Considere un sistema con realimentación unitaria con la siguiente función de transferencia de la trayectoria directa G(s):

$$G(s) = \frac{K(s + 2)^2}{(s^2 + 4)(s + 5)^2}$$

Grafique los lugares geométricos de las raíces para el sistema con MATLAB.

Solución. El programa MATLAB 6-14 sirve para **graficar** los lugares geométricos de las raíces. La gráfica del lugar geométrico de las raíces resultante aparece en la figura 6-63.

Observe que éste es un caso especial en el que no existe un lugar geométrico de las raíces sobre el eje real. Esto significa que, para cualquier valor de $K > 0$, los polos en lazo cerrado del sistema son dos conjuntos de poloscomplejos conjugados. (No existen polos reales en lazo cerrado.) Dado que no existen polos en lazo cerrado en el semiplano derecho del plano s, el sistema es estable para todos los valores de $K > 0$.

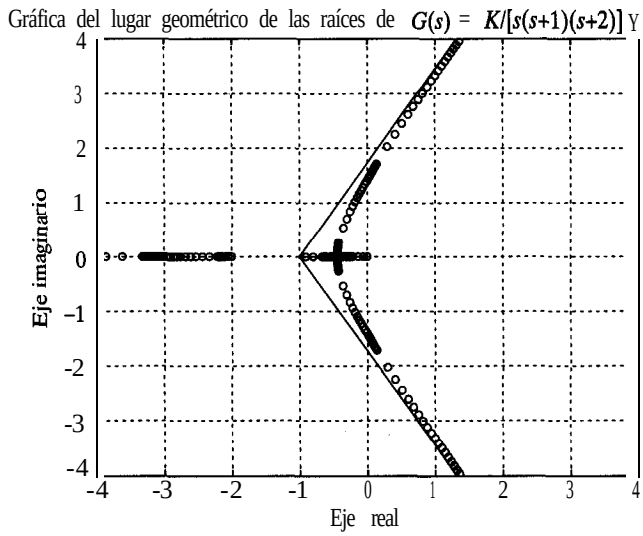


Figura 6-62
Gráfica del lugar geométrico de las raíces.

Programa MATLAB 6–14

```
% ---------- Gráfica del lugar geométrico de las raíces ----------
num = [0  0  1  4  4];
den = [1  10  29  40  100];
r = rlocus(num,den);
plot(r,'o')
hold
plot(r,'-')
v = [-8  4  -6  6]; axis(v) axis('square')
grid
title('Gráfica del lugar geométrico de las raíces
de G(s) = (s + 2)^2/[(s^2 + 4)(s + 5)^2]')
xlabel('Eje real')
ylabel('Eje imaginario')
```

A-6-18. Considere el sistema con el retardo de transporte de la figura 6−64(a). Trace los lugares geométricos de las raíces y encuentre los dos pares de polos en lazo cerrado más cercanos al eje $j\omega$.

Usando sólo los polos dominantes en lazo cerrado, obtenga la respuesta escalón unitario y trace la curva de respuesta.

Solución. La ecuación característica es

$$\frac{2e^{-0.3s}}{s+1} + 1 = 0$$

que es equivalente a las condiciones siguientes de ángulo y magnitud:

$$\underline{/\ \frac{2e^{-0.3s}}{s+1}} = \pm 180°(2k + 1)$$

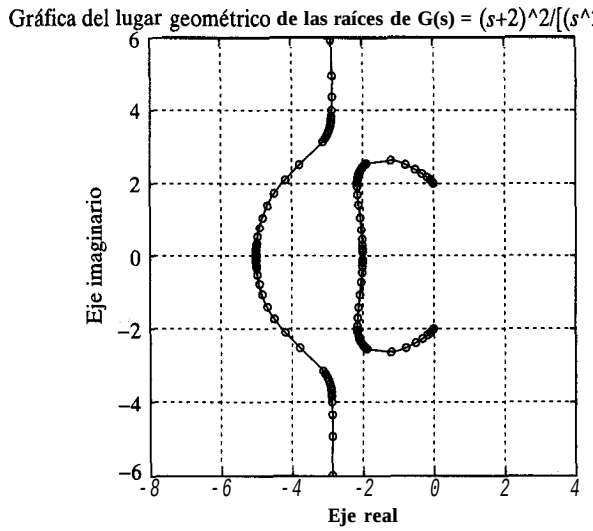


Figura 6-63
Gráfica del lugar geométrico de las raíces.

$$\left|\frac{2e^{-0.3s}}{s+1}\right| = 1$$

La condición de ángulo se reduce a

$$\underline{/s+1} = \pm\pi(2k+1) - 0.3\omega \qquad \text{(radianes)}$$

Para $k = 0$,

$$\underline{/s+1} = \pm\pi - 0.3\omega \qquad \text{(radianes)}$$

$$= \pm 180° - 17.2°\omega \qquad \text{(grados)}$$

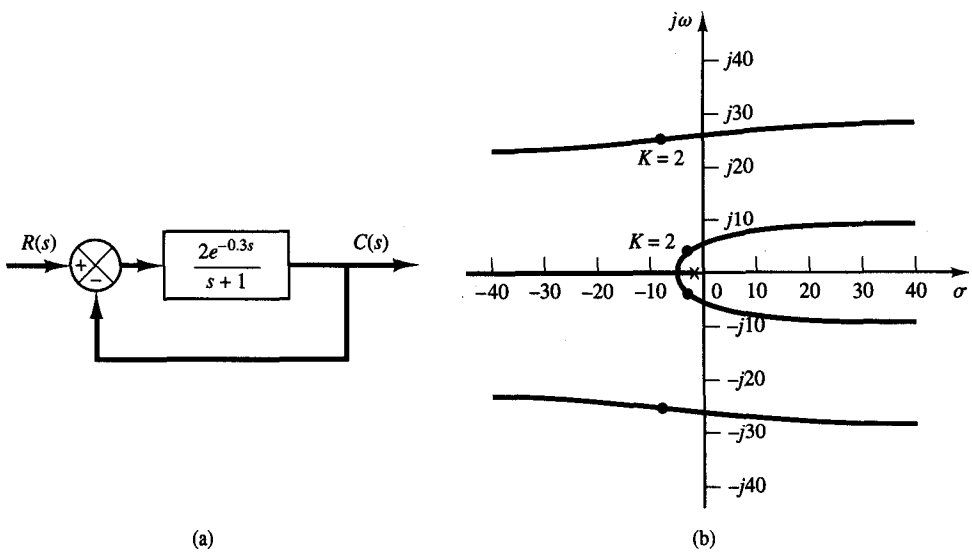


Figura 6-64
(a) Sistema de control con retardo de transporte; (b) gráfica del lugar geométrico de las raíces.

Para $k = 1$,

$$\angle s + 1 = \pm 3\pi - 0.3\omega \qquad \text{(radianes)}$$

$$= \pm 540° - 17.2°\omega \qquad \text{(grados)}$$

La gráfica del lugar geométrico de las raíces para este sistema aparece en la figura 6-64(b).

Establezcamos $s = \sigma + j\omega$ en la condición de magnitud y sustituyamos 2 con K. En este caso, obtenemos

$$\frac{\sqrt{(1+\sigma)^2 + \omega^2}}{e^{-0.3\sigma}} = K$$

Evaluando K en puntos diferentes sobre los lugares geométricos de las raíces, encontramos los puntos para los cuales $K = 2$. Estos puntos son polos en lazo cerrado. El par dominante de polos en lazo cerrado es

$$s = -2.5 \pm j3.9$$

El siguiente par de polos en lazo cerrado es

$$s = -8.6 \pm j25.1$$

Usando sólo el par de polos dominantes en lazo cerrado, la función de transferencia en lazo cerrado se aproxima del modo siguiente: considerando que

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2e^{-0.3s}}{1 + s + 2e^{-0.3s}}$$

$$= \frac{2e^{-0.3s}}{1 + s + 2\left(1 - 0.3s + \dfrac{0.09s^2}{2} + \cdots\right)}$$

$$= \frac{2e^{-0.3s}}{3 + 0.4s + 0.09s^2 + \cdots}$$

Y

$$(s + 2.5 + j3.9)(s + 2.5 - j3.9) = s^2 + 5s + 21.46$$

aproximamos $C(s)/R(s)$ mediante

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2}{3}(21.46)e^{-0.3s}}{s^2 + 5s + 21.46}$$

o bien

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{14.31e^{-0.3s}}{(s + 2.5)^2 + 3.9^2}$$

Para una entrada escalón unitario,

$$C(s) = \frac{14.31e^{-0.3s}}{[(s + 2.5)^2 + 3.9^2]s}$$

Observe que

$$\frac{14.31}{[(s + 2.5)^2 + 3.9^2]s} = \frac{\frac{2}{3}}{s} + \frac{-\frac{2}{3}s - \frac{10}{3}}{(s + 2.5)^2 + 3.9^2}$$

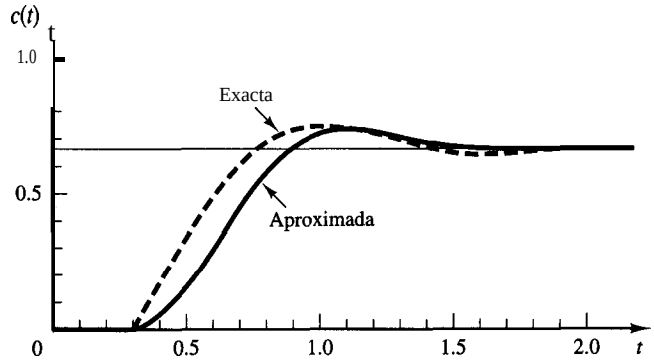


Figura 6-65
Curvas de respuesta escalón unitario para el sistema de la figura 6–64(a).

Por tanto,

$$C(s) = \left(\frac{\frac{2}{3}}{s}\right)e^{-0.3s} + \left[\frac{-\frac{2}{3}s - \frac{10}{3}}{(s + 2.5)^2 + 3.9^2}\right]e^{-0.3s}$$

La transformada inversa de **Laplace** de $C(s)$ produce

$$c(t) = \tfrac{2}{3}[1 - e^{-2.5(t-0.3)}\cos 3.9(t - 0.3) - 0.641e^{-2.5(t-0.3)}\operatorname{sen} 3.9(t - 0.3)]1(t - 0.3)$$

en donde l(t − 0.3) es la función escalón unitario que ocurre en t = 0.3.

La figura 6-65 muestra la curva de respuesta aproximada **obtenida** así junto con la curva de respuesta escalón unitario exacta **obtenida** mediante una simulación de computadora. Observe que en este sistema se obtiene una aproximación bastante buena sólo con los polos dominantes en lazo cerrado.

PROBLEMAS

B-6-1. Grafique los lugares geométricos de las raíces para el sistema de control en lazo cerrado con

$$\mathbf{G(s)} = \frac{K}{s(s + 1)(s^2 + 4s + 5)}, \qquad H(s) = 1$$

B-6-2. Grafique los lugares geométricos de las raíces para un sistema de control en lazo cerrado con:

$$\mathbf{G(s)} = \frac{K(s + 9)}{s(s^2 + 4s + 11)}, \qquad \mathbf{H(s) = 1}$$

Ubique los polos en lazo cerrado sobre los lugares geométricos de las raíces de modo que los polos dominantes en lazo cerrado tengan un factor de amortiguamiento relativo igual a 0.5. Determine el valor correspondiente de la ganancia K.

B-6-3. Grafique los lugares geométricos de las raíces para el sistema con

$$\mathbf{G(s)} = \frac{K}{s(s + 0.5)(s^2 + 0.6s + 10)}, \qquad \mathbf{H(s)} = 1$$

B-6-4. Grafique los lugares geométricos de las raíces para el sistema con

$$\mathbf{G(s)} = \frac{K}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)}, \qquad \mathbf{H(s) = 1}$$

Determine los puntos exactos donde los lugares geométricos de las raíces cruzan el eje jo.

B-6-5. Demuestre que los lugares geométricos de las raíces para un sistema de control con

$$\mathbf{G(s)} = \frac{K(s^2 + 6s + 10)}{s^2 + 2s + 10}, \qquad \mathbf{H(s) = 1}$$

son arcos del círculo con centro en el origen con un radio igual a $\sqrt{10}$.

B-6-6. Grafique los lugares geométricos de las raíces para un sistema de control en lazo cerrado con

$$\mathbf{G(s)} = \frac{K(s + 0.2)}{s^2(s + 3.6)}, \qquad \mathbf{H(s)} = 1$$

B-6-7. Grafique los lugares geométricos de las raíces para un sistema de control en lazo cerrado con

$$G(s) = \frac{K(s + 0.5)}{s^3 + s^2 + 1}, \qquad H(s) = 1$$

B-6-8. Grafique los lugares geométricos de las raíces para el sistema de la figura 6-66. Determine el rango de valores de la ganancia K para la estabilidad.

B-6-9. Considere un sistema de control con realimentación unitaria con la siguiente función de transferencia de la trayectoria directa:

$$G(s) \quad \frac{K}{s(s^2 + 4s + 8)}$$

Grafique los lugares geométricos de las raíces para el sistema. Si el valor de la ganancia K se establece igual a 2, ¿dónde se ubican los polos en lazo cerrado?

B-6-10. Considere el sistema de la figura 6−67. Determine los valores de la ganancia K y el coeficiente de realimentación de velocidad K_h de modo que los polos en lazo cerrado estén en $s = -1 \pm j\sqrt{3}$. Después, usando el valor determinado de K_h, grafique los lugares geométricos de las raíces

B-6-11. Considere el sistema de la figura 6-68. El sistema incluye una realimentación de velocidad. Determine el valor de la ganancia K de modo que los polos dominantes en lazo cerrado tengan un factor de amortiguamiento relativo de 0.5. Usando la ganancia K determinada de tal modo, obtenga la respuesta escalón unitario del sistema.

B-6-12. Considere el sistema cuya función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$ se obtiene mediante

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)}$$

$$= \frac{K}{s^4 + 4s^3 + 11s^2 + 14s + 10}$$

Grafique un diagrama del lugar geométrico de las raíces con MATLAB.

B-6-13. Considere el sistema cuya función de transferencia en lazo abierto se obtiene mediante

$$G(s)H(s) = \frac{K(s - 0.6667)}{s^4 + 3.340s^3 + 7.0325s^2}$$

Demuestre que la ecuación para las asíntotas se obtiene mediante

$$G_a(s)H_a(s) = \frac{K}{s^3 + 4.0068s^2 + 5.3515s + 2.3825}$$

Grafique con MATLAB los lugares geométricos de las raíces y las asíntotas para el sistema.

B-6-14. Considere el sistema con realimentación unitaria cuya función de transferencia de la trayectoria directa es

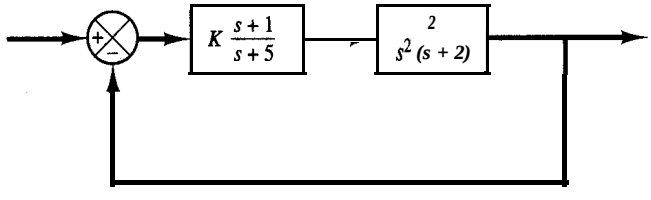


Figura 6-66
Sistema de control.

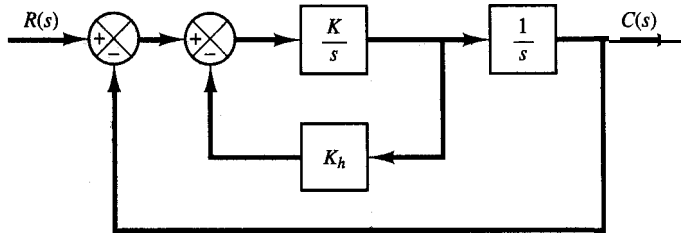


Figura 6−67
Sistema de control.

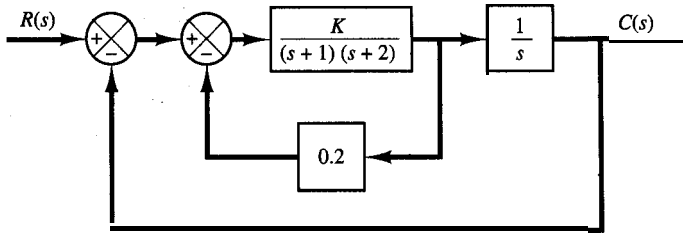


Figura 6-68
Sistema de control.

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)}$$

El lugar geométrico de las raíces de ganancia constante para el sistema para un valor determinado de K se define mediante la ecuación siguiente:

$$\left|\frac{K}{s(s + 1)}\right| = 1$$

Demuestre que el lugar geométrico de las raíces de ganancia constante para $0 \leq K \leq \infty$ se obtiene mediante

$$[\sigma(\sigma + 1) + \omega^2]^2 + \omega^2 = K^2$$

Trace los lugares geométricos de las raíces de ganancia constante para $K = 1, 2, 5, 10$ y 20 en el plano s.

B-6-15. Considere el sistema de la figura 6-69. Grafique los lugares geométricos de las raíces. Ubique los polos en lazo cerrado cuando la ganancia K se hace igual a 2.

B-6-16. Considere el sistema de la figura 6-70. Grafique los lugares geométricos de las raíces conforme a varía de 0 a ∞. Determine el valor de a de modo que el factor de amortiguamiento relativo de los polos dominantes en lazo cerrado sea 0.5.

B-6-17. Considere el sistema de la figura 6-71. Grafique los lugares geométricos de las raíces conforme el valor de k varíe de 0 a ∞. ¿Qué valor de k producirá el factor de amortiguamiento relativo de los polos dominantes en lazo cerrado igual a 0.5? Encuentre la constante de error estático de velocidad con este valor de k.

B-6-18. Grafique los lugares geométricos de las raíces para el sistema de la figura 6-72. Demuestre que el sistema se vuelve inestable para valores grandes de K.

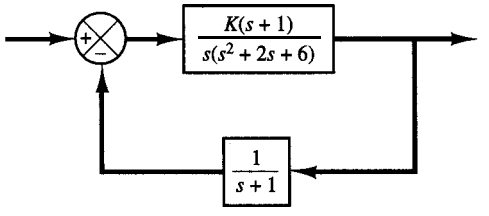


Figura 6-69
Sistema de control.

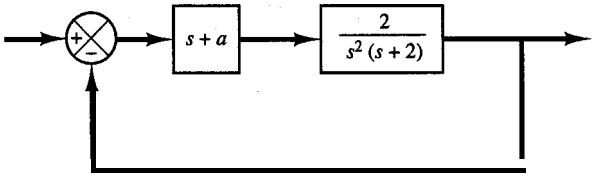


Figura 6-70
Sistema de control.

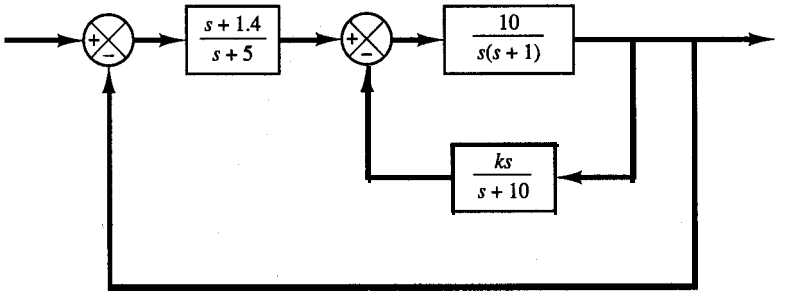


Figura 6-71
Sistema de control.

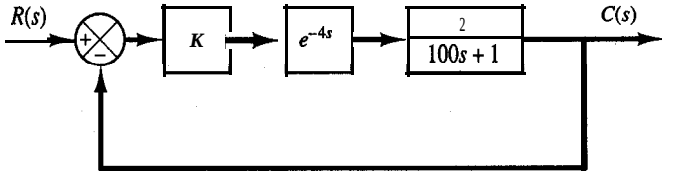


Figura 6-72
Sistema de control.

B-6-19. Grafique los contornos de las raíces para el sistema de la figura 6-73 cuando la ganancia K y el parámetro a varíen, cada uno. de cero a infinito.

B-6-20. Considere el sistema de la figura 6-74. Suponiendo que el valor de la ganancia K varía de 0 a ∞, grafique los lugares geométricos de las raíces cuando $K_h = 0.5$. A continuación trace los contornos de las raíces para $0 \leq K < \infty$ y $0 \leq K_h < \infty$. Ubique los polos en lazo cerrado sobre el contorno de las raíces cuando $K = 10$ y $K_h = 0.5$.

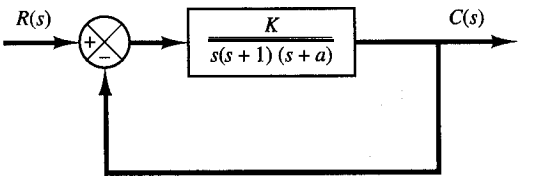


Figura 6–73
Sistema de control.

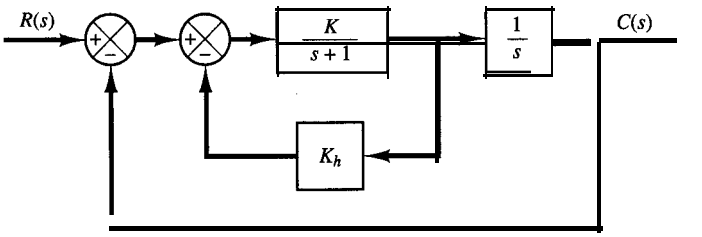
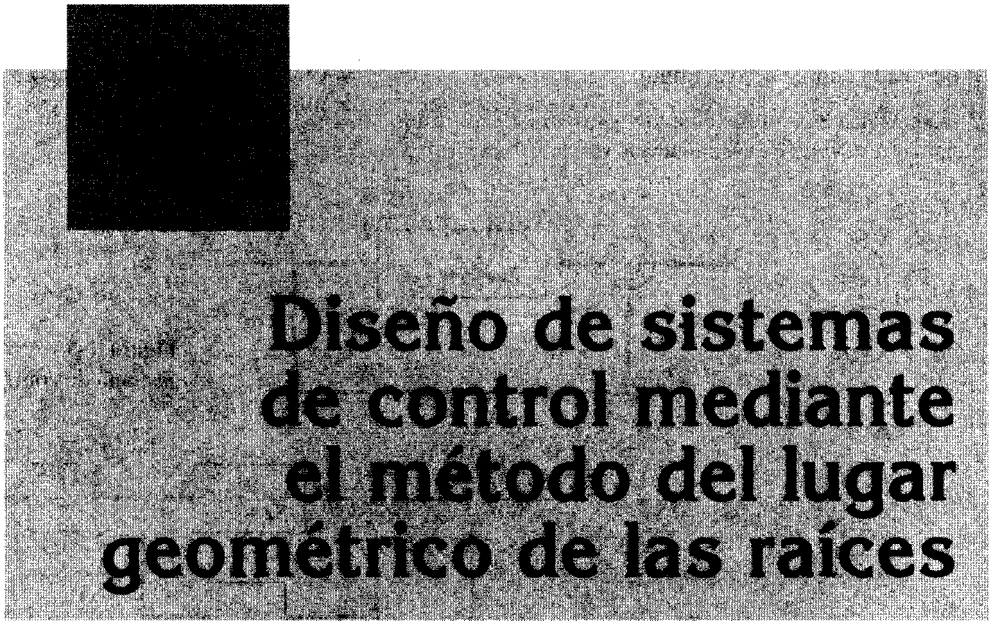


Figura 6-74
Sistema de control.



Diseño de sistemas de control mediante el método del lugar geométrico de las raíces

7-1 INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de este capítulo es presentar los procedimientos para el diseño y la compensación de sistemas de control de una entrada y una salida e invariantes con el tiempo. La compensación es la modificación de la dinámica del sistema, realizada para satisfacer las especificaciones determinadas. El enfoque que se usa en este capítulo para el diseño y la compensación de un sistema de control es el lugar geométrico de las raíces. (Los enfoques de respuesta en frecuencia y en el espacio de estados para el diseño y la compensación de sistemas de control se presentarán en los capítulos 9 y ll, respectivamente.)

Especificaciones de desempeño. Los sistemas de control se diseñan para realizar tareas específicas. Los requerimientos impuestos sobre el sistema de control se detallan como especificaciones de desempeño. Por lo general se refieren a la precisión, la estabilidad relativa y la velocidad de respuesta.

Para problemas de diseño rutinarios, las especificaciones de desempeño se proporcionan en términos de valores numéricos precisos. En otros casos, se ofrecen parcialmente en términos de valores numéricos precisos y parcialmente en términos de planteamientos cualitativos. En este último caso, puede ser necesario modificar las especificaciones durante el curso del diseño, ya que es posible que las especificaciones proporcionadas nunca se cumplan (debido a requerimientos que producen conflicto) o conduzcan a un sistema muy costoso.

Por lo general, las especificaciones de desempeño no deben ser más rigurosas de lo necesario para efectuar la tarea definida. Si la precisión de una operación en estado estable es de importancia vital para determinado sistema de control, no debemos solicitar especificaciones de desempeño más rígidas de lo necesario sobre la respuesta transitoria, dado

que tales especificaciones requerirían de componentes costosos. Recuerde que la parte más importante de un sistema de control es el planteamiento preciso de las especificaciones de desempeño a fin de producir un sistema de control óptimo para el propósito determinado.

Compensación del sistema. Establecer la ganancia es el primer paso encaminado a ajustar el sistema para un desempeño satisfactorio. Sin embargo, en muchos casos prácticos, el solo ajuste de la ganancia tal vez no proporcione una alteración suficiente del comportamiento del sistema para cumplir las especificaciones dadas. Como ocurre con frecuencia, incrementar el valor de la ganancia mejora el comportamiento en estado estable pero produce una estabilidad deficiente o, incluso, inestabilidad. En este caso, es necesario volver a diseñar el sistema (modificando la estructura o incorporando dispositivos o componentes adicionales) a fin de alterar el comportamiento general, de modo que el sistema se comporte como se requiere. Este nuevo diseño o adición de un dispositivo apropiado se denomina compensación. Un elemento insertado en el sistema para satisfacer las especificaciones se denomina compensador. El compensador modifica el desempeño con déficit del sistema original.

Compensación en serie y compensación mediante realimentación (o en paralelo). Las figuras 7-l(a) y (b) muestran los esquemas de compensación que suelen utilizarse para los sistemas de control realimentados La figura 7-l(a) contiene la configuración en la que el compensador $G_c(s)$ se coloca en serie con la planta. Este esquema se denomina ***compensación en serie.***

Una alternativa a la compensación en serie es la realimentación de las señales de algunos elementos y la colocación de un compensador en la trayectoria de realimentación interna resultante, como se aprecia en la figura 7-l(b). Esta compensación se denomina ***compensación mediante realimentación o compensación en paralelo.***

Al compensar los sistemas de control, observamos que, por lo general, el problema termina en un diseño conveniente de un compensador en serie o mediante realimentación. La elección entre la compensación en serie y la compensación mediante realimentación depende

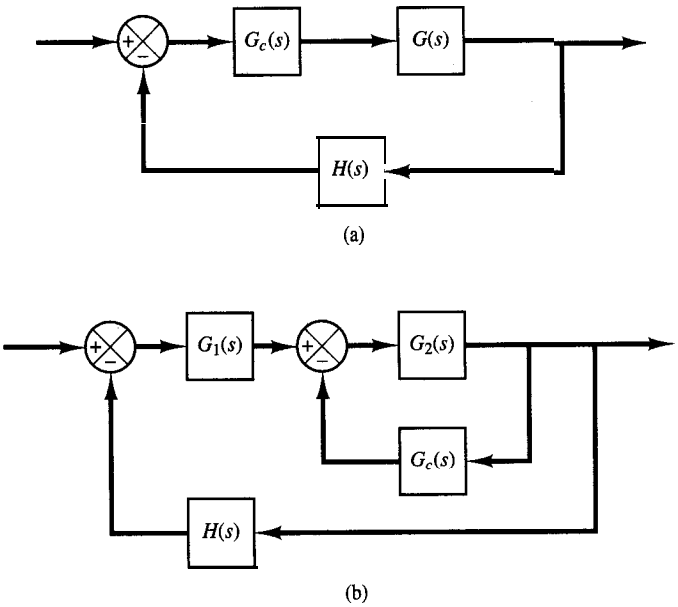


Figura 7-1
(a) Compensación en serie; (b) compensación mediante realimentación 0 en paralelo.

de la naturaleza de las señales del sistema, los niveles de potencia en los diferentes puntos los componentes disponibles, la experiencia del diseñador, las consideraciones económicas, etcétera.

En general, la compensación en serie es más sencilla que la compensación mediante realimentación; sin embargo, aquélla requiere con frecuencia de amplificadores adicionales para incrementar la ganancia y/o ofrecer un aislamiento. (Para evitar la disipación de potencia, el compensador en serie se inserta en el punto de bajo nivel en la trayectoria directa.) Observe que, en general, la cantidad de componentes requerida en la compensación mediante realimentación será menor que la cantidad de componentes de la compensación en serie, siempre y cuando se tenga una señal adecuada, debido a que la transferencia se da de un nivel de potencia más alto a un nivel más bajo. (Esto significa que tal vez no se requiera de amplificadores adicionales.)

Al analizar los compensadores, solemos utilizar términos como ***red de adelanto, red de atraso, y red de atraso-adelanto.*** Como se planteó en la sección 5-9, si se aplica una entrada senoidal e_i a la entrada de una red, y la salida en estado estable e_o (que también es senoidal) tiene un adelanto de fase, el sistema se denomina red de adelanto. (La magnitud del ángulo de adelanto de fase es una función de la frecuencia de entrada.) Si la salida en estado estable e_o tiene un atraso de fase, la red se denomina red de atraso. En una red de atraso-adelanto, ocurren tanto un atraso de fase como un adelanto de fase en la salida, pero en diferentes regiones de frecuencia; el atraso de fase ocurre en la región de baja frecuencia y el adelanto de fase ocurre en la región de alta frecuencia. Un compensador que tenga la característica de una red de adelanto, una red de atraso, o una red de atraso-adelanto se denomina compensador de adelanto, compensador de atraso, o compensador de atraso-adelanto, respectivamente.

Compensadores. Si se necesita un compensador para cumplir las especificaciones de desempeño, el diseñador debe planear un dispositivo físico que tenga prescrita la función de transferencia del compensador.

Se han utilizado numerosos dispositivos físicos para tales propósitos. De hecho, en la literatura se encuentran muchas ideas generosas y útiles para construir físicamente los compensadores.

Entre los muchos tipos de compensadores, los de mayor uso son los compensadores de adelanto, los de atraso, los de atraso-adelanto y los de realimentación de velocidad (tacómetros). En este capítulo limitaremos nuestro análisis a estos tipos. Los compensadores de adelanto, de atraso y de atraso-adelanto pueden ser dispositivos electrónicos (tales como circuitos que usen amplificadores operacionales), redes ***RC*** (eléctricas, mecánicas, neumáticas, hidráulicas o una combinación de ellas) o amplificadores.

En el diseño real de un sistema de control, el que se use un compensador electrónico, neumático o hidráulico debe decidirse parcialmente con base en la naturaleza de la planta que se controla. Por ejemplo, si la planta que se controla contiene fluidos inflamables, debe optarse por los componentes neumáticos (tanto un compensador como un actuador) para eliminar la posibilidad de que salten chispas. Sin embargo, si no existe el riesgo de incendio, los que se usan con mayor frecuencia son los compensadores electrónicos. (De hecho, es común transformar las señales no eléctricas en señales eléctricas, debido a la sencillez de la transmisión, mayor precisión, mayor confiabilidad, más facilidad de compensación, etcétera.)

Procedimientos de diseño. En el enfoque de prueba y error para el diseño de un sistema, se prepara un modelo matemático del sistema de control y se ajustan los parámetros de un compensador. La parte de este proceso que requiere de más tiempo es la verificación del desempeño del sistema mediante un análisis, después de cada ajuste de los parámetros. El diseñador debe usar una computadora digital para evitar gran parte de la complicación numérica necesaria en esta verificación.

Una vez obtenido un modelo matemático satisfactorio, el diseñador debe construir un prototipo y probar el sistema en lazo abierto. Si se asegura la estabilidad absoluta en lazo abierto, el diseñador cierra el lazo y prueba el desempeño del sistema en lazo cerrado resultante. Debido a los efectos de carga no considerados entre los componentes, la falta de linealidad, los parámetros distribuidos, etc, mismos que no se toman en consideración en el trabajo de diseño original, es probable que el desempeño real del sistema prototipo difiera de las predicciones teóricas. Por tanto, tal vez el primer diseño no satisfaga todos los requerimientos de desempeño. Mediante el enfoque de prueba y error, el diseñador debe cambiar el prototipo hasta que el sistema cumpla las especificaciones. Debe analizar cada prueba e incorporar los resultados de este análisis en la prueba siguiente. El diseñador debe ver que el sistema final cumpla las especificaciones de desempeño y, al mismo tiempo, sea confiable y económico.

Debe señalarse que, al diseñar sistemas de control mediante los métodos del lugar geométrico de las raíces o de la respuesta en frecuencia, el resultado final no es único, debido a que tal vez no se haya definido con precisión la solución óptima si se incorporaron las especificaciones en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia.

Panorama del capítulo. La sección 7-1 presentó una introducción a la compensación de los sistemas de control. La sección 7-2 analiza las consideraciones preliminares para el enfoque del lugar geométrico de las raíces para el diseño de los sistemas de control. La sección 7-3 trata los detalles de las técnicas de compensación de adelanto basadas en el método del lugar geométrico de las raíces. La sección 7–4 aborda las técnicas de compensación de atraso mediante el método del lugar geométrico de las raíces. La sección 7-5 presenta las técnicas de compensación de atraso-adelanto, así como un análisis detallado del diseño de los compensadores de atraso-adelanto.

7-2 CONSIDERACIONES PRELIMINARES DE DISEÑO

Al desarrollar un sistema de control, sabemos que la modificación adecuada de la dinámica de la planta puede ser una forma sencilla de cumplir las especificaciones de desempeño. Sin embargo, tal vez esto no sea posible en muchas situaciones prácticas, debido a que la planta esté fija y no pueda modificarse. En este caso, deben ajustarse parámetros diferentes a los que tiene la planta fija. En este libro suponemos que la planta está definida y es inalterable.

Por tanto, los problemas de diseño son aquellos que implican la mejora del desempeño de un sistema mediante la inserción de un compensador. La compensación de un sistema de control se reduce al diseño de un filtro cuyas características tiendan a compensar las características inconvenientes o inalterables de la planta. Nuestro análisis se limita a los compensadores en tiempo continuo.

En las secciones 7-3 a 7-5, consideramos específicamente el diseño de compensadores de adelanto, de compensadores de atraso y de compensadores de atraso-adelanto. En los problemas planteados por dichos diseños, colocamos un compensador en serie con la función de transferencia inalterable G(s) para obtener un comportamiento conveniente. A continuación, el problema principal consiste en la elección apropiada de los polos y los ceros del compensador G,(s) para alterar el lugar geométrico de las raíces (o la respuesta en frecuencia) con el propósito de cumplir las especificaciones de desempeño.

Enfoque del lugar geométrico de las raíces para el diseño de un sistema de control. El método del lugar geométrico de las raíces es un enfoque gráfico que permite de-

terminar las ubicaciones de todos los polos en lazo cerrado a partir de las ubicaciones de los polos y ceros en lazo abierto conforme algún parámetro (por lo general la ganancia) varía de cero a infinito. El método produce un indicio claro de los efectos del ajuste del parámetro.

En la práctica, una gráfica del lugar geométrico de las raíces de un sistema indica que el desempeño deseado no puede obtenerse con sólo el ajuste de la ganancia. De hecho, en algunos casos, tal vez el sistema no sea estable para todos los valores de ganancia. En este caso, es necesario volver a construir los lugares geométricos de las raíces para cumplir las especificaciones de desempeño.

Cuando se diseña un sistema de control, si se requiere de un ajuste diferente al de la ganancia, debemos modificar los lugares geométricos de las raíces originales insertando un compensador conveniente. Una vez comprendidos los efectos de la adición de los polos y/o ceros sobre el lugar geométrico de las raíces, podemos determinar con facilidad las ubicaciones de los polos y los ceros del compensador que volverán a dar una forma conveniente al lugar geométrico de las raíces. En esencia, en el diseño realizado mediante el método del lugar geométrico de las raíces, los lugares geométricos de las raíces del sistema se vuelven a construir mediante el uso de un compensador, a fin de poder colocar un par de polos dominantes en lazo cerrado en la posición deseada. (A menudo se especifican el factor de amortiguamiento relativo y la frecuencia no amortiguada natural de un par de polos dominantes en lazo cerrado.)

Efectos de la adición de polos. La adición de un polo a la función de transferencia en lazo abierto tiene el efecto de jalar el lugar geométrico de las raíces a la derecha, lo cual tiende a disminuir la estabilidad relativa del sistema y alentar el asentamiento de la respuesta. (Recuerde que la adición de los controles integrales añade un polo en el origen, con lo cual el sistema se vuelve menos estable.) La figura 7-2 muestra ejemplos de los lugares geométricos de las raíces, que presentan el efecto de la adición de uno o dos polos a un sistema de un solo polo.

Efectos de la adición de ceros. La adición de un cero a la función de transferencia en lazo abierto tiene el efecto de jalar el lugar geométrico de las raíces hacia la izquierda, con lo cual el sistema tiende a ser más estable, y se acelera el asentamiento de la respuesta. (Físicamente, la adición de un cero a la función de transferencia de la trayectoria directa significa agregar al sistema un control derivativo. El efecto de tal control es introducir un grado de previsión al sistema y acelerar la respuesta transitoria.) La figura 7–3(a) muestra los lugares geométricos de las raíces para un sistema estable con una ganancia pequeña, pero inestable con una ganancia grande. Las figuras 7–3(b), (c) y (d) muestran las gráficas

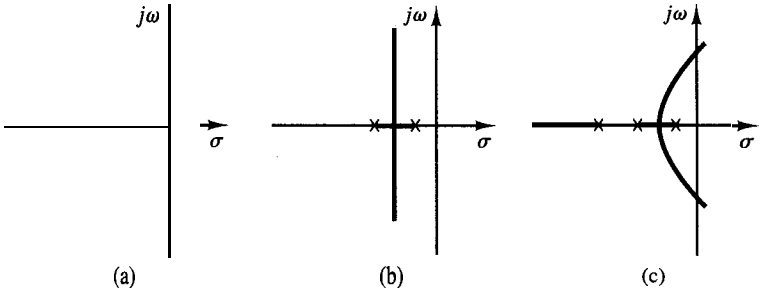


Figura 7-2
(a) Gráfica del lugar geométrico de las raíces del sistema de un solo polo; (b) gráfica del lugar geométrico de las raíces de un sistema de dos polos; (c) gráfica del lugar geométrico de las raíces de un sistema con tres polos.

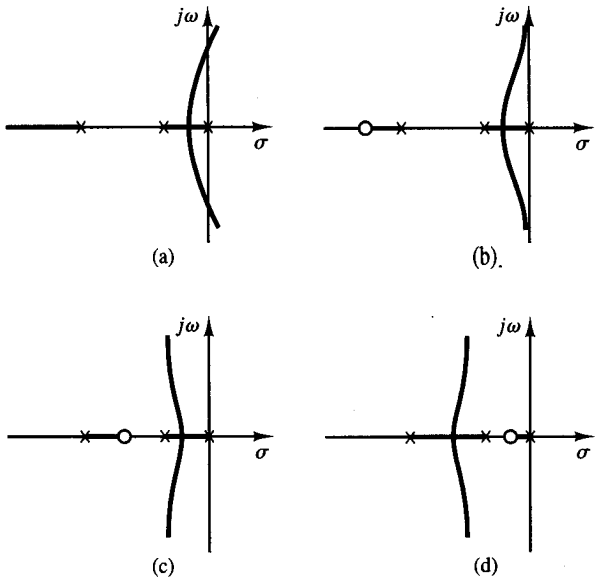


Figura 7-3
(a) Gráfica del lugar geométrico de las raíces de un sistema con tres polos; (b), (c) y (d) gráficas del lugar geométrico de las raíces que muestran los efectos de la adición de un cero al sistema de tres polos.

del lugar geométrico de las raíces para el sistema cuando se añade un cero a la función de transferencia en lazo abierto. Observe que, cuando se agrega un cero al sistema de la figura 7–3(a), éste se vuelve estable para todos los valores de ganancia.

7-3 COMPENSACIÓN DE ADELANTO

Compensadores de adelanto. Existen muchas formas de obtener compensadores de adelanto en tiempo continuo (o analógicos), tales como redes electrónicas que usan amplificadores operacionales, redes *RC* eléctricas y sistemas de amortiguadores mecánicos. En la práctica, suelen usarse compensadores que involucran amplificadores operacionales. (Consulte en el capítulo 5 lo referente a las redes que usan amplificadores operacionales.)

La figura 7-4 muestra un circuito electrónico que usa amplificadores operacionales. La función de transferencia para este circuito se obtuvo en el capítulo 5 del modo siguiente:

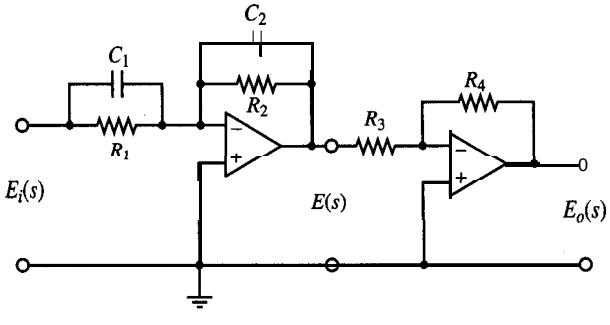


Figura 7–4
Circuito electrónico que consiste en una red de adelanto si $R_1C_1 > R_2C_2$ y en una red de atraso si $R_1C_1 < R_2C_2$.

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_2R_4}{R_1R_3}\frac{R_1C_1s + 1}{R_2C_2s + 1} = \frac{R_4C_1}{R_3C_2}\frac{s + \frac{1}{R_1C_1}}{s + \frac{1}{R_2C_2}}$$

$$= K_c\alpha\frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c\frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \qquad (7\text{–}1)$$

en donde

$$T = R_1C_1, \qquad \alpha T = R_2C_2, \qquad K_c = \frac{R_4C_1}{R_3C_2}$$

Observe que

$$K_c\alpha = \frac{R_4C_1}{R_3C_2}\frac{R_2C_2}{R_1C_1} = \frac{R_2R_4}{R_1R_3}, \qquad \alpha = \frac{R_2C_2}{R_1C_1}$$

Esta red tiene una ganancia en cd de $K_c\alpha = R_2R_4/(R_1R_3)$.

A partir de la ecuación (7-1) observamos que ésta es una red de adelanto si $R_1C_1 > R_2C_2$, o $\alpha < 1$ y una red de atraso si $R_1C_1 < R_2C_2$. Las configuraciones de polos y ceros de esta red, cuando $R_1C_1 > R_2C_2$ and $R_1C_1 < R_2C_2$, aparecen en las figuras 7–5(a) y (b), respectivamente.

Técnicas de compensación de adelanto basadas en el enfoque del lugar geométrico de las raíces. El enfoque del lugar geométrico de las raíces es muy poderoso en el diseño cuando se incorporan las especificaciones en términos de las cantidades en el dominio del tiempo, tales como el factor de amortiguamiento relativo y la frecuencia natural no amortiguada de los polos dominantes en lazo cerrado, el sobrepaso máximo, el tiempo de levantamiento y el tiempo de asentamiento.

Considere un problema de diseño tal que el sistema original sea inestable para todos los valores de ganancia o estable pero con características inconvenientes de la respuesta

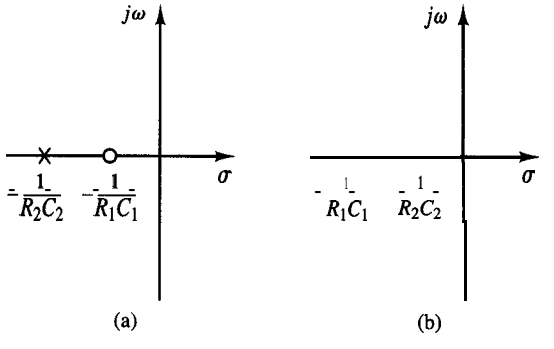


Figura 7-5
Configuraciones de polos y ceros: (a) red de adelanto; (b) red de atraso.

transitoria. En este caso, es necesario volver a construir el lugar geométrico de las raíces en la vecindad amplia del eje $j\omega$ y el origen para que los polos dominantes en lazo cerrado estén en las posiciones deseadas en el plano complejo. Este problema se soluciona insertando un compensador de adelanto apropiado en cascada con la función de transferencia de la trayectoria directa.

Los procedimientos para diseñar un compensador de adelanto para el sistema de la figura 7–6 mediante el método del lugar geométrico de las raíces se plantean del modo siguiente:

1. A partir de las especificaciones de desempeño, determine la ubicación deseada para los polos dominantes en lazo cerrado.

2. Por medio de una gráfica del lugar geométrico de las raíces, compruebe si el ajuste de la ganancia puede o no por sí solo producir los polos en lazo cerrado convenientes. Si no, calcule la deficiencia de ángulo ϕ. Este ángulo debe ser una contribución del compensador de adelanto si el nuevo lugar geométrico de las raíces va a pasar por las ubicaciones deseadas para los polos dominantes en lazo cerrado.

3. Suponga que el compensador de adelanto G,(s) es

$$G_c(s) = K_c\alpha\frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c\frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}, \qquad (0 < a < 1)$$

en donde a y T se determinan a partir de la deficiencia de ángulo. K_c se determina a partir del requerimiento de la ganancia en lazo abierto.

4. Si no se especifican las constantes de error estático, determine la ubicación del polo y del cero del compensador de adelanto, para que el compensador de adelanto contribuya al ángulo ϕ necesario. Si no se imponen otros requerimientos sobre el sistema, intente aumentar lo más posible el valor de a. Un valor más grande de a por lo general produce un valor más grande de K_v, lo cual es conveniente. (Si se especifica una constante de error estático, por lo general es más sencillo usar el enfoque de la respuesta en frecuencia.)

5. Determine la ganancia en lazo abierto del sistema compensado a partir de la condición de magnitud.

Una vez diseñado un compensador, verifique que se hayan cumplido todas las especificaciones de desempeño. Si el sistema no cumple las especificaciones de desempeño, repita el procedimiento de diseño ajustando el polo y el cero del compensador hasta cumplir con todas las especificaciones. Si se requiere de una constante de error estático grande, enlace en cascada una red de atraso o convierta el compensador de adelanto en un compensador de atraso-adelanto.

Observe que, si los polos dominantes en lazo cerrado seleccionados no son realmente dominantes, será necesario modificar la ubicación del par de polos dominantes en lazo ce-

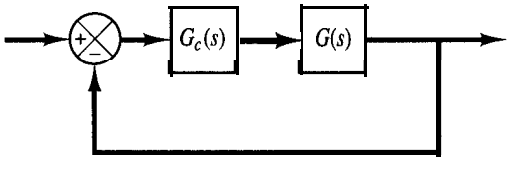


Figura 7-6
Sistema de control.

rrado seleccionados. (Los polos en lazo cerrado diferentes de los dominantes modifican la respuesta obtenida de los polos dominantes en lazo cerrado. El grado de modificación depende de la ubicación de los polos en lazo cerrado restantes.) Asimismo, los ceros en lazo cerrado afectan la respuesta si se localizan cerca del origen.

EJEMPLO 7-1 Considere el sistema de la figura 7–7(a). La función de transferencia de la trayectoria directa es

$$G(s) = \frac{4}{s(s + 2)}$$

La gráfica del lugar geométrico de las raíces para este sistema aparece en la figura 7–7(b). La función de transferencia en lazo cerrado se convierte en

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

$$= \frac{4}{(s + 1 + j\sqrt{3})(s + 1 - j\sqrt{3})}$$

Los polos en lazo cerrado se ubican en

$$s = -1 \pm j\sqrt{3}$$

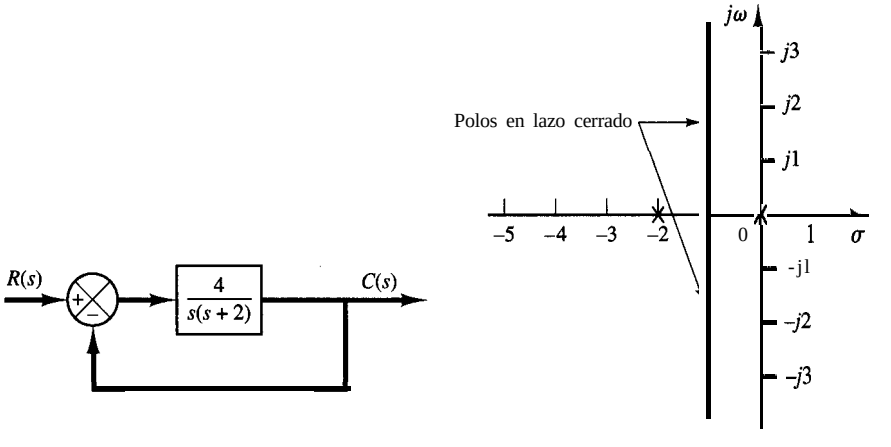
El factor de amortiguamiento relativo de los polos en lazo cerrado es 0.5. La frecuencia natural no amortiguada de los polos en lazo cerrado es 2 rad/seg. La constante de error estática de velocidad es 2 seg^{-1}.

Se pretende modificar los polos en lazo cerrado para obtener la frecuencia natural no amortiguada $\omega_n = 4$ rad/seg sin cambiar el valor del factor de amortiguamiento relativo, $\zeta = 0.5$.

Recuerde que, en el plano complejo, el factor de amortiguamiento relativo ζ de un par de polos complejos conjugados se expresa en términos del ángulo θ, que se mide a partir del eje $j\omega$, tal como en la figura 7–8(a), con

$$\zeta = \text{sen } \theta$$

En otras palabras, la razón de amortiguamiento constante ζ tiene líneas radiales que pasan por el origen, como se aprecia en la figura 7–8(b). Por ejemplo, un factor de amortiguamiento relativo de 0.5 requiere que los polos complejos se encuentren sobre las líneas dibujadas a través del origen, formando ángulos de $\pm 60°$ con el eje real negativo. (Si la parte real de un par de polos



(a) (b)

Figura 7-7
(a) Sistema de control; (b) gráfica del lugar geométrico de las raíces.

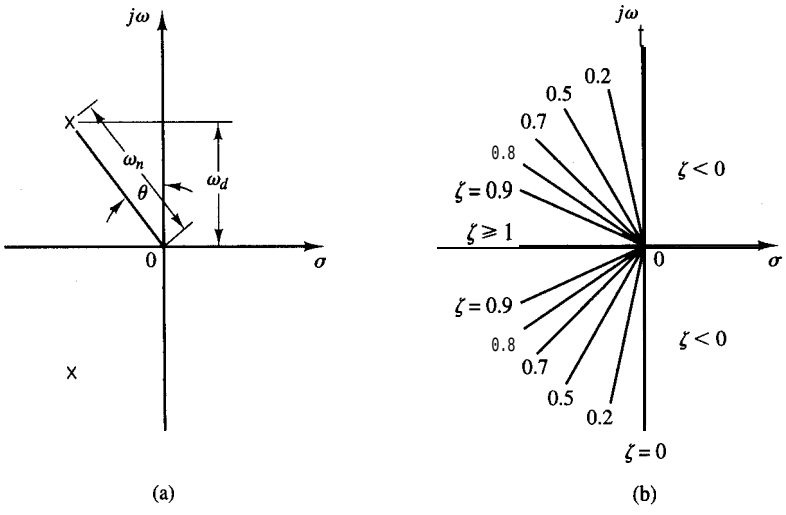


Figura 7-8
(a) Polos complejos; (b) líneas de factor de amortiguamiento relativo constante ζ.

complejos es positiva, lo cual significa que el sistema es inestable, la ζ correspondiente es negativa.) El factor de amortiguamiento relativo determina la ubicación angular de los polos, en tanto que la distancia del polo al origen la determina la frecuencia natural no amortiguada ω_n.

En el ejemplo actual, las ubicaciones deseadas de los polos en lazo cerrado son

$$s = -2 \pm j2\sqrt{3}$$

Después de obtenidos los lugares geométricos de las raíces del sistema original, los polos dominantes en lazo cerrado se mueven a la ubicación deseada con un simple ajuste de la ganancia. Sin embargo, esto no ocurre en el sistema actual. Por tanto, insertaremos un compensador de adelanto en la trayectoria directa.

El siguiente es un procedimiento general para determinar el compensador de adelanto: primero, encuentre la suma de los ángulos en la ubicación deseada de uno de los polos dominantes en lazo cerrado con los polos y ceros en lazo abierto del sistema original, y determine el ángulo necesario ϕ que se va a agregar para que la suma total de los ángulos sea igual a $\pm 180°(2k + 1)$. El compensador de adelanto debe contribuir a este ángulo ϕ. (Si el ángulo ϕ es suficientemente grande, tal vez se requiera de dos o más redes de adelanto en lugar de una.)

Si el sistema original tiene la función de transferencia en lazo abierto G(s), el sistema compensado tendrá la función de transferencia en lazo abierto:

$$G_c(s)G(s) = \left(K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \right) G(s)$$

en donde,

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}, \qquad (0 < \alpha < 1)$$

Observe que hay muchos valores posibles para T y α que producirán la contribución de ángulo necesaria en los polos en lazo cerrado deseados.

El paso siguiente es determinar las ubicaciones del cero y el polo del compensador de adelanto. Existen muchas posibilidades para elegir tales ubicaciones. (Véase Comentarios al final de este ejemplo.) A continuación presentaremos un procedimiento con el propósito de obtener el valor más grande posible para α. (Observe que un valor más grande de α producirá un valor más grande de K_v. En la mayor parte de los casos, entre más grande sea la K_v, mejor será el desempeño del sistema.) Primero dibuje una línea horizontal que pase por el punto **P,** ubicación deseada para uno de los polos dominantes en lazo cerrado. Esto corresponde a la línea ***PA*** de la figura 7-9. Dibuje una línea que conecte el punto ***P*** con el origen. Bisecte el ángulo que forman las líneas ***PA*** y ***PO,*** como se aprecia en la figura 7-9. Dibuje dos líneas ***PC*** y ***PD*** que formen ángulos de $\pm\phi/2$ con la bisectriz ***PB.*** Las intersecciones de ***PC*** y ***PD*** con el eje real negativo proporcionan la ubicación necesaria para el polo y el cero de la red de adelanto. Por tanto, el compensador diseñado hará de ***P*** un punto sobre el lugar geométrico de las raíces del sistema compensado. La ganancia en lazo abierto se determina mediante el uso de la condición de magnitud.

En el sistema actual, el ángulo de G(s) del polo en lazo cerrado deseado es

$$\left/ \frac{4}{s(s+2)} \right|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = -210°$$

Por tanto, si necesitamos obligar al lugar geométrico de las raíces a que pase por el polo en lazo cerrado deseado, el compensador de adelanto debe contribuir con $\phi = 30°$ en este punto. Siguiendo el procedimiento de diseño anterior, determinamos el cero y el polo del compensador de adelanto, como se aprecia en la figura 7-10, del modo siguiente:

$$\text{Cero en } s = -2.9, \qquad \text{Polo en } s = -5.4$$

o bien

$$T = \frac{1}{2.9} = 0.345, \qquad \alpha T = \frac{1}{5.4} = 0.185$$

Por tanto, $\alpha = 0.537$. La función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado se convierte en

$$G_c(s)G(s) = K_c \frac{s+2.9}{s+5.4} \frac{4}{s(s+2)} = \frac{K(s+2.9)}{s(s+2)(s+5.4)}$$

en donde $K = 4K_c$. La gráfica del lugar geométrico de las raíces para el sistema compensado aparece en la figura 7-10. La ganancia K se calcula a partir de la condición de magnitud, del modo siguiente: remitiéndonos a la gráfica del lugar geométrico de las raíces para el sistema compensado de la figura 7-10, se calcula la ganancia K a partir de la condición de magnitud como

$$\left| \frac{K(s+2.9)}{s(s+2)(s+5.4)} \right|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = 1$$

o bien

$$K = 18.7$$

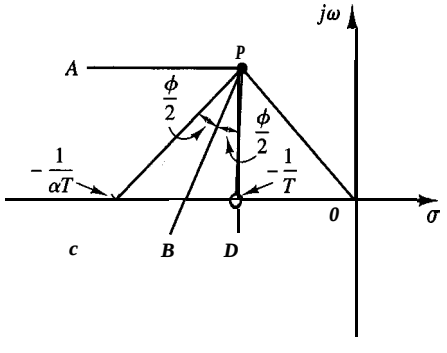


Figura 7-9
Determinación del polo y el cero de una red de adelanto.

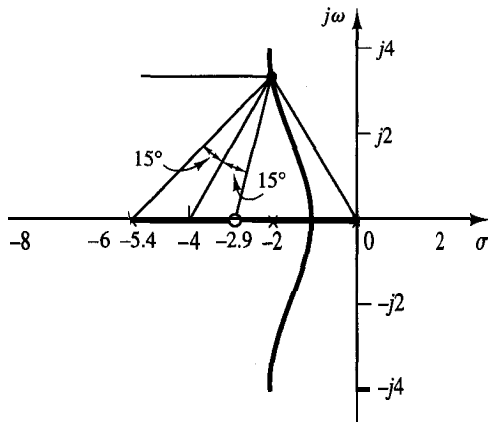


Figura 7-10
Gráfica del lugar geométrico de las raíces del sistema compensado.

Con lo cual se deduce que

$$G_c(s)G(s) = \frac{18.7(s + 2.9)}{s(s + 2)(s + 5.4)}$$

La constante K_c del compensador de adelanto es

$$K_c = \frac{18.7}{4} = 4.68$$

Por tanto, $K_c\alpha$ = 2.51. En este caso, el compensador de adelanto tiene la función de transferencia

$$G_s(s) = 2.510\frac{0.345s + 1}{185s + 1} = 4.68\ \frac{s + 2.9}{s + 5.4}$$

Si el circuito electrónico con amplificadores operacionales como los de la figura 7– 4 se usa como el compensador de adelanto que se acaba de diseñar, los valores de parámetro del compensador de adelanto se determinan a partir de

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} \quad \frac{R_2R_4}{R_1R_3}\frac{R_1C_1s + 1}{R_2C_2s + 1} = 2,51\frac{0.345s + 1}{0.185s + 1}$$

tal como se aprecia en la figura 7-11, en donde hemos elegido arbitrariamente Cr = C_2 = 10 μF y R_3 = 10 kΩ.

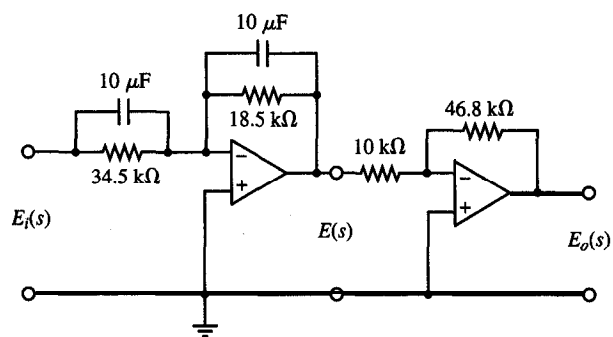


Figura 7-11
Compensador de adelanto.

La constante de error estático de velocidad K_v se obtiene a partir de la expresión

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{s18.7(s+2.9)}{s(s+2)(s+5.4)}$$

$$= 5.02 \text{ seg}^{-1}$$

Observe que el tercer polo en lazo cerrado del sistema diseñado se obtiene si se divide la ecuación característica entre los factores conocidos, del modo siguiente:

$$s(s+2)(s+5.4) + 18.7(s+2.9) = (s+2+j2\sqrt{3})(s+2-j2\sqrt{3})(s+3.4)$$

El método de compensación anterior nos permite colocar los polos dominantes en lazo cerrado en los puntos deseados del plano complejo. El tercer polo en s = 3.4 está cerca del cero agregado en s = - 2.9. Por tanto, el efecto de este polo sobre la respuesta transitoria es relativamente pequeño. Dado que no se ha impuesto una restricción sobre el polo no dominante y no se ha definido una especificación relacionada con el valor del coeficiente estático de velocidad, concluimos que el diseño actual es satisfactorio.

Comentarios. Podemos colocar el cero del compensador en s = -2 y el polo en s = -4 para que la contribución del ángulo del compensador de adelanto sea de 30°. (En este caso, el cero del compensador de adelanto cancelará un polo de la planta,produciendo un sistema de segundo orden, en lugar del sistema de tercer orden que hemos diseñado.) Se observa que el valor K_v en este caso es 4 seg $^{-1}$. Es posible seleccionar otras combinaciones que produzcan un adelanto de fase de 30". (Para diferentes combinaciones de un cero y un polo del compensador que contribuyan 30°, el valor de α y el valor de k_v serán diferentes.) Aunque es posible cambiar ligeramente el valor de K_v alterando la ubicación del polo o el cero del compensador de adelanto, si se pretende obtener una ganancia grande en el valor de K_v, debemos transformar el compensador de adelanto en un compensador de atraso-adelanto. (Véase la compensación de atraso-adelanto en la sección 7-5.)

Comparación. de las respuestas escalón de los sistemas compensados y no compensados. A continuación examinaremos las respuestas escalón unitario de los sistemas compensados y no compensados con MATLAB.

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema compensado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{18.7(s+2.9)}{s(s+2)(s+5.4) + 18.7(s+2.9)}$$

$$= \frac{18.7s + 54.23}{s^3 + 7.4s^2 + 29.5s + 54.23}$$

En este caso

```
numc = [0  0    18.7 54.231
denc = [1 7.4 29.5 54.231
```

Para el sistema no compensado, la función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

Por tanto,

$$\text{num} = [0 \quad 0 \quad 4]$$
$$\text{den} = [1 \quad 2 \quad 4]$$

El programa MATLAB 7-1 produce las curvas de respuesta escalón unitario para los dos sistemas. La gráfica resultante aparece en la figura 7-12.

Programa MATLAB 7–1

```
% ---------- Respuesta escalón unitario ----------

% ***** Respuestas escalón unitario de los sistemas compensado y
% no compensado *****

numc = [0   0   18.7   54.23];
denc = [1   7.4   29.5   54.23];
num = [0   0   4];
den = [1   2   4];
t = 0:0.05:5;
[c1,x1,t] = step(numc,denc,t);
[c2,x2,t] = step(num,den,t);
plot(t,c1,t,c1,'o',t,c2,t,c2,'x')
grid
title('Respuestas escalón unitario de los sistemas compensado y no compensado')
xlabel('t seg')
ylabel('Salidas c1 y c2')
text(0.6,1.32,'Sistema compensado')
text(1.3,0.96,'Sistema no compensado')
```

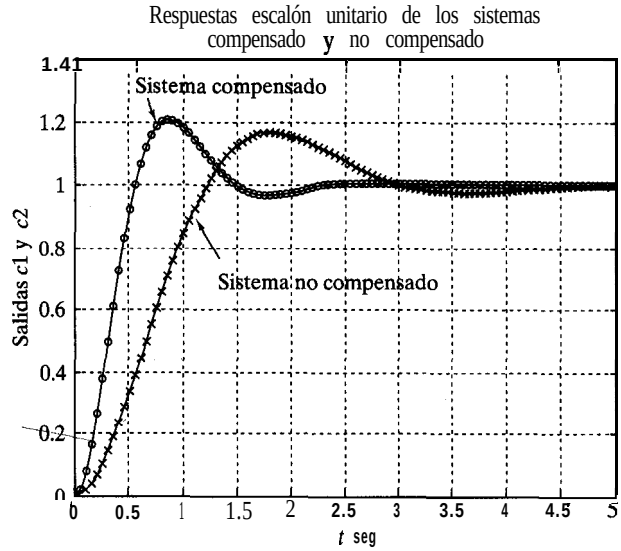


Figura **7–12**
Respuestas escalón unitario de los sistemas compensado y no compensado.

7-4 COMPENSACIÓN DE ATRASO

Compensador de atraso electrónico usando amplificadores operacionales. La configuración del compensador de atraso electrónico usando amplificadores operacionales es igual a la del compensador de adelanto de la figura 7-4. Si elegimos $R_2C_2 > R_1C_1$ en el circuito de la figura 7-4, éste se convierte en un compensador de atraso. A partir de la misma figura, la función de transferencia del compensador de atraso se obtiene mediante

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \hat{K}_c\beta\frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = \ddot{K}_c\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}}$$

en donde

$$T = R_1C_1, \qquad \beta T = R_2C_2, \qquad \beta = \frac{R_2C_2}{R_1C_1} > 1, \qquad \hat{K}_c = \frac{R_4C_1}{R_3C_2}$$

Observe que usamos β en lugar de α en las expresiones anteriores. [En el compensador de adelanto usamos α para indicar la razón $R_2C_2/(R_1C_1)$, que era menor que 1, o $0 < \alpha < 1$.] En este capítulo siempre supondremos que $0 < \alpha < 1$ y que $\beta > 1$.

Técnicas de compensación de atraso basadas en el enfoque del lugar geométrico de las raíces. Considere el problema de encontrar una red de compensación conveniente para un sistema que exhibe características satisfactorias de la respuesta transitoria, pero características insatisfactorias en estado estable. En este caso la compensación consiste, esencialmente, en incrementar la ganancia en lazo cerrado sin modificar en forma notable las características de la respuesta transitoria. Esto quiere decir que no debe cambiarse de manera significativa el lugar geométrico de las raíces en la vecindad de los polos dominantes en lazo cerrado, sino que debe incrementarse la ganancia en lazo abierto en la medida en que se necesite. Esto se consigue si se coloca un compensador de atraso en cascada con la función de transferencia de la trayectoria directa determinada.

Para evitar un cambio notable en los lugares geométricos de las raíces, la contribución de ángulo de la red de atraso debe limitarse a una cantidad pequeña, por ejemplo 5". Para asegurar esto, colocamos el polo y el cero de la red de atraso relativamente cerca uno del otro y cerca del origen del plano s. De este modo, los polos en lazo cerrado del sistema compensado sólo se alejarán ligeramente de sus ubicaciones originales. Por tanto, la característica de la respuesta transitoria cambiará muy poco.

Considere un compensador de atraso $G_c(s)$, en el que

$$G_c(s) = \ddot{K}_c\beta\frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = \ddot{K}_c\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} \qquad (7\text{–}2)$$

Si colocamos el cero y el polo del compensador de atraso muy cerca uno del otro, en $s = s_1$, en donde s_1 es uno de los polos dominantes en lazo cerrado, las magnitudes $s_1 + (1/T)$ y $s_1 + [1/(\beta T)]$ serán casi iguales, o bien,

$$|G_c(s_1)| = \left| \hat{K}_c \frac{s_1 + \frac{1}{T}}{s_1 + \frac{1}{\beta T}} \right| \doteq \hat{K}_c$$

Esto implica que, si la ganancia $\hat{K}_c$ del compensador de atraso se hace igual a 1, la caracterfstica de la respuesta transitoria no se alterará. (Esto significa que la ganancia global de la función de transferencia en lazo abierto se incrementará en un factor de β, en donde $\beta > 1$.) Si el polo y el cero se colocan muy cerca del origen, puede aumentarse el valor de β. (Se usa un valor grande de β, siempre que sea posible la materialización del compensador de atraso.) Se debe señalar que el valor de T debe ser grande, pero no es indispensable conocer su valor exacto. Sin embargo, no debe ser demasiado grande, a fin de evitar dificultades al momento de materializar el compensador de atraso de fase mediante componentes físicos.

Un incremento en la ganancia significa un incremento en las constantes de error estático. Si la función de transferencia en lazo abierto del sistema no compensado es G(s), la constante de error estático de velocidad K_v del sistema no compensado es

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)$$

Si el compensador se selecciona como el que se obtiene de la ecuación (7–2), entonces, para el sistema compensado con la función de transferencia en lazo abierto $G_c(s)G(s)$, la constante de error estático de velocidad $\hat{K}_v$ se convierte en:

$$\begin{aligned} \hat{K}_v &= \lim_{s \to 0} sG_c(s)G(s) \\ &= \lim_{s \to 0} G_c(s)K_v \\ &= \hat{K}_c \beta K_v \end{aligned}$$

Por tanto, si el compensador se obtiene mediante la ecuación (7–2), la constante de error estático de velocidad se incrementa en un factor de $\hat{K}_c\,\beta$, en donde $\hat{K}_c$ tiene un valor cercano a la unidad.

Procedimientos de diseño para la compensación de atraso mediante el método del lugar geométrico de las raíces. El procedimiento para diseñar compensadores de atraso para el sistema de la figura 7-13 mediante el método del lugar geométrico de las raíces se plantea del modo siguiente (suponemos que el sistema no compensado cumple las especificaciones de la respuesta transitoria mediante un simple ajuste de la ganancia; si no sucede así, consulte la sección 7-5):

1. Dibuje la gráfica del lugar geométrico de las raíces para el sistema no compensado, cuya función de transferencia en lazo abierto sea G(s). Con base en las especificaciones de la respuesta transitoria, ubique los polos dominantes en lazo cerrado en el lugar geométrico de las raíces.
2. Suponga que la función de transferencia del compensador de atraso es

$$G_c(s) = \hat{K}_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = \hat{K}_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}$$

Así, la función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado se convierte en $G_c(s)G(s)$.

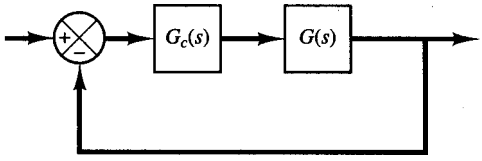


Figura 7–13
Sistema de control.

3. Calcule la constante de error estático especificada en el problema.

4. Determine el incremento necesario en la constante de error estático para satisfacer las especificaciones.

5. Determine el polo y el cero del compensador de atraso que producen el incremento necesario en la constante de error estático determinado sin alterar apreciablemente los lugares geométricos de las raíces originales. (Observe que la razón entre el valor de la ganancia requerido en las especificaciones y la ganancia que se encuentra en el sistema no compensado es la razón entre la distancia del cero al origen y la del polo al origen.)

6. Dibuje una nueva gráfica del lugar geométrico de las raíces para el sistema no compensado. Localice los polos dominantes en lazo cerrado deseados sobre el lugar geométrico de las raíces. (Si la contribución de ángulo de la red de atraso es muy pequeña, es decir, de pocos grados, los lugares geométricos de las raíces originales y los nuevos serán casi idénticos. Sin embargo, habrá una ligera discrepancia entre ellos. A continuación ubique, sobre el nuevo lugar geométrico de las raíces, los polos dominantes en lazo cerrado deseados a partir de las especificaciones de la respuesta transitoria.)

7. Ajuste la ganancia $\hat{K}_c$ del compensador a partir de la condición de magnitud, a fin de que los polos dominantes en lazo cerrado se encuentren en la ubicación deseada.

EJEMPLO 7-2 Considere el sistema de la figura 7–14(a). La función de transferencia de la trayectoria directa es

$$G(s) = \frac{1.06}{s(s + 1)(s + 2)}$$

La gráfica del lugar geométrico de las raíces para el sistema aparece en la figura 7–14(b). La función de transferencia en lazo cerrado se convierte en

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1.06}{s(s + 1)(s + 2) + 1.06}$$

$$= \frac{1.06}{(s + 0.3307 - j0.5864)(s + 0.3307 + j0.5864)(s + 2.3386)}$$

Los polos dominantes en lazo cerrado son

$$s = -0.3307 \pm j0.5864$$

El factor de amortiguamiento de los polos dominantes en lazo cerrado es $\zeta = 0.491$. La frecuencia natural no amortiguada de los polos dominantes en lazo cerrado es 0.673 rad/seg. La constante de error estático de velocidad es 0.53 seg^{-1}.

Se pretende incrementar la constante de error estático de velocidad K_v hasta cerca de 5 seg^{-1} sin modificar notablemente la ubicación de los polos dominantes en lazo cerrado.

Para cumplir con esta especificación, insertamos un compensador de atraso como el obtenido mediante la ecuación (7–2), en cascada con la función de transferencia de la trayectoria directa

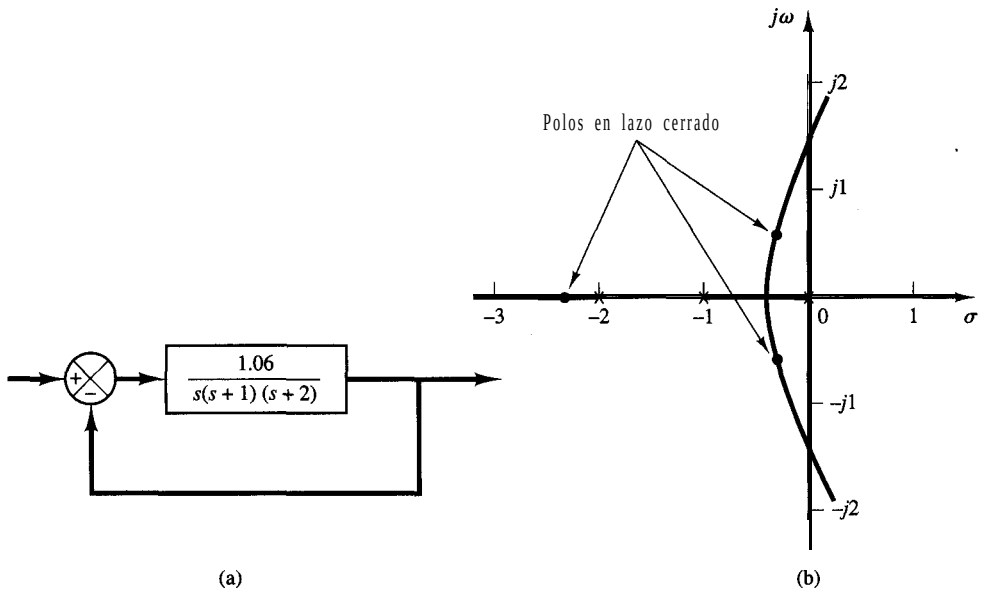


Figura 7-14
(a) Sistema de control; (b) gráfica del lugar geométrico de las raíces.

determinada. Para incrementar la constante de error estático de velocidad en un factor de alrededor de 10, seleccionamos $\beta = 10$ y colocamos el cero y el polo del compensador de atraso en $s = -0.05$ y $s = -0.005$, respectivamente. La función de transferencia del compensador de atraso se convierte en

$$G_c(s) = \hat{K}_c \frac{s + 0.05}{s + 0.005}$$

La contribución de ángulo de esta red de atraso cerca de un polo dominante en lazo cerrado es de alrededor de 4°. Debido a que esta contribución de ángulo no es muy pequeña, existe un cambio mínimo en el nuevo lugar geométrico de las raíces cerca de los polos dominantes en lazo cerrado deseados

$$G_c(s)G(s) = \hat{K}_c \frac{s + 0.05}{s + 0.005} \frac{1.06}{s(s + 1)(s + 2)}$$
$$= \frac{K(s + 0.05)}{s(s + 0.005)(s + 1)(s + 2)}$$

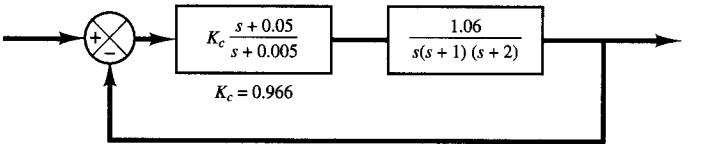
en donde

$$K = 1.06\hat{K}_c$$

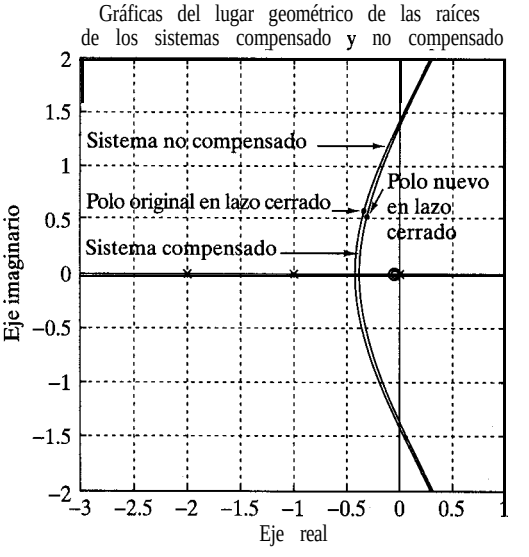
El diagrama de bloques del sistema compensado aparece en la figura 7–15(a). La gráfica del lugar geométrico de las raíces para el sistema compensado cerca de los polos dominantes en lazo cerrado se muestra en la figura 7–15(b), junto con la gráfica original del lugar geométrico de las raíces. La figura 7–15(c) muestra la gráfica del lugar geométrico de las raíces del sistema compensado cerca del origen. El programa MATLAB 7-2 genera las gráficas del lugar geométrico de las raíces de las figuras 7–15(b) y (c).

Si el factor de amortiguamiento relativo de los nuevos polos dominantes en lazo cerrado no cambia, los polos se obtienen a partir de la nueva gráfica del lugar geométrico de las raíces del modo siguiente:

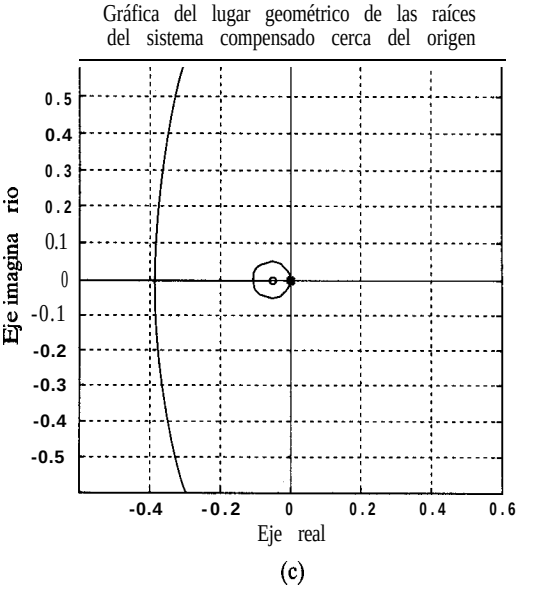
$$s_1 = -0.31 + j0.55, \qquad s_2 = -0.31 - j0.55$$



(a)



(b)



(c)

Figura 7-15
(a) Sistema compensado; (b) gráficas del lugar geométrico de las raíces del sistema compensado y el sistema no compensado; (c) gráfica del lugar geométrico de las raíces del sistema compensado cerca del origen.

Programa MATLAB 7–2

```
% -------- Gráfica del lugar geométrico de las raíces--------

% ***** Gráficas del lugar geométrico de las raíces del sistema compensado y
% el sistema no compensado *****

% ***** Introduzca los numeradores y denominadores de los
% sistemas compensado y no compensado *****

numc = [0  0  0  1  0.05];
denc = [1  3.005  2.015  0.01  0];
num = [0  0  0  1.06];
den = [1  3  2  0];

% ***** Introduzca el comando rlocus. Grafique los lugares geométricos de las raíces
% de ambos sistemas *****

rlocus(numc,denc)
hold
Current plot held
rlocus(num,den)
v = [-3  1  -2  2]; axis(v); axis('square')
grid
text(-2.8,0.2,'Sistema compensado')
text(-2.8,1.2,'Sistema no compensado')
text(-2.8,0.58,'Polo original en lazo cerrado')
text(-0.1,0.85,'Polo nuevo-')
text(-0.1,0.62,'en lazo cerrado')
title('Gráficas del lugar geométrico de las raíces de los sistemas compensado y no compensado')

hold
Current plot released

% ***** Graficar los lugares geométricos de las raíces del sistema compensado cerca del origen *****

rlocus(numc,denc)
v = [-0.6  0.6  -0.6  0.6]; axis(v); axis('square')
grid
title('Gráfica del lugar geométrico de las raíces del sistema compensado cerca del origen')
```

La ganancia en lazo abierto K es

$$K = \left| \frac{s(s + 0.005)(s + 1)(s + 2)}{s + 0.05} \right|_{s=-0.31+j0.55}$$

$$= 1.0235$$

Por tanto, la ganancia del compensador de atraso $\hat{K}_c$ se determina como

$$\hat{K}_c = \frac{K}{1.06} = \frac{1.0235}{1.06} = 0.9656$$

Así, la función de transferencia del compensador de atraso diseñado es

$$G_c(s) = 0.9656\,\frac{s + 0.05}{s + 0.005} = 9.656\,\frac{20s + 1}{200s + 1}$$

Por lo cual, el sistema compensado tiene la siguiente función de transferencia en laxo abierto:

$$G_1(s) = \frac{1.0235(s + 0.05)}{s(s + 0.005)(s + 1)(s + 2)} = \frac{5.12(20s + 1)}{s(200s + 1)(s + 1)(0.5s + 1)}$$

La constante de error estático de velocidad K_v es

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_1(s) = 5.12 \text{ seg}^{-1}$$

En el sistema compensado, la constante de error estático de velocidad ha aumentado a 5.12 seg^{-1}, o 5.12/0.53 = 9.66 veces su valor original. (El error en estado estable con entradas rampa ha disminuido alrededor de 10% del valor del sistema original.) En esencia hemos obtenido el objetivo de diseño de incrementar la constante de error estático de velocidad hasta cerca de 5 seg^{-1}.

Observe que, dado que el polo y el cero del compensador de atraso están muy cerca uno del otro, así como muy cerca del origen, su efecto sobre la forma de los lugares geométricos de las raíces originales es pequeño. Excepto por la presencia de un lugar geométrico de las raíces cerrado y pequeño cerca del origen, los lugares geométricos de las raíces de los sistemas compensado y no compensado son muy similares entre sí, a pesar de que la constante de error estático de velocidad del sistema compensado es 9.66 veces más grande que la del sistema no compensado.

Los otros dos polos en lazo cerrado para el sistema compensado se encuentran del modo siguiente:

$$s_3 = -2.326, \qquad s_4 = -0.0549$$

La adición del compensador de atraso incrementa el orden del sistema de 3 a 4, incorporando un polo en lazo cerrado adicional cerca del cero del compensador de atraso. (El polo en laxo cerrado agregado en $s =$ 0.0549 está cerca del cero en $s = -0.05$.) Este par de un cero y un polo crea una larga cola de amplitud pequeña en la respuesta transitoria, como veremos después en la respuesta escalón unitario. Dado que el polo en $s = -2.326$ está muy lejos del eje $j\omega$ en comparación con los polos dominantes en laxo cerrado, también es pequeño su efecto sobre la respuesta transitoria. Por tanto, consideramos los polos en lazo cerrado en $s = -0.31 \pm j0.55$ como los polos dominantes en laxo cerrado.

La frecuencia natural no amortiguada de los polos dominantes en laxo cerrado del sistema compensado es de 0.631 rad/seg. Este valor es alrededor del 6% menor que el valor original, 0.673 rad/seg. Esto implica que la respuesta transitoria del sistema compensado es más lenta que la del sistema original. La respuesta necesitará mas tiempo para asentarse. El sobrepaso máximo de la respuesta escalón aumentara en el sistema compensado. Si se toleran estos efectos adversos, la compensación de atraso, tal como se analiza aquí, presenta una solución satisfactoria al problema de diseño dado.

A continuación compararemos las respuestas rampa unitaria del sistema compensado con las del sistema no compensado y verificaremos que el desempeño en estado estable sea mucho mayor en el sistema compensado que en el sistema no compensado.

Para obtener la respuesta rampa unitaria con MATLAB, usamos el comando *step* (escalón) para el sistema $C(s)/[sR(s)]$. Dado que $C(s)/[sR(s)]$ para el sistema compensado es

$$\frac{C(s)}{sR(s)} = \frac{1.0235(s + 0.05)}{s[s(s + 0.005)(s + 1)(s + 2) + 1.0235(s + 0.05)]} = \frac{1.0235s + 0.0512}{s^5 + 3.005s^4 + 2.015s^3 + 1.0335s^2 + 0.0512s}$$

tenemos que

```
numc = [0  0 0 0 1.0235 0.05121
denc = [1  3.005  2.015  1.0335  0.0512  0]
```

Asimismo, $C(s)/[sR(s)]$ para el sistema no compensado es

$$\frac{C(s)}{sR(s)} = \frac{1.06}{s[s(s+1)(s+2)+1.061}$$

$$= \frac{1.06}{s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 1.06s}$$

Por tanto,

```
num = [0 0 0 0 1.061
den = [1 3 2 1.06 01
```

El programa MATLAB 7-3 genera la gráfica de las curvas de respuesta rampa unitaria. La figura 7-16 muestra el resultado. Es evidente que el sistema compensado presente un error en estado estable mucho más pequeño (un décimo del error en estado estable original) al seguir la entrada rampa unitaria.

El programa MATLAB 7–4 genera las curvas de respuesta escalón unitario de los sistemas compensado y no compensado. Dichas curvas aparecen en la figura 7-17. Observe que el sis-

Programa MATLAB 7-3

```
% ---------- Respuesta rampa unitaria ----------

% ***** Respuestas rampa unitaria del sistema compensado y
% del sistema no compensado *****

% ***** La respuesta rampa unitaria se obtendrá como la
% respuesta escalón unitario de C(s)/[sR(s)] *****

% ***** Introduzca los numeradores y denominadores de C1(s)/[sR(s)]
% y C2(s)/[sR(s)], en los que C1(s) and C2(s) son las transformadas
% de Laplace de las salidas de los sistemas
% compensado y no compensado, respectivamente. *****

numc = [0  0  0  0  1.0235  0.0512];
denc = [1  3.005  2.015  1.0335  0.0512  0];
num = [0  0  0  0  1.06];
den = [1  3  2  1.06  0];

% ***** Especifique el rango de tiempo (por ejemplo t = 0:0.1:50) e introduzca
% el comando step y el comando plot. *****

t = 0:0.1:50;
[c1,x1,t] = step(numc,denc,t);
[c2,x2,t] = step(num,den,t);
plot(t,c1,'-',t,c2,'.',t,t,'--')
grid
text(2.2,27,'Sistema compensado');
text(26,21.3,'Sistema no compensado')
title('Respuestas rampa unitaria de los sistemas compensado y no compensado')
xlabel('t Seg');
ylabel('Salidas c1 y c2')
```

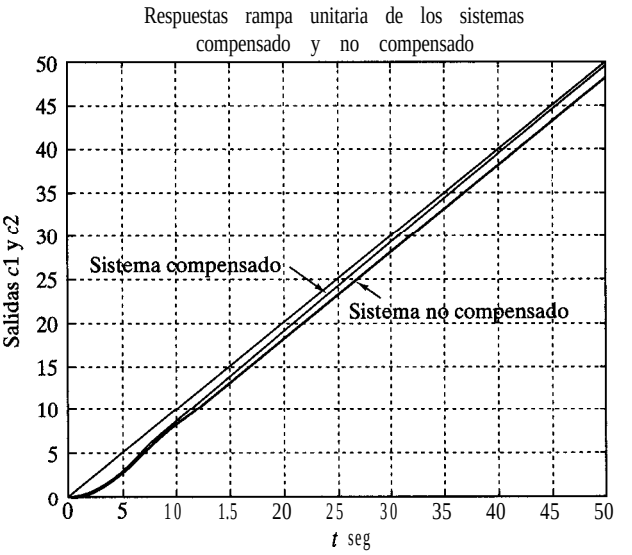


Figura 7-16
Respuestas rampa unitaria de los sistemas compensado y no compensado.

Programa MATLAB 7–4

```
% --------- Respuesta escalón unitario ---------

% ***** Respuestas escalón unitario del sistema compensado
% y el sistema no compensado *****

% ***** Introduzca los numeradores y los denominadores de los
% sistemas compensado y no compensado *****

numc = [0   0   0   1.0235   0.0512];
denc = [1   3.005   2.015   1.0335   0.0512];
num = [0   0   0   1.06];
den = [1   3   2   1.06];

% ***** Especifique el rango de tiempo (tal como t = 0:0.1:40) e introduzca
% el comando step y el comando plot. *****

t = 0:0.1:40;
[c1,x1,t] = step(numc,denc,t);
[c2,x2,t] = step(num,den,t);
plot(t,c1,'-',t,c2,'.')
grid
text(13.1,1.12,'Sistema compensado')
text(13.6,0.88,'Sistema no compensado')
title('Respuestas escalón unitario de los sistemas compensado y no compensado')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salidas c1 y c2')
```

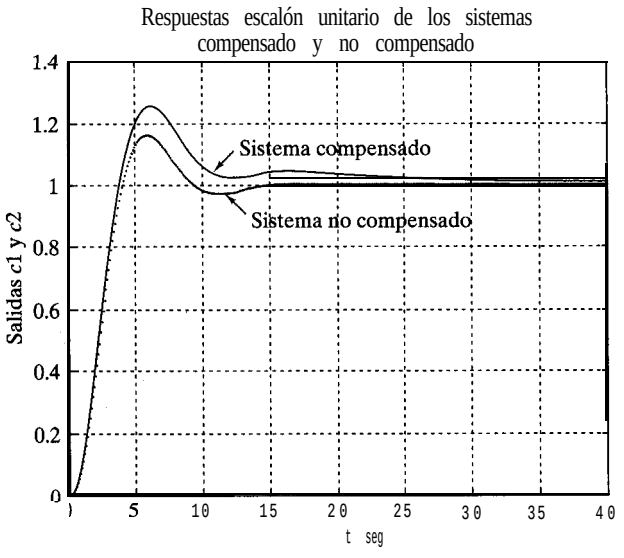


Figura 7–17
Respuestas escalón unitario de los sistemas compensado y no compensado.

tema compensado de atraso exhibe un sobrepaso máximo y una respuesta más lenta que el sistema no compensado original. Observe que el par formado por el polo en $s = -0.0549$ y el cero en $s = -0.05$ genera una cola larga de amplitud pequeña en la respuesta transitoria. Si no se pretende obtener un sobrepaso máximo más grande y una respuesta más lenta, es necesario usar un compensador de atraso-adelanto tal como se presenta en la sección 7-5.

7-5 COMPENSACIÓN DE ATRASO-ADELANTO

La compensación de adelanto básicamente acelera la respuesta e incrementa la estabilidad del sistema. La compensación de atraso mejora la precisión en estado estable del sistema, pero reduce la velocidad de la respuesta.

Si se desea mejorar tanto la respuesta transitoria como la respuesta en estado estable, debe usarse en forma simultánea un compensador de adelanto y un compensador de atraso. Sin embargo, en lugar de introducir un compensador de adelanto y un compensador de atraso, ambos como elementos separados, es más económico sólo usar un compensador de atraso-adelanto.

La compensación de atraso-adelanto combina las ventajas de las compensaciones de atraso y de adelanto. Dado que el compensador de atraso-adelanto posee dos polos y dos ceros, tal compensación aumenta en dos el orden del sistema, a menos que ocurra una cancelación de polos y ceros en el sistema compensado.

Compensador electrónico de atraso-adelanto usando amplificadores operacionales. La figura 7-18 muestra un compensador electrónico de atraso-adelanto que usa amplificadores operacionales. La función de transferencia para este compensador se obtiene del modo siguiente: la impedancia compleja Z_1 se obtiene a partir de

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1 + \dfrac{1}{C_1 s}} + \frac{1}{R_3}$$

o bien

$$Z_1 = \frac{(R_1C_1s + 1)R_3}{(R_1 + R_3)C_1s + 1}$$

Del mismo modo, la impedancia compleja Z_2 se obtiene mediante

$$Z_2 = \frac{(R_2C_2s + 1)R_4}{(R_2 + R_4)C_2s + 1}$$

Por tanto, tenemos que

$$\frac{E(s)}{\text{J\%)}} = \frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_4}{R_3}\frac{(R_1 + R_3)C_1s + 1}{R_1C_1s + 1}\cdot\frac{R_2C_2s + 1}{(R_2 + R_4)C_2s + 1}$$

El inversor de signo tiene la función de transferencia

$$\frac{E_o(s)}{E(s)} = -\frac{R_6}{R_5}$$

Así, la función de transferencia del compensador de la figura 7-18 es

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{E(s)}{E_i(s)}\frac{E(s)_0}{} = \frac{R_4R_6}{R_3R_5}\left[\frac{(R_1 + R_3)C_1s + 1}{R_1C_1s + 1}\right]\left[\frac{R_2C_2s + 1}{(R_2 + R_4)C_2s + 1}\right] \qquad (7\text{-}3)$$

Definamos

$$T_1 = (R_1 + R_3)C_1, \qquad \frac{T_1}{\text{Y}} = R_1C_1, \qquad T_2 = R_2C_2, \qquad \beta T_2 = (R_2 + R_4)C_2$$

Entonces, la ecuación (7-3) se convierte en

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_c\frac{\beta}{\gamma}\left(\frac{T_1s + 1}{\frac{T_1}{\gamma}s + 1}\right)\left(\frac{T_2s + 1}{\beta T_2s + 1}\right) = K_c\frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\gamma}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)} \qquad (7\text{-}4)$$

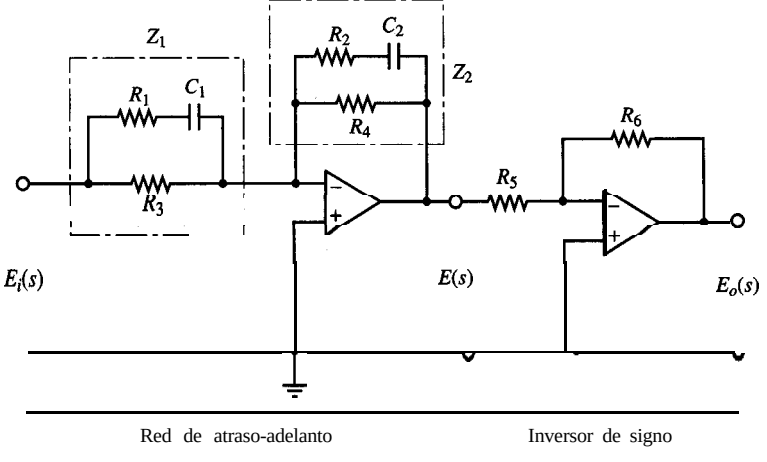


Figura 7–18
Compensador de atraso-adelanto.

en donde

$$\gamma = \frac{R_1 + R_3}{R_1} > 1, \qquad \beta = \frac{R_2 + R_4}{R_2} > 1, \qquad K_c = \frac{R_2R_4R_6}{R_1R_3R_5}\frac{R_1 + R_3}{R_2 + R_4}$$

Observe que, con frecuencia, β se selecciona igual a y.

Técnicas de compensación de atraso-adelanto basadas en el enfoque del lugar geométrico de las raíces. Considere el sistema de la figura 7-19. Suponga que usamos el compensador de atraso-adelanto:

$$G_c(s) = K_c\frac{\beta}{\gamma}\frac{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\gamma}s + 1\right)(\beta T_2 s + 1)} = K_c\left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}}\right)\left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}}\right) \qquad (7\text{–}5)$$

en el que $\beta > 1$ y $\gamma > 1$. (Suponga que K_c pertenece a la parte de adelanto del compensador de atraso-adelanto.)

Al diseñar los compensadores de atraso-adelanto, consideramos dos casos: $\gamma \neq \beta$ y $\gamma = \beta$.

Caso 1. $\gamma \neq \beta$. En este caso, el proceso de diseño es una combinación del diseño del compensador de adelanto con el del compensador de atraso. El siguiente es el procedimiento para el compensador de atraso-adelanto:

1. A partir de las especificaciones de desempeño proporcionadas, determine la ubicación deseada para los polos dominantes en lazo cerrado.
2. Use la función de transferencia en lazo abierto no compensado G(s), para determinar la deficiencia de ángulo ϕ si los polos dominantes en lazo cerrado estarán en la posición deseada. La parte de adelanto de fase del compensador de atraso-adelanto debe contribuir a este ángulo ϕ.
3. Suponiendo que después selecciona un T_2 suficientemente grande para que la magnitud de la parte de atraso

$$\left|\frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}}\right|$$

se acerque a la unidad, de modo que $s = s_1$ es uno de los polos dominantes en lazo cerrado, elija los valores de T_1 y γ a partir del requerimiento de que

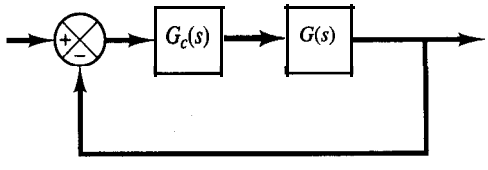


Figura 7–19
Sistema de control.

$$\left/ \frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{\gamma}{T_1}} = \phi \right.$$

La elección de T_1 y γ no es única. (Puede escogerse un conjunto infinitamente más grande de valores para T_1 y y.) A continuación determine el valor de K_c a partir de la condición de magnitud:

$$\left| K_c \frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{\gamma}{T_1}} G(s_1) \right| = 1$$

4. Si se especifica la constante de error estático de velocidad K_v, determine el valor de β que satisfaga el requerimiento para K_v. La constante de error estático de velocidad K_v se obtiene mediante

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_c(s)G(s)$$

$$= \lim_{s \to 0} sK_c \left| \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right| \left| \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right| G(s)$$

$$= \lim_{s \to 0} sK_c \frac{\beta}{\gamma} G(s)$$

en donde K_c y γ se determinaron en el paso 3. Por tanto, dado el valor de K_v, el valor de β se determina a partir de esta última ecuación. Después, usando el valor de β determinado de este modo, seleccione un valor de T_2 tal que

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right| \doteq 1$$

$$-5^\circ < \left/ \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} < 0^\circ \right.$$

(El procedimiento de diseño anterior se ilustra en el ejemplo 7-3.)

Caso 2. $\gamma = \beta$. Si se requiere que en la ecuación (7-5) $\gamma = \beta$, el procedimiento de diseño anterior para el compensador de atraso-adelanto se modifica del modo siguiente:

1. A partir de las especificaciones de desempeño proporcionadas, determine la ubicación deseada para los polos dominantes en lazo cerrado.

2. El compensador de atraso-adelanto obtenido mediante la ecuación (7-5) se modifica a

$$G_c(s) = K_c \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\beta} s + 1\right)(\beta T_2 s + 1)} = K_c' \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)} \quad (7\text{-}6)$$

en donde $\beta > 1$. La función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado es $G_c(s)G(s)$. Si se especifica la constante de error estático de velocidad K_v, determine el valor de la constante K_c a partir de la ecuación siguiente:

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_c(s)G(s)$$

$$= \lim_{s \to 0} sK_cG(s)$$

3. Para tener los polos dominantes en lazo cerrado en la ubicación deseada, calcule la contribución requerida del ángulo ϕ de la parte de adelanto de fase del compensador de atraso-adelanto.

4. Para el compensador de atraso-adelanto, seleccione una T_2 suficientemente grande, a fin de que

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right|$$

se aproxime a la unidad, de modo que $s = s_1$ sea uno de los polos dominantes en lazo cerrado. Determine los valores de T_1 y β a partir de las condiciones de magnitud y de ángulo:

$$\left| K_c \left(\frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{\beta}{T_1}} \right) G(s_1) \right| = 1$$

$$\angle \frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{\beta}{T_1}} = \phi$$

5. Usando el valor de β recién determinado, seleccione T_2 de modo que

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right| \doteq 1$$

$$-5° < \angle \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{S_1 + \frac{1}{\beta T_2}} < 0"$$

El valor de βT_2, la constante de tiempo más grande del compensador de atraso-adelanto no debe ser demasiado grande, a fin de que pueda materializarse. (Un ejemplo del diseño de un compensador de atraso-adelanto cuando $\gamma = \beta$ se ofrece en el ejemplo 74.)

EJEMPLO 7-3 Considere el sistema de control de la figura 7-20. La función de transferencia de la trayectoria directa es

$$G(s) \quad \frac{4}{s(s + 0.5)}$$

Este sistema tiene polos en lazo cerrado en

$$s = -0.2500 \pm j1.9843$$

El factor de amortiguamiento relativo es 0.125, la frecuencia natural no amortiguada es de 2 rad/seg y la constante de error estático de velocidad es de 8 seg $^{-1}$.

Se desea que el factor de amortiguamiento relativo de los polos dominantes en lazo cerrado sea igual a 0.5, así como aumentar la frecuencia natural no amortiguada a 5 rad/seg y la constante de error estático de velocidad a 80 seg $^{-1}$. Diseñe un compensador apropiado para cumplir todas las especificaciones de desempeño.

Supongamos que usamos un compensador de atraso-adelanto que tiene la función de transferencia

$$G_c(s) = K_c\left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}}\right)\left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}}\right) \qquad (\gamma > 1, \beta > 1)$$

en donde γ no es igual a β. En este caso, el sistema compensado tendrá la función de transferencia

$$G_c(s)G(s) = K_c\left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}}\right)\left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}}\right) G(s)$$

A partir de las especificaciones de desempeño, los polos dominantes en lazo cerrado deben estar en

$$s = -2.50 \pm j4.33$$

Dado que

$$\left/\frac{4}{s(s + 0.5)}\right|_{s=-2.50+j4.33} = -235°$$

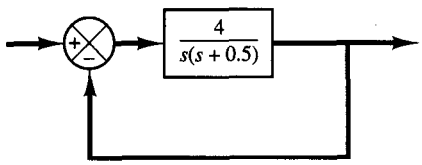


Figura 7–20
Sistema de control.

la parte de adelanto de fase del compensador de atraso-adelanto debe contribuir con 55° para que el lugar geométrico de las raíces pase por la ubicación deseada de los polos dominantes en lazo cerrada

Para diseñar la parte de adelanto de fase del compensador, primero determinamos la ubicación del cero y el polo que dan una aportación de 55°. Existen muchas formas de hacer esto, pero aquí elegiremos el cero en $s = -0.5$, para que cancele el polo en $s = -0.5$ de la planta. Una vez elegido el cero, el polo se ubica de modo que la contribución de ángulo sea 55". Mediante un cálculo simple o el análisis gráfico, el polo debe ubicarse en $s = -5.021$. Por tanto, la parte de adelanto de fase del compensador de atraso-adelanto se convierte en

$$K_c \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} = K_c \frac{s + 0.5}{s + 5.021}$$

Así,

$$T_1 = 2, \qquad \gamma = \frac{5.021}{0.5} = 10.04$$

A continuación determinamos el valor de K_c a partir de la condición de magnitud:

$$\left| K_c \frac{s + 0.5}{s + 5.021} \frac{4}{s(s + 0.5)} \right|_{s=-2.5+j4.33} = 1$$

De este modo,

$$K_c = \left| \frac{(s + 5.021)s}{4} \right|_{s=-2.5+j4.33} = 6.26$$

La parte de atraso de fase del compensador se diseña del modo siguiente: primero se determina el valor de β que satisfaga el requerimiento sobre la constante de error estático de velocidad:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0} sK_c \frac{\beta}{\gamma} G(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} s(6.26) \frac{\beta}{10.04} \frac{4}{s(s+0.5)} = 4.988\beta = 80$$

Por tanto, β se determina como

$$\beta = 16.04$$

Por último, elegimos un valor de T_2 suficientemente grande para que

$$\left| \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{16.04T_2}} \right|_{s=-2.5+j4.33} \doteq 1$$

$$-5" < \left/ \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{16.04T_2}} \right|_{s=-2.5+j4.33} < 0°$$

Dado que $T_2 \div 5$ (o cualquier otro número mayor que 5) satisface los dos requerimientos anteriores, seleccionamos

$$T_2 = 5$$

Ahora la función de transferencia del compensador de atraso-adelanto diseñado se obtiene mediante

$$G_c(s) = (6.26)\left(\frac{s + \frac{1}{2}}{s + \frac{10.04}{2}}\right)\left(\frac{s + \frac{1}{5}}{s + \frac{1}{16.04 \times 5}}\right)$$

$$= 6.26\left(\frac{s + 0.5}{s + 5.02}\right)\left(\frac{s + 0.2}{s + 0.01247}\right)$$

$$= \frac{10(2s + 1)(5s + 1)}{(0.1992s + 1)(80.19s + 1)}$$

El sistema compensado tendrá la función de transferencia en lazo abierto

$$G_c(s)G(s) = \frac{25.04(s + 0.2)}{s(s + 5.02)\ (s + 0.01247)}$$

Debido a la cancelación de los términos (s + 0.5), el sistema compensado es de tercer orden. (Matemáticamente esta cancelación es exacta, pero en la práctica no lo es, debido a que, por lo general, al obtener el modelo matemático del sistema son necesarias algunas aproximaciones y, como resultado, las constantes de tiempo no son precisas.) La gráfica del lugar geométrico de las raíces del sistema compensado aparece en la figura 7–21(a). Una vista ampliada de la gráfica del lugar geométrico de las raíces cerca del origen aparece en la figura 7–21(b). Debido a que la contribución de ángulo de la parte de atraso de fase del compensador de atraso-adelanto es muy pequeña, sólo hay un cambio pequeño en la ubicación de los polos dominantes en lazo cerrado a

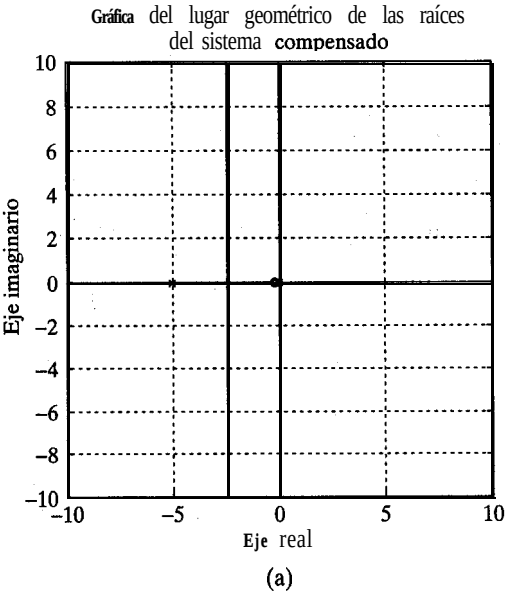
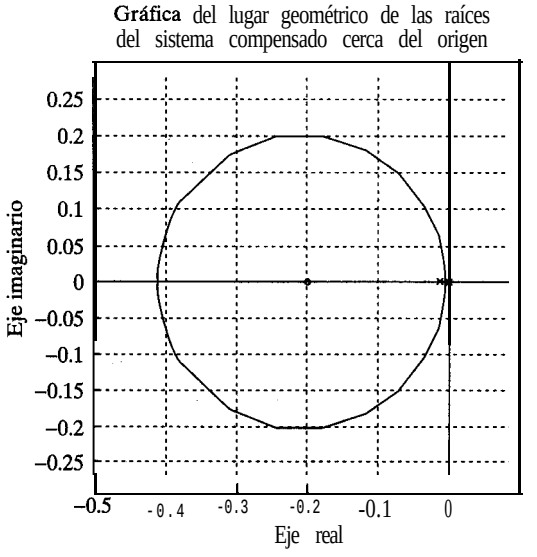


Figura 7–21
(a) Gráfica del lugar geométrico de las raíces del sistema compensado; (b) gráfica del lugar geométrico de las raíces cerca del origen.

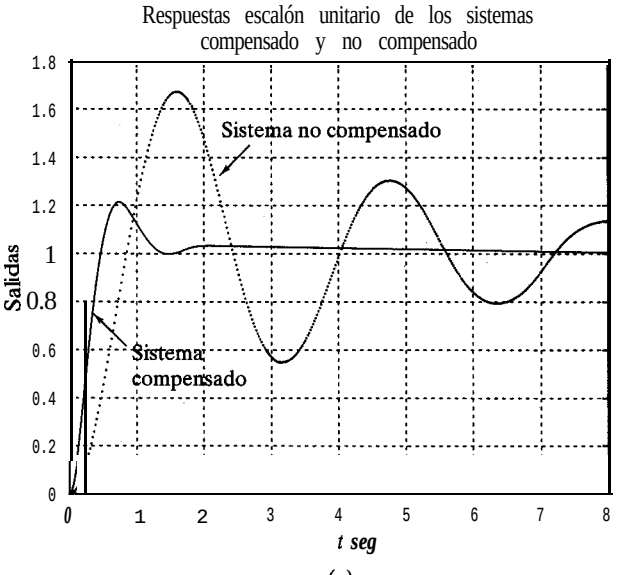


(b)

Figura 7-21
(Continuación)

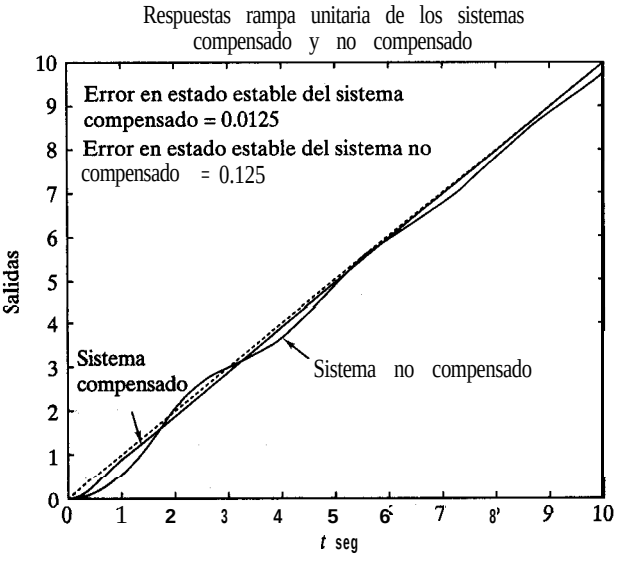
partir de la ubicación deseada, $s = -2.5 \pm j4.33$. De hecho, los nuevos polos en lazo cerrado se ubican en $s = -2.4123 \pm j4.2756$. (El nuevo factor de amortiguamiento relativo es $\zeta = 0.491$.) De este modo, el sistema compensado cumple todas las especificaciones de desempeño requeridas. El tercer polo en lazo cerrado del sistema compensado se ubica en $s = -0.2078$. Dado que este polo está muy cerca del cero en $s = -0.2$, el efecto de este polo sobre la respuesta es pequeño. (Observe que, en general, si un polo y un cero están cercanos entre sí sobre el eje real negativo cerca del origen, su combinación producirá una larga cola de amplitud pequeña en la respuesta transitoria.)

Las curvas de respuesta escalón unitario y las curvas de respuesta rampa unitaria antes y después de la compensación aparecen en la figura 7-22.



(a)

Figura 7-22
Curvas de respuesta transitoria para el sistema compensado y el sistema no compensado. (a) Curvas de respuesta escalón unitario; (b) curvas de respuesta rampa unitaria.



(b)

Figura 7-22
(Continuación)

EJEMPLO 7-4 Considere el sistema de control del ejemplo 7-3. Suponga que usamos un compensador de atraso-adelanto de la forma obtenida mediante la ecuación (7–6), o bien,

$$G_c(s) = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)} \qquad (\beta > 1)$$

Suponiendo que las especificaciones son iguales a las obtenidas en el ejemplo 7-3, diseñe un compensador G,(s).

Las ubicaciones deseadas para los polos dominantes en lazo cerrado están en

$$s = -2.50 \pm j4.33$$

La función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado es

$$G_c(s)G(s) = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)} \frac{4}{s(s + 0.5)}$$

Dado que el requerimiento sobre la constante de error estático de velocidad K_v es de 80 seg^{-1}, tenemos que

$$K_c = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0} K_c \frac{4}{0.5} = 8K_c = 80$$

Por tanto,

$$K_c = 10$$

La constante de tiempo T_1 y el valor de β se determinan a partir de

$$\left|\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}}\right| \left|\frac{40}{s(s + 0.5)}\right|_{s=-2.5+j4.33} = \left|\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}}\right| \frac{8}{4.77} = 1$$

$$\left/ \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right|_{s = -2.5 + j4.33} = 55°$$

Remitiéndonos a la figura 7-23, es fácil localizar los puntos A y B tales que

$$\angle APB = 55°, \qquad \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{4.77}{8}$$

(Use un enfoque gráfico o un enfoque trigonométrico.) El resultado es

$$\overline{AO} = 2.38, \qquad \overline{BO} = 8.34$$

o bien

$$T_1 = \frac{1}{2.38} = 0.420, \qquad \beta = 8.34T_1 = 3.503$$

Por tanto, la parte de adelanto de fase de la red de atraso-adelanto se convierte en

$$10\left(\frac{s + 2.38}{s + 8.34}\right)$$

Para la parte de atraso de fase, seleccionamos

$$T_2 = 10$$

Así,

$$\frac{1}{\beta T_2} = \frac{1}{3.503 \times 10} = 0.0285$$

Por tanto, el compensador de atraso-adelanto se convierte en

$$G_c(s) = (10)\left(\frac{s + 2.38}{s + 8.34}\right)\left(\frac{s + 0.1}{s + 0.0285}\right)$$

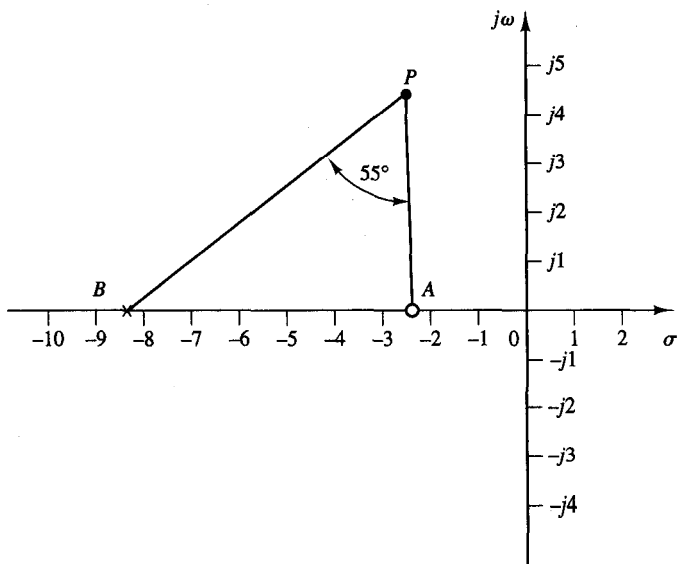


Figura 7-23
Determinación de la ubicación deseada de polos y ceros.

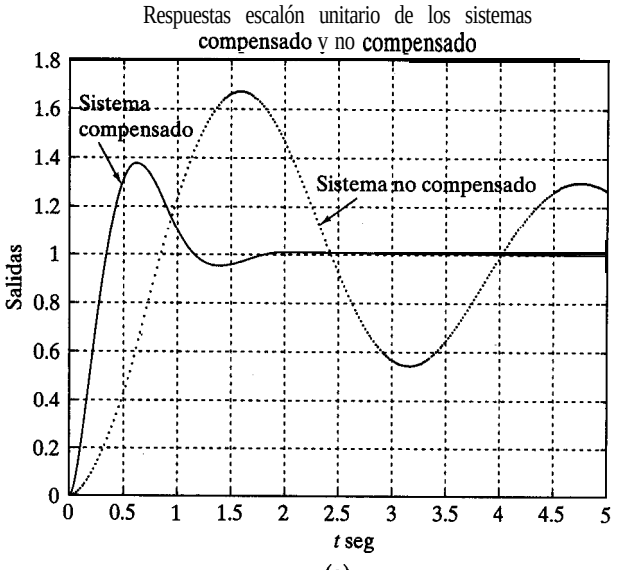
El sistema compensado tendrá la función de transferencia en lazo abierto

$$G_c(s)G(s) = \frac{40(s + 2.38)(s + 0.1)}{(s + 8.34)(s + 0.0285)s(s + 0.5)}$$

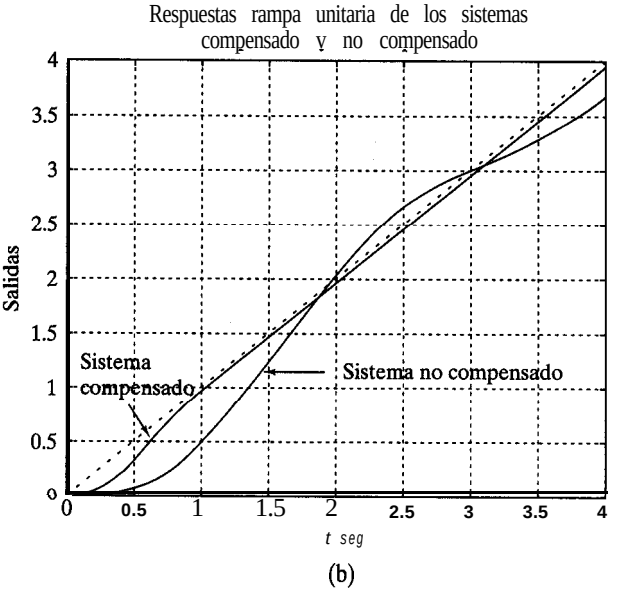
En este caso no ocurre una cancelación y el sistema compensado es de cuarto orden. Debido a que la contribución de ángulo de la parte de atraso de fase de la red de atraso-adelanto es muy pequeña, los polos dominantes en lazo cerrado se ubican muy cerca de la posición deseada. De hecho, los polos dominantes en lazo cerrado se localizan en $s = -2.4539 \pm j4.3099$. Los otros dos polos en lazo cerrado se localizan en

$$s = -0.1003, \qquad s = -3.8604$$

Dado que el polo en lazo cerrado en $s = -0.1003$ está muy cerca de un cero en $s = -0.1$, casi se cancelan uno al otro. Por tanto, el efecto de este polo en lazo cerrado es muy pequeño. El polo en lazo cerrado restante ($s = -3.8604$) no cancela realmente el polo en $s = -2.4$. El efecto de este



(a)



(b)

Figura 7–24
(a) Curvas de respuestas escalón unitario para los sistemas compensado y no compensado; (b) curvas de respuesta rampa unitaria para ambos sistemas.

cero es provocar un mayor sobrepaso en la respuesta escalón que el de un sistema similar sin dicho cero. Las curvas de respuesta escalón unitario de los sistemas compensado y no compensado aparecen en la figura 7–24(a). Las curvas de respuesta rampa unitaria para ambos sistemas se muestran en la figura 7–24(b).

EJEMPLO DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

A-I-I. Obtenga la función de transferencia del sistema mecánico de la figura 7-25. Suponga que el desplazamiento x_i es la entrada y el desplazamiento x_o es la salida del sistema.

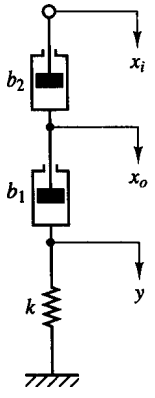


Figura 7–25
Sistema mecánico.

Solución. A partir del diagrama obtenemos la siguiente ecuación de movimiento:

$$b_2(\dot{x}_i - \dot{x}_o) = b_1(\dot{x}_o - \dot{y})$$
$$b_1(\dot{x}_o - \dot{y}) = ky$$

Tomando las transformadas de Laplace de estas dos ecuaciones, suponiendo condiciones iniciales cero y eliminando Y(s), obtenemos

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{\dfrac{b_1}{k}s + 1}{\dfrac{b_1 + b_2}{b_2} - \dfrac{b_1}{b_1 + b_2 k}s + 1}$$

Ésta es la función de transferencia entre $X_o(s)$ y $X_i(s)$. Si definimos

$$\frac{b_1}{k} = T, \qquad \frac{b_2}{b_1 + b_2} = \alpha < 1$$

obtenemos

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \alpha\,\frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = \frac{s + \dfrac{1}{T}}{s + \dfrac{1}{\alpha T}}$$

Este sistema mecánico es una red de adelanto mecánica.

A-7-2. Obtenga la función de transferencia del sistema mecánico de la figura 7-26. Suponga que el desplazamiento x_i es la entrada y el desplazamiento x_o es la salida.

Solución. Las ecuaciones de movimiento para este sistema son

$$b_2(\dot{x}_i - \dot{x}_o) + k_2(x_i - x_o) = b_1(\dot{x}_o - \dot{y})$$
$$b_1(\dot{x}_o - \dot{y}) = ky$$

Tomando las transformadas de Laplace de estas dos ecuaciones, y suponiendo condiciones iniciales de cero, obtenemos

$$b_2[sX_i(s) - sX_o(s)] + k_2[X_i(s) - X_o(s)] = b_1[sX_o(s) - sY(s)]$$
$$b_1[sX_o(s) \quad sY(s)] = k_1Y(s)$$

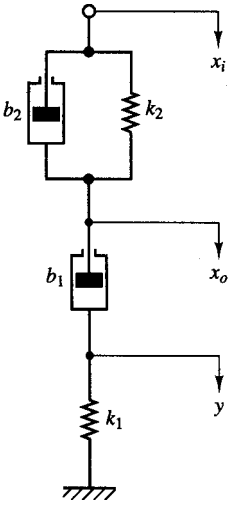


Figura 7–26
Sistema mecánico.

Si eliminamos Y(s) de las dos últimas ecuaciones, la función de transferencia $X_o(s)/X_i(s)$ se obtiene como

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{\left(\frac{b_1}{k_1}s + 1\right)\left(\frac{b_2}{k_2}s + 1\right)}{\left(\frac{b_1}{k_1}s + 1\right)\left(\frac{b_2}{k_2}s + 1\right) + \frac{b_1}{k_2}s}$$

Definimos

$$T_1 = \frac{b_1}{k_1}, \qquad T_2 = \frac{b_2}{k_2}, \qquad \frac{b_1}{k_1} + \frac{b_2}{k_2} + \frac{b_1}{k_2} = \frac{T_1}{\beta} + \beta T_2 \qquad (\beta > 1)$$

Entonces, $X_o(s)/X_i(s)$ se simplifica como

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\beta}s + 1\right)\left(\beta T_2 s + 1\right)} = \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)}$$

A partir de esta función de transferencia vemos que este sistema mecánico es una red de **atraso-adelanto** mecánica.

A-7-3. Considere la red electrónica de la figura 7-27. Obtenga la función de transferencia de la red. (Como se acostumbre en la obtención de la función de transferencia de cualquier red de cuatro

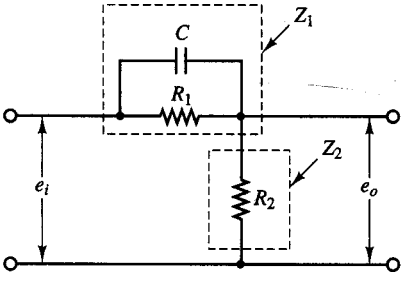


Figura 7-27
Red eléctrica.

terminales, suponemos que la impedancia fuente que ve la red es cero y que la impedancia de carga de salida es infinita.)

Solución. Usando los símbolos definidos en la figura 7-27, encontramos que las impedancias complejas Z_1 y Z_2 son

$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1Cs + 1}, \qquad Z_2 = R_2$$

La función de transferencia entre la salida $E_o(s)$ y la entrada $E_i(s)$ es

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{R_1Cs + 1}{\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}Cs + 1}$$

Definimos

$$R_1C = T, \qquad \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \alpha < 1$$

Entonces la función de transferencia se convierte en

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

Dado que a es menor que 1, se trata de una red de adelanto.

A-7-4. Obtenga la función de transferencia de la red de la figura 7-28.

Solución. Las impedancias complejas Z_1 y Z_2 son,

$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1C_1s + 1}, \quad Z_2 = R_2 + \frac{1}{C_2s}$$

La función de transferencia entre $E_o(s)$ y $E_i(s)$ es

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1)}{(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1) + R_1C_2s}$$

El denominador de esta función de transferencia se factoriza en dos términos reales. Definamos

$$R_1C_1 = T_1, \qquad R_2C_2 = T_2, \qquad R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2 = \frac{T_1}{\beta} + \beta T_2 \qquad (\beta > 1)$$

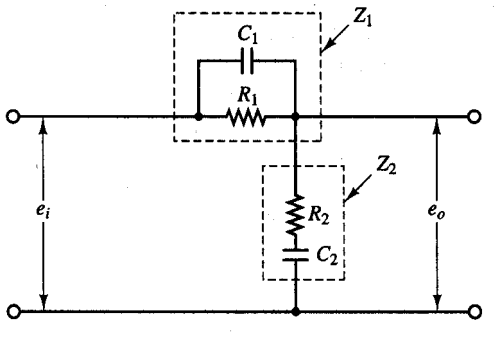


Figura 7–28
Red eléctrica.

Entonces, $E_o(s)/E_i(s)$ puede simplificarse a

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\beta} s + 1\right)(\beta T_2 s + 1)} = \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)}$$

Ésta es una red de atraso-adelanto.

A-M. Un sistema de control con

$$G(s) = \frac{K}{s^2(s + 1)}, \qquad H(s) = 1$$

es inestable para todos los valores positivos de la ganancia K.

Grafique los lugares geométricos de las raíces del sistema. Usando esta gráfica, demuestre que este sistema se estabiliza agregando un cero al eje real negativo o modificando G(s) a $G_1(s)$, en donde

$$G_1(s) = \frac{K(s + a)}{s^2(s + 1)} \qquad (0 \leq a < 1)$$

Solución. Una gráfica del lugar geométrico de las raíces para el sistema con

$$G(s) = \frac{K}{s^2(s + 1)}, \qquad H(s) = 1$$

aparece en la figura 7–29(a). Dado que hay dos ramificaciones en el semiplano derecho del plano, el sistema es inestable para cualquier valor de $K > 0$.

La adición de un cero ala función de transferencia G(s) inclina las ramificaciones del semiplano derecho del plano a la izquierda y lleva todas las ramificaciones del lugar geométrico de las raíces al semiplano izquierdo del plano, como se aprecia en la gráfica del lugar geométrico de las raíces de la figura 7–29(b). Por tanto, el sistema con

$$G_1 = \frac{K(s + a)}{s^2(s + 1)}, \qquad H(s) = 1 \qquad (0 \leq a \text{ c } 1)$$

es estable para todos los $K > 0$.

A-7-6. Considere un sistema con una planta inestable, como el de la figura 7–30(a). Usando el enfoque del lugar geométrico de las raíces, diseñe un controlador proporcional derivativo (es decir, determine los valores de K_p y T_d) tal que el factor de amortiguamiento relativo ζ del sistema en lazo cerrado sea 0.7 y la frecuencia natural no amortiguada ω_n sea 0.5 rad/seg.

Solución. Observe que la función de transferencia en lazo abierto tiene dos polos en s = 1.085 y s = -1.085 y un cero en $s = -1/T_d$, que se desconoce en este punto.

Dado que los polos en lazo cerrado deseados deben tener ω_n = 0.5 radlseg y ζ = 0.7, deben ubicarse en

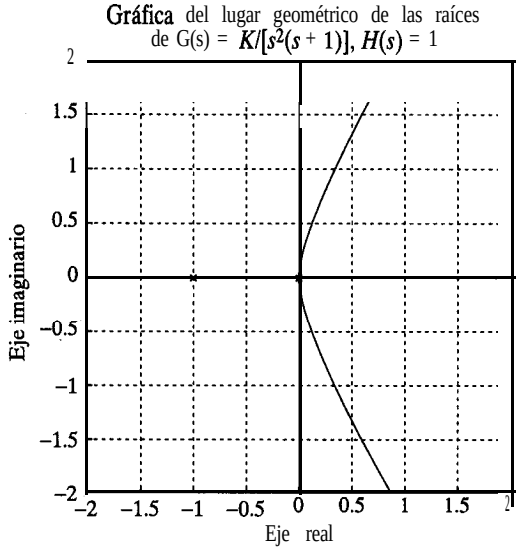
$$s = 0.5 \angle 180° \pm 45.573"$$

(ζ = 0.7 corresponde a una línea que forma un ángulo de 45.573" con el eje real negativo.) Por tanto, los polos en lazo cerrado deseados están en

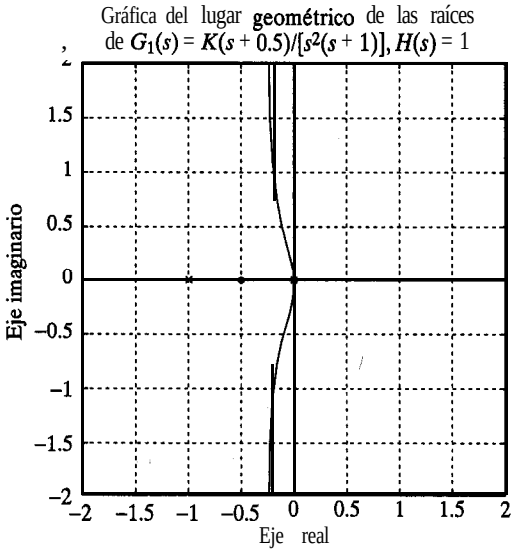
$$s = -0.35 \pm j0.357$$

Los polos en lazo abierto y el polo en lazo cerrado deseado de la mitad superior del plano se ubican en el diagrama de la figura 7–30(b). La deficiencia de ángulo en el puntos = – 0.35 + jo.357 es

$$-166.026" - 25.913" + 180" = -11.938"$$



(a)



(b)

Figura *7-29*
(a) Gráfica del lugar geométrico de las raíces del sistema con G(s) = $K/[s^2(s + 1)]$ y $H(s) = 1$; (b) gráfica del lugar geométrico de las raíces del sistema con $G_1(s) = K(s + a)/[s^2(s + 1)]$ y $H(s) = 1$, en donde $a = 0.5$.

Esto significa que el cero en $s = -1/T_d$ debe contribuir con 11.938°, mismos que, a su vez, determinan la ubicación del cero del modo siguiente:

$$s = -\frac{1}{T_d} = -2.039$$

Por tanto, tenemos que

$$K_p(1 + T_d s) = K_p T_d\left(\frac{1}{T_d} + s\right) = K_p T_d(s + 2.039) \qquad (7\text{-}7)$$

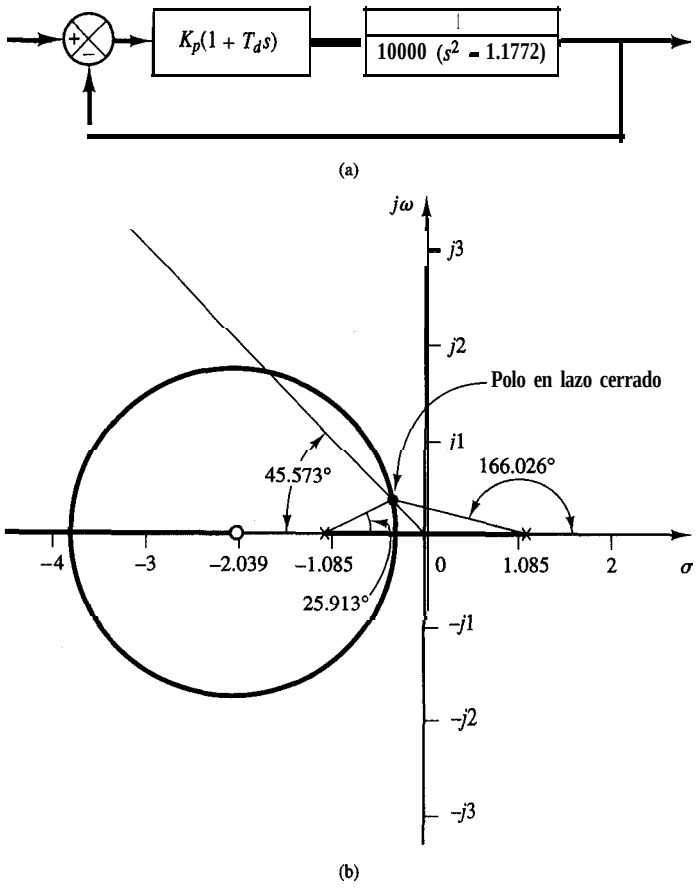


Figura 7-30
(a) Control PD de una planta inestable; (b) diagrama del lugar geométrico de las raíces para el sistema.

El valor de T_d es

$$T_d = \frac{1}{2.039} = 0.4904$$

El valor de la ganancia K_p se determina a partir de la condición de magnitud del modo siguiente:

$$K_p T_d \left.\frac{s + 2.039}{10000(s^2 - 1.1772)}\right|_{s=-0.35+j0.357} = 1$$

o bien

$$K_p T_d = 6999.5$$

Por tanto,

$$K_p = \frac{6999.5}{0.4904} = 14{,}273$$

Sustituyendo T_d y K_p por sus valores numéricos en la ecuación (7–7), obtenemos

$$K_p(1 + T_d s) = 14{,}273(1 + 0.4904s) = 6999.5(s + 2.039)$$

que produce la función de transferencia deseada del controlador proporcional derivativo.

A-7-7. Considere el sistema de control de la figura 7-31. Diseñe un compensador de atraso $G_c(s)$ tal que la constante de error estático de velocidad K_v sea 50 seg $^{-1}$ sin modificar notablemente la ubicación de los polos en laio cerrado originales, que están en $s = -2 \pm j\sqrt{6}$.

Solución. Supongamos que la función de transferencia del compensador de atraso es:

$$G_c(s) = \hat{K}_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \qquad (\beta > 1)$$

Dado que K_v se especifica como 50 seg $^{-1}$, tenemos que

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_c(s)\frac{10}{s(s + 4)} = \hat{K}_c\beta 2.5 = 50$$

Por tanto,

$$\hat{K}_c\beta = 20$$

Ahora, seleccionamos $\hat{K}_c = 1$. De este modo,

$$\beta = 20$$

Tomando $T = 10$. A continuación, el compensador de atraso se obtiene mediante

$$G_c(s) = \frac{s + 0.1}{s + 0.005}$$

La contribución de ángulo del compensador de atraso en el polo en lazo cerrados = $-2 + j\sqrt{6}$ es

$$\angle G_c(s)\Big|_{s = -2 + j\sqrt{6}} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{6}}{-1.9} - \tan^{-1}\frac{\sqrt{6}}{-1.995}$$
$$= -1.3616°$$

que es pequeña. Por tanto, el cambio en la ubicación de los polos dominantes en lazo cerrado es muy pequeño.

La función de transferencia en lazo abierto del sistema se convierte en

$$G_c(s)G(s) = \frac{s + 0.1}{s + 0.005}\frac{10}{s(s + 4)}$$

La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10s + 1}{s^3 + 4.005s^2 + 10.02s + 1}$$

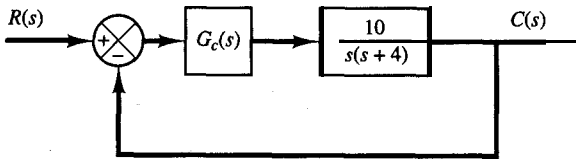


Figura 7-31
Sistema de control.

A fin de comparar la característica de la respuesta transitoria antes y después de la compensación, las respuestas escalón unitario y rampa unitaria de los sistemas compensado y no compensado aparecen en las figuras 7–32(a) y (b), respectivamente. El error en estado estable en la respuesta rampa unitaria se exhibe en la figura 7–32(c).

A-7-8. Considere un sistema de control con realimentación unitaria cuya función de transferencia de la trayectoria directa se obtiene mediante

$$G(s) = \frac{10}{s(s + 2)(s + 8)}$$

Diseñe un compensador tal que los polos dominantes en laxo cerrado se ubiquen en $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$ y la constante de error estático de velocidad K_v sea igual a $80\ seg^{-1}$.

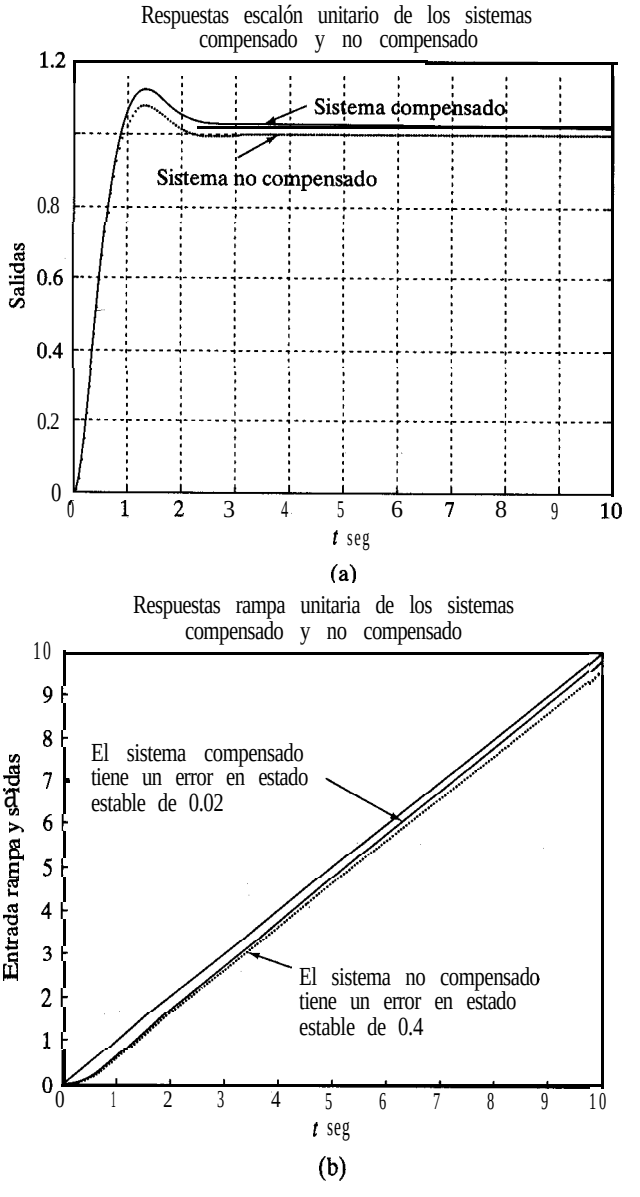


Figura 7-32
(a) Respuestas escalón unitario de los sistemas compensado y no compensado; (b) respuestas rampa unitaria de ambos sistemas; (c) respuestas rampa unitaria que muestran los errores en estado estable.

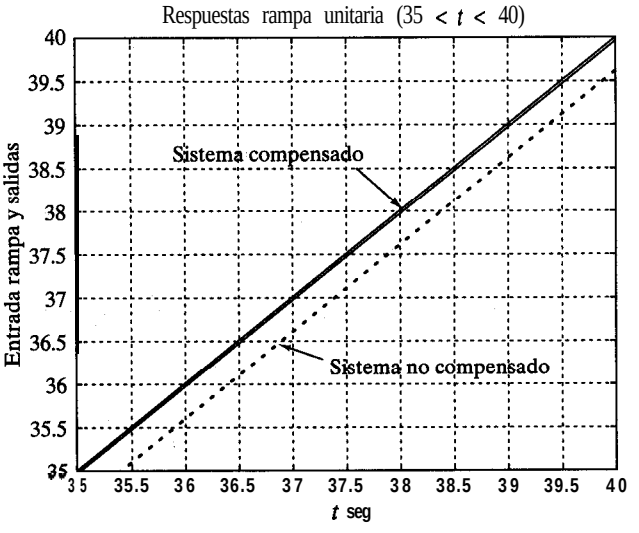


Figura 7–32
(Continuación)

Solución. La constante de error estático de velocidad del sistema no compensado es $K_v = \frac{10}{16} = 0.625$. Dado que se requiere que $K_v = 80$, necesitamos incrementar la ganancia en lazo abierto en 128. (Esto implica que necesitamos un compensador de atraso.) La gráfica del lugar geométrico de las raíces del sistema no compensado revela que no es posible llevar los polos dominantes en lazo cerrado a $-2 \pm j2\sqrt{3}$ con sólo un ajuste de la ganancia. Veáse la figura 7-33. (Esto significa que también necesitamos un compensador de adelanto.) Por tanto, emplearemos un compensador de atraso-adelanto.

Supongamos que la función de transferencia del compensador de atraso-adelanto es

$$G_c(s) = K_c\left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}}\right)\left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}}\right) \qquad (\alpha = \beta)$$

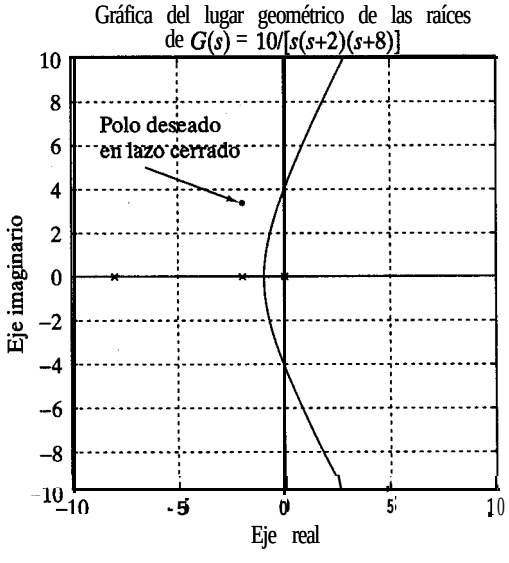


Figura 7-33
Gráfica del lugar geométrico de las raíces de $G(s) = 10/[s(s + 2)(s + 8)]$.

en donde K_c = 128. Esto se debe a que

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0} sK_cG(s) = K_c\frac{10}{16} = 80$$

y obtenemos K_c = 128. La deficiencia de ángulo en lazo cerrado deseado $s = -2 + j2\sqrt{3}$ es

$$\text{Deficiencia del ángulo} = 120° + 90° + 30° - 180° = 60°$$

La parte de adelanto del compensador de atraso-adelanto debe contribuir a este ángulo. Para seleccionar T_1 usamos el método gráfico que se presentó en la sección 7-5.

La parte de adelanto debe cumplir las siguientes condiciones:

$$\left|128\left(\frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{\beta}{T_1}}\right)G(s_1)\right|_{s_1=-2+j2\sqrt{3}} = 1$$

$$\left/\frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{\beta}{T_1}}\right|_{s_1=-2+j2\sqrt{3}} = 60°$$

La primera condición se simplifica como

$$\left|\frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{\beta}{T_1}}\right|_{s_1=-2+j2\sqrt{3}} = \frac{1}{13.3333}$$

Mediante el mismo enfoque aplicado en la sección 7-5, el cero ($s = 1/T_1$) y el polo ($s = \beta/T_1$) se determinan del modo siguiente:

$$\frac{1}{T_1} = 3.70, \qquad \frac{\beta}{T_1} = 53.35$$

Véase la figura 7-34. Por tanto, el valor de β se determina como

$$\beta = 14.419$$

Para la parte de atraso del compensador, seleccionamos

$$\frac{1}{\beta T_2} = 0.01$$

Así,

$$\frac{1}{T_2} = 0.1442$$

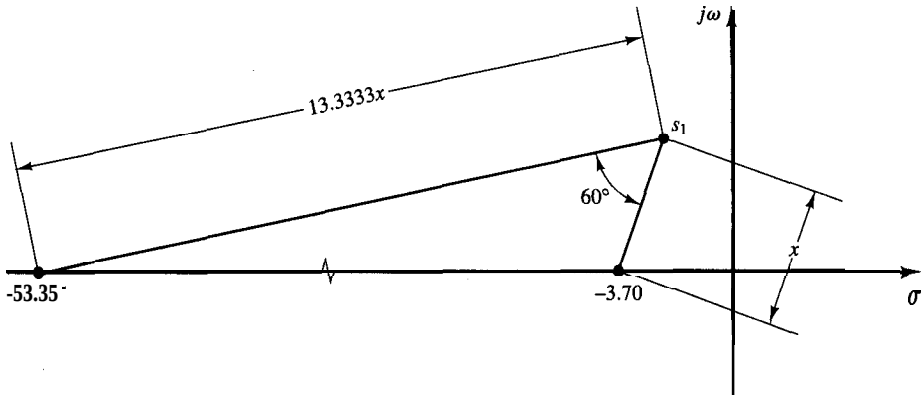


Figura 7-34
Determinación gráfica del cero y el polo de la parte de adelanto del compensador.

Considerando que

$$\left|\frac{s_1 + 0.1442}{s_1 + 0.01}\right|_{s_1=-2+j2\sqrt{3}} = 0.9837$$

$$\left/\frac{s_1 + 0.1442}{s_1 + 0.01}\right|_{s_1=-2+j2\sqrt{3}} = -1.697°$$

la contribución del ángulo de la parte de atraso es $-1.697°$ y la contribución de magnitud es 0.9837. Esto significa que los polos dominantes en lazo cerrado se encuentran cerca de la posición deseada $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$. Por tanto, el compensador diseñado,

$$G_c(s) = 128\left(\frac{s + 3.70}{s + 53.35}\right)\left(\frac{s + 0.1442}{s + 0.01}\right)$$

es aceptable. La función de transferencia de trayectoria directa del sistema compensado se convierte en

$$G_c(s)G(s) = \frac{1280(s + 3.7)(s + 0.1442)}{s(s + 53.35)(s + 0.01)(s + 2)(s + 8)}$$

La figura 7–35(a) contiene una gráfica del lugar geométrico de las raíces del sistema compensado. La figura 7–35(b) presenta una gráfica ampliada del lugar geométrico de las raíces cerca del origen.

Para verificar el desempeño del sistema mejorado del sistema no compensado, véanse las respuestas escalón unitario y las respuestas rampa unitaria de los sistemas compensado y no compensado de las figuras 7–36(a) y (b), respectivamente.

A-7-9. Considere el sistema de la figura 7-37. Diseñe un compensador de atraso-adelanto tal que la constante de error estático de velocidad K_v sea de 50 seg $^{-1}$ y la razón de amortiguamiento relativo ζ de los polos dominantes en lazo cerrado sea 0.5. (Seleccione el cero de la parte de adelanto del compensador de atraso-adelanto para cancelar el polo en $s = -1$ de la planta.) Determine todos los polos en lazo cerrado del sistema compensado.

Solución. Empleemos el compensador de atraso-adelanto obtenido mediante

$$G_c(s) = K_c\left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}}\right)\left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}}\right) = K_c\frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\beta}s + 1\right)(\beta T_2 s + 1)}$$

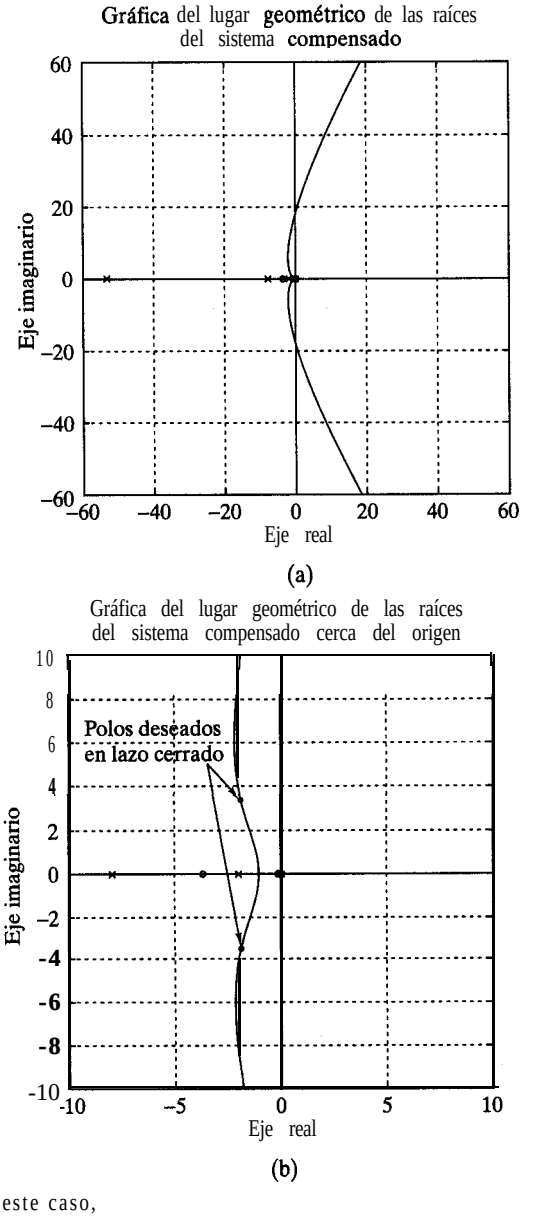


Figura 7-35
(a) Gráfica del lugar geométrico de las raíces del sistema compensado; (b) gráfica del lugar geométrico de las raíces cerca del origen.

en donde $\beta > 1$. En este caso,

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s)$$
$$= \lim_{s\to 0} s\,\frac{K_c(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\beta}s + 1\right)(\beta T_2 s + 1)}\,\frac{1}{s(s+1)(s+5)}$$
$$= \frac{K_c}{5}$$

La especificación de K_v = 50 seg $^{-1}$ determina el valor de K_c, o bien,

$$K_c = 250$$

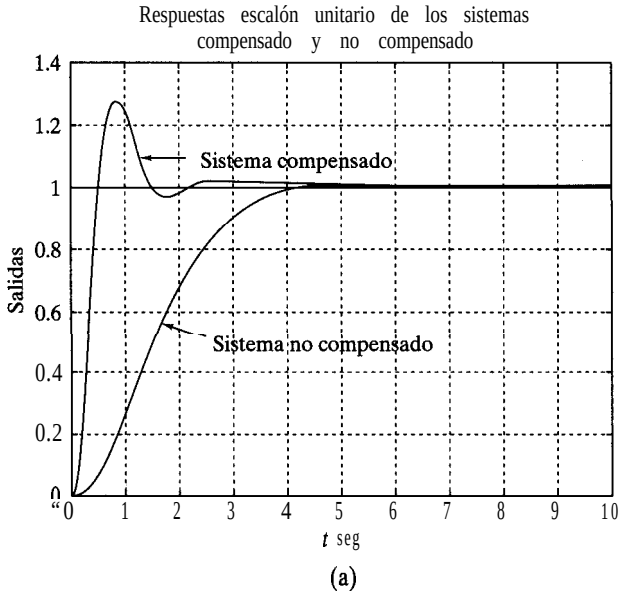


Figura 7-36
(a) Respuestas escalón unitario de los sistemas compensado y no compensado; (b) respuestas rampa unitaria de ambos sistemas.

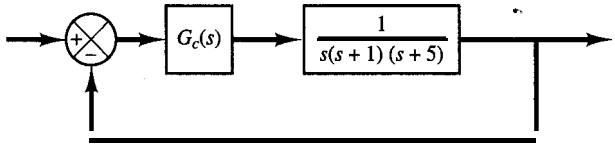


Figura 7-37
Sistema de control.

Ahora seleccionamos $T_1 = 1$ para que $s + (1/T_1)$ cancele el término $(s + 1)$ de la planta. La parte de adelanto se vuelve así,

$$\frac{s+1}{s+\beta}$$

Para la parte de atraso del compensador de atraso-adelanto necesitamos que

$$\left|\frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}}\right| \doteq 1, \qquad -5^\circ < \angle\frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} < 0^\circ$$

en donde $s = s_1$ sea uno de los polos dominantes en lazo cerrado. Para $s = s_1$, la función de transferencia en lazo abierto se convierte en

$$G_c(s_1)G(s_1) \doteq K_c\left(\frac{s_1+1}{s_1+\beta}\right)\frac{1}{s_1(s_1+1)(s_1+5)} = K_c\frac{1}{(s_1+\beta)s_1(s_1+5)}$$

Considerando que en $s = s_1$ se satisfacen las condiciones de magnitud y de ángulo, tenemos que

$$\left|K_c\frac{1}{s_1(s_1+\beta)(s_1+5)}\right| = 1 \tag{7-8}$$

$$\angle K_c\frac{1}{s_1(s+\beta)(s_1+5)} = \pm 180^\circ(2k+1) \tag{7-9}$$

en donde $k = 0, 1, 2, \ldots$ En las ecuaciones (7-8) y (7-9), β y s_1 son incógnitas. Dado que el factor de amortiguamiento relativo ζ de los polos dominantes en lazo cerrado se especifica como 0.5, el polo en lazo cerrado $s = s_1$ se escribe como

$$s_1 = -x + j\sqrt{3}\,x$$

en donde x todavía no está determinada.

Observe que la condición de magnitud, ecuación (7-8), se puede reescribir como

$$\left|\frac{K_c}{(-x+j\sqrt{3}\,x)(-x+\beta+j\sqrt{3}\,x)(-x+5+j\sqrt{3}\,x)}\right| = 1$$

Considerando que $K_c = 250$, tenemos que

$$x\sqrt{(\beta-x)^2+3x^2}\,\sqrt{(5-x)^2+3x^2} = 125 \tag{7-10}$$

La condición de ángulo, ecuación (7-9), puede reescribirse como

$$\angle K_c\frac{1}{(-x+j\sqrt{3}\,x)(-x+\beta+j\sqrt{3}\,x)(-x+5+j\sqrt{3}\,x)}$$
$$= -120^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{-x+\beta}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{-x+5}\right) = -180^\circ$$

o bien

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{-x+\beta}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{-x+5}\right) = 60^\circ \tag{7-11}$$

Necesitamos despejar β y x en las ecuaciones (7-10) y (7-11). Mediante varios cálculos de prueba y error, se encuentra que

$$\beta = 16.025, \qquad x = 1.9054$$

Por tanto,

$$s_1 = -1.9054 + j\sqrt{3}\,(1.9054) = -1.9054 + j3.3002$$

La parte de atraso del compensador de atraso-adelanto se determina del modo siguiente: considerando que el polo y el cero de la parte de atraso del compensador deben ubicarse cerca del origen, seleccionamos

$$\frac{1}{\beta T_2} = 0.01$$

Es decir,

$$\frac{1}{T_2} = 0.16025 \qquad \text{o} \qquad T_2 = 6.25$$

Con la elección de $T_2 = 6.25$, encontramos que

$$\left|\frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}}\right| = \left|\frac{-1.9054 + j3.3002 + 0.16025}{-1.9054 + j3.3002 + 0.01}\right|$$

$$= \left|\frac{-1.74515 + j3.3002}{-1.89054 + j3.3002}\right| = 0.98 \doteq 1 \qquad (7\text{-}12)$$

$$\left/\frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{\gamma}{\beta T_2}}\right. = \left/\frac{-1.9054 + j3.3002 + 0.16025}{-1.9054 + j3.3002 + 0.01}\right.$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{3.3002}{-1.74515}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{3.3002}{-1.89054}\right) = -1.937^\circ \qquad (7\text{-}13)$$

Dado que

$$-5^\circ < -1.937^\circ < 0^\circ$$

nuestra elección de $T_2 = 6.25$ es aceptable. A continuación, el compensador de atraso-adelanto recién diseñado se escribe como

$$G_c(s) = 250\left(\frac{s+1}{s+16.025}\right)\left(\frac{s+0.16025}{s+0.01}\right)$$

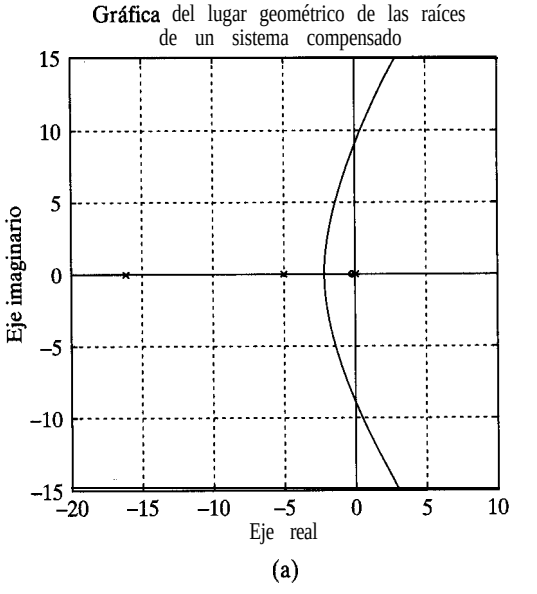
Por tanto, el sistema compensado tiene la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G_c(s)G(s) = \frac{250(s + 0.16025)}{s(s+0.01)(s+5)(s+16.025)}$$

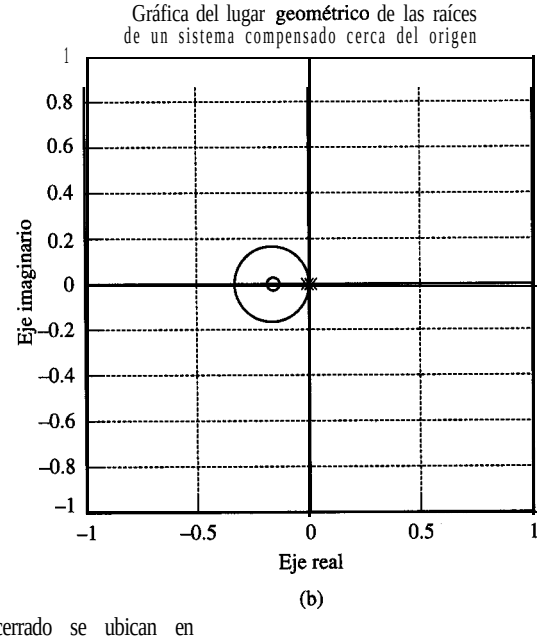
La figura 7–38(a) muestra una gráfica del lugar geométrico de las raíces del sistema compensado. La figura 7–38(b) presenta una gráfica ampliada del lugar geométrico de las raíces cerca del origen.

La función de transferencia en lazo cerrado se convierte en

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{250(s + 0.16025)}{s(s+0.01)(s+5)(s+16.025) + 250(s+0.16025)}$$



(a)



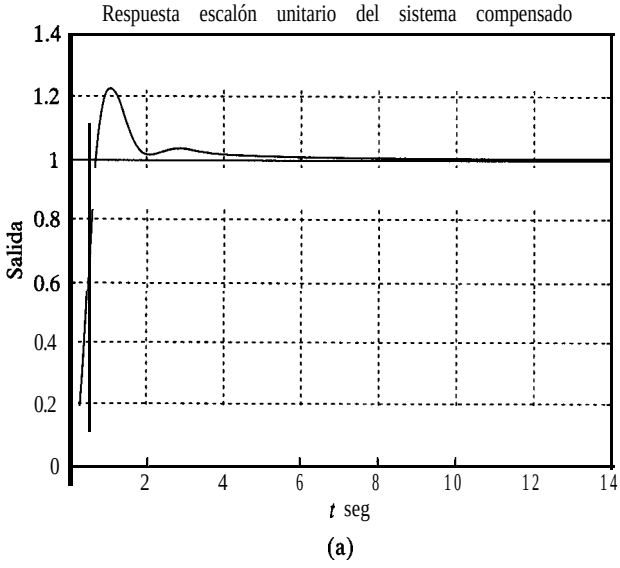
(b)

Figura 7-38
(a) Gráfica del lugar geométrico de las raíces de un sistema compensado; (b) gráfica del lugar geométrico de las raíces cerca del origen.

Los polos en lazo cerrado se ubican en

$$s = -1.8308 \pm j3.2359$$
$$s = -0.1684$$
$$s = -17.205$$

Observe que los polos dominantes en lazo cerrado $s = -1.8308 \pm j3.2359$ difieren de los polos dominantes en lazo cerrado $s = \pm s_1$ supuestos en el cálculo de β y T_2. Las pequeñas desviaciones de los polos dominantes en lazo cerrados = -1.8308 ± j3.2359 a partir des = ±s_1 = -1.9054 ± j3.3002 se deben a las aproximaciones implícitas al determinar la parte de atraso del compensador [véanse las ecuaciones (7-12) y 7–13)].



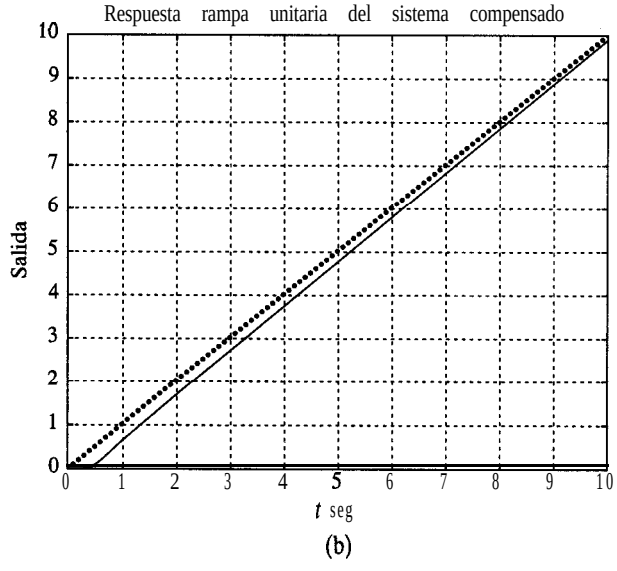


Figura 7–39
(a) Respuesta escalón unitario del sistema compensado; (b) respuesta rampa unitaria del sistema compensado.

Las figuras 7–39(a) y (b) muestran, respectivamente, la respuesta escalón unitario y la respuesta rampa unitaria del sistema diseñado. Observe que el polo en lazo cerrado en s = -0.1684 casi cancela el cero en s = − 0.16025. Sin embargo, este par formado por un polo y un cero en lazo cerrado ubicado cerca del origen produce una larga cola de amplitud pequeña. Dado que el polo en lazo cerrado en s = -17.205 se localiza muy lejos a la izquierda, en comparación con los polos en lazo cerrado en s = -1.8308 ± j3.2359, también es muy pequeño el efecto de este polo real sobre la respuesta del sistema. Por tanto, los polos en lazo cerrado en s = -1.8308 ± j3.2359 son en realidad polos dominantes en lazo cerrado que determinan la característica de respuesta del sistema en lazo cerrado. En la respuesta rampa unitaria, el error en estado estable al seguir la entrada rampa unitaria termina por convertirse en $1/k_v = \frac{1}{50} = 0.02$.

A-7-10. Considere el sistema de la figura 7–40. Se desea diseñar un controlador PID, G,(s) tal que los polos dominantes en lazo cerrado se ubiquen en $s = -1 \pm j\sqrt{3}$. Para el controlador PID, selec-

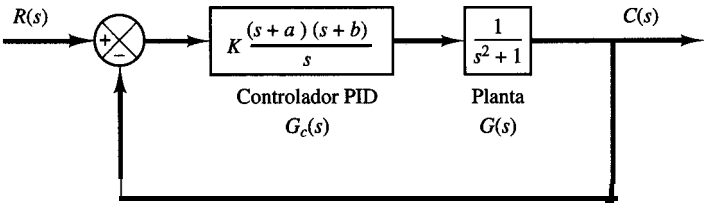


Figura740
Sistema controlado PID.

cione $a = 1$ y después determine los valores de K y b. Trace el diagrama del lugar geométrico de las raíces para el sistema diseñado.

Solución. Dado que

$$G_c(s)G(s) = K\frac{(s+1)(s+b)}{s}\frac{1}{s^2+1}$$

la suma de los ángulos en $s = -1 + j\sqrt{3}$, uno de los polos en lazo cerrado deseados, a partir del cero en $s = -1$ y los polos en $s = 0, s = j$ y $s = -j$ es

$$90° - 143.794° - 120° - 110.104° = -283.898°$$

por tanto, el cero en $s = -b$ debe contribuir con 103.898°. Esto requiere que el cero se ubique en

$$b = 0.5714$$

La constante de ganancia K se determina a partir de la condición de magnitud.

$$\left|K\frac{(s+1)(s+0.5714)}{s}\frac{1}{s^2+1}\right|_{s=-1+j\sqrt{3}} = 1$$

o bien

$$K = 2.3333$$

Después, el compensador se escribe del modo siguiente:

$$G_c(s) = 2.3333\frac{(s+1)(s+0.5714)}{s}$$

La función de transferencia en lazo abierto se convierte en

$$G_c(s)G(s) = \frac{2.3333(s+1)(s+0.5714)}{s}\frac{1}{s^2+1}$$

A partir de esta ecuación, es posible trazar una gráfica del lugar geométrico de las raíces para el sistema compensado. La figura 7–41 es una gráfica del lugar geométrico de las raíces.

La función de transferencia en lazo cerrado se obtiene a partir de

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2.3333(s+1)(s+0.5714)}{s^3 + s + 2.3333(s+1)(s+0.5714)}$$

Los polos en lazo cerrado están en $s = -1 \pm j\sqrt{3}$ y $s = -0.3333$. La figura 7–42 contiene una curva de respuesta escalón unitario. El polo en lazo cerrado de $s = -0.3333$ y un cero en $s = -0.5714$ producen una larga cola de amplitud pequeña.

A-7-11. La figura 7–43(a) es un diagrama de bloques de un modelo para un sistema de control de cambio de posición. La función de transferencia en lazo cerrado para este sistema es

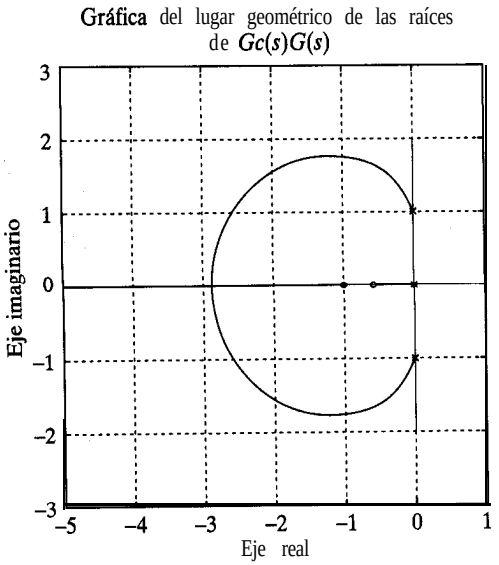


Figura 741
Gráfica del lugar geométrico de las raíces del sistema compensado (problema A-7-10).

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s + 0.1}{s^3 + 0.1s^2 + 6s + 0.1}$$

$$= \frac{2(s + 0.05)}{(s + 0.0417 + j2.4489)(s + 0.0417 - j2.4489)(s + 0.0167)}$$

La respuesta escalón unitario de este sistema aparece en la figura 7-43(b). La respuesta muestra las oscilaciones de alta frecuencia al inicio de la respuesta, debido a los polos en $s = -0.0417 \pm j2.4489$. La respuesta la controla el polo en $s = -0.0167$. El tiempo de asentamiento es de aproximadamente 240 segundos.

Se desea acelerar la respuesta, así como eliminar el modo oscilatorio al inicio de la misma. Diseñe un compensador conveniente tal que los polos dominantes en lazo cerrado estén en $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$.

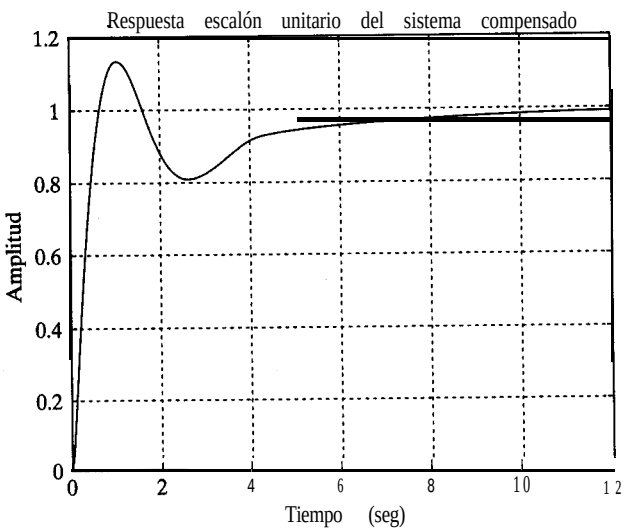
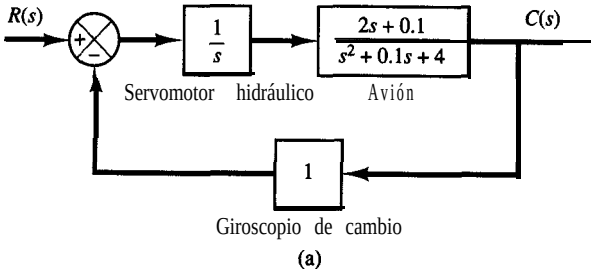
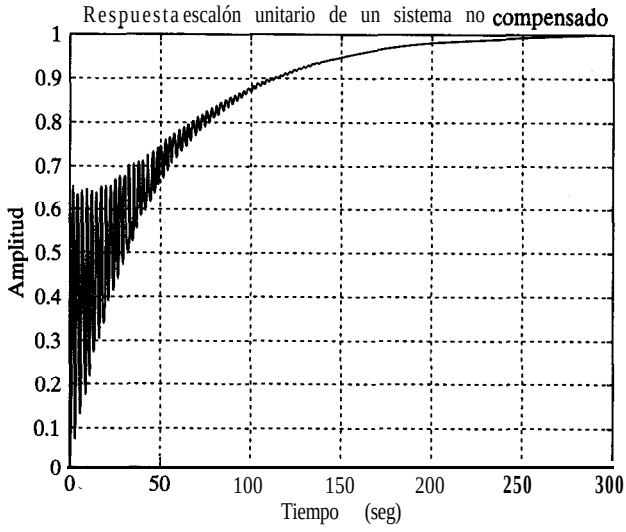


Figura 7-42
Respuesta escalón unitario del sistema compensado (problema A-7-10).



(a)



(b)

Figura 7-43
(a) Sistema de control de cambio de posición; (b) respuesta escalón unitario.

Solución. La figura 7–44 muestra un diagrama de bloques para el sistema compensado. Observe que el cero en lazo abierto en $s = -0.05$ y el polo en lazo abierto en $s = 0$ generan un polo en lazo cerrado entre $s = 0$ y $s = -0.05$. Tal polo en lazo cerrado se convierte en un polo dominante en lazo cerrado y desacelera la respuesta. Por tanto, es necesario sustituir este cero por uno que se ubique bastante lejos del eje $j\omega$, por ejemplo, un cero en $s = -4$.

Ahora seleccionamos el compensador en la forma siguiente:

$$G_c(s) = \hat{G}_c(s)\frac{s + 4}{2s + 0.1}$$

A continuación, la función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado se vuelve

$$G_c(s)G(s) = \hat{G}_c(s)\frac{s + 4}{2s + 0.1}\frac{1}{s}\frac{2s + 0.1}{s^2 + 0.1s + 4}$$

$$= \hat{G}_c(s)\frac{s + 4}{s(s^2 + 0.1s + 4)}$$

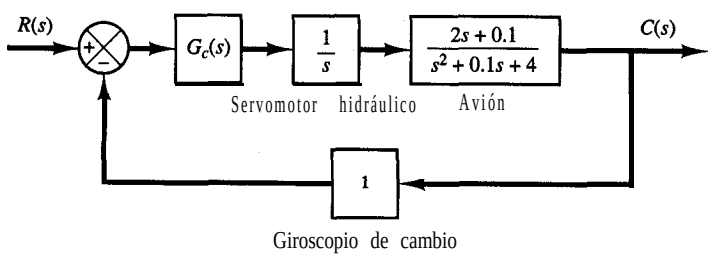


Figura 7-44
Sistema de control de cambio de posición compensado.

Para determinar $\hat{G}_c(s)$ mediante el método del lugar geométrico de las raíces, necesitamos encontrar la deficiencia de ángulo en el polo en lazo cerrado deseado $s = -2 + j2\sqrt{3}$. La deficiencia del ángulo se encuentra del modo siguiente:

$$\text{Deficiencia del ángulo} = -143.088^\circ - 120^\circ - 109.642^\circ + 60^\circ + 180^\circ$$

$$= -132.73^\circ$$

Por tanto, el compensador de adelanto $\hat{G}_c(s)$ debe aportar 132.73". Dado que la deficiencia de ángulo es de 132.73°, necesitamos dos compensadores de adelanto que aporten, 66.365" cada uno. Por tanto, G,(s) tendrá la forma siguiente:

$$G_c(s) = K_c\left(\frac{s + s_z}{s + s_p}\right)^2$$

Suponga que elegimos dos ceros en $s = -2$. A continuación, los dos polos de los compensadores de adelanto se obtienen a partir de

$$\frac{3.4641}{s_p - 2} = \tan(90^\circ - 66.365^\circ) = 0.4376169$$

o bien

$$s_p = 2 + \frac{3.4641}{0.4376169}$$

$$= 9.9158$$

Por tanto,

$$\hat{G}_c(s) = K_c\left(\frac{s + 2}{s + 9.9158}\right)^2$$

El compensador G,(s) completo para el sistema se convierte en

$$G_c(s) = \hat{G}_c(s)\frac{s + 4}{2s + 0.1} = K_c\frac{(s + 2)^2}{(s + 9.9158)^2}\frac{s + 4}{2s + 0.1}$$

El valor de K_c se determina a partir de la condición de magnitud. Dado que la función de transferencia en lazo abierto es

$$G_c(s)G(s) = K_c\frac{(s + 2)^2(s + 4)}{(s + 9.9158)^2 s(s^2 + 0.1s + 4)}$$

la condición de magnitud se convierte en

$$\left|K_c\frac{(s + 2)^2(s + 4)}{(s + 9.9158)^2 s(s^2 + 0.1s + 4)}\right|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = 1$$

Por tanto,

$$K_c = \left|\frac{(s + 9.9158)^2 s(s^2 + 0.1s + 4)}{(s + 2)^2(s + 4)}\right|_{s=-2+j2\sqrt{3}}$$

$$= 88.0227$$

De este modo, el compensador $G_c(s)$ se convierte en

$$G_c(s) = 88.0227\,\frac{(s + 2)^2(s + 4)}{(s + 9.9158)^2(2s + 0.1)}$$

La función de transferencia en lazo abierto se obtiene mediante

$$G_c(s)G(s) = \frac{88.0227(s + 2)^2(s + 4)}{(s + 9.9158)^2 s(s^2 + 0.1s + 4)}$$

La figura 7–45 contiene una gráfica del lugar geométrico de las raíces para el sistema compensado. En la gráfica se indican los polos en lazo cerrado para el sistema compensado. Los polos en lazo cerrado, raíces de la ecuación característica,

$$(s + 9.9158)^2 s(s^2 + 0.1s + 4) + 88.0227(s + 2)^2(s + 4) = 0$$

son los siguientes:

$$s = -2.0000 \pm j3.4641$$
$$s = -7.5224 \pm j6.5326$$
$$s = -0.8868$$

Ahora que se ha diseñado el compensador, examinemos la característica de la respuesta transitoria con MATLAB. La función de transferencia en lazo cerrado se obtiene a partir de

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{88.0227(s + 2)^2(s + 4)}{(s + 9.9158)^2 s(s^2 + 0.1s + 4) + 88.0227(s + 2)^2(s + 4)}$$

Las figuras 7–46(a) y (b) muestran las gráficas de la respuesta escalón unitario y de la respuesta rampa unitaria del sistema compensado. Estas curvas de respuesta muestran que el sistema diseñado es aceptable.

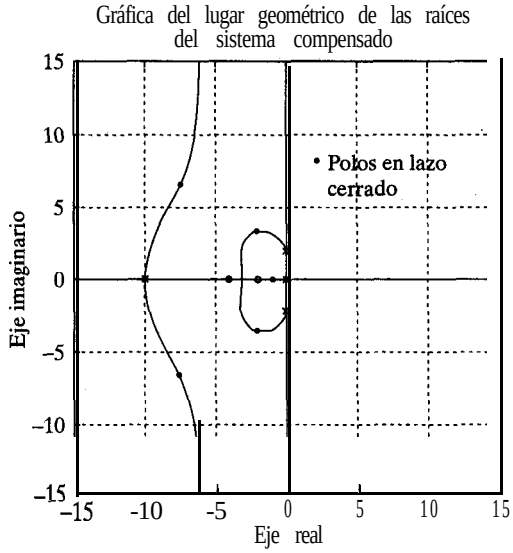
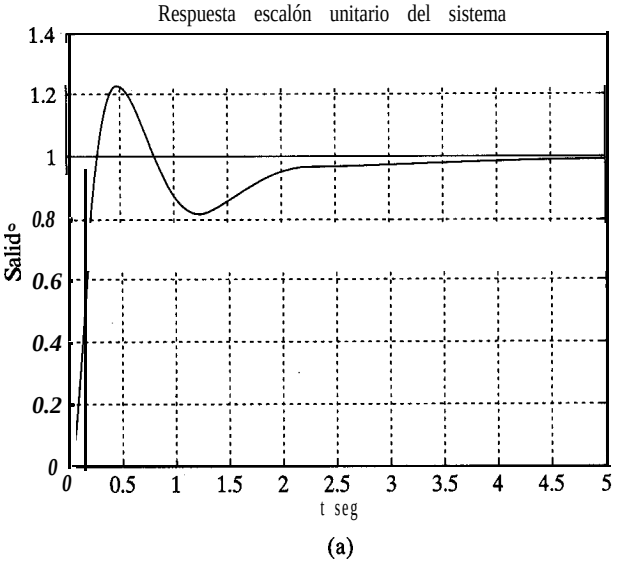


Figura 7-45
Gráfica del lugar geométrico de las raíces del sistema compensado.



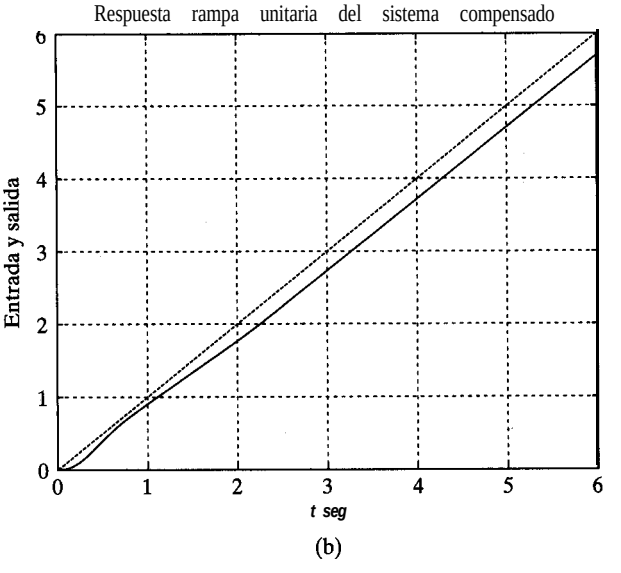


Figura 7-46
(a) Respuesta escalón unitario del sistema compensado; (b) respuesta rampa unitaria del sistema compensado (problema A-7-11).

A-7-12. Considere un modelo para un sistema de control de un vehículo espacial, como el que aparece en la figura 7– 47. Diseñe un compensador de adelanto $G_c(s)$ tal que el factor de amortiguamiento relativo ζ y la frecuencia natural no amortiguada ω_n de los polos dominantes en lazo cerrado sean 0.5 y 2 radlseg, respectivamente.

Solución

Primer intento: Suponga que el compensador de adelanto $G_c(s)$ es

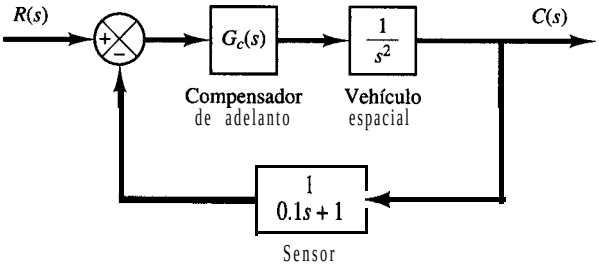


Figura 7-47
Sistema de control de un vehículo espacial.

$$G_c(s) = K_c\left(\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}}\right) \qquad (0<\alpha<1)$$

A partir de las especificaciones determinadas, $\zeta = 0.5$ y $\omega_n = 2$ rad/seg, los polos dominantes en lazo cerrado deben ubicarse en

$$s = -1 \pm j\sqrt{3}$$

Primero calculamos la deficiencia del ángulo en este polo en lazo cerrado.

Deficiencia del ángulo = − 120° − 120° − 10.8934° + 180°

= -70.8934°

El compensador de adelanto debe compensar esta deficiencia del ángulo. Existen muchas formas de determinar las ubicaciones del polo y el cero de la red de adelanto. Seleccionemos el cero del compensador en $s = -1$. A continuación, remitiéndonos a la figura 7– 48, tenemos la ecuación siguiente:

$$\frac{1.73205}{x - 1} = \tan(90° - 70.8934°) = 0.34641$$

o bien

$$x = 1 + \frac{1.73205}{0.34641} = 6$$

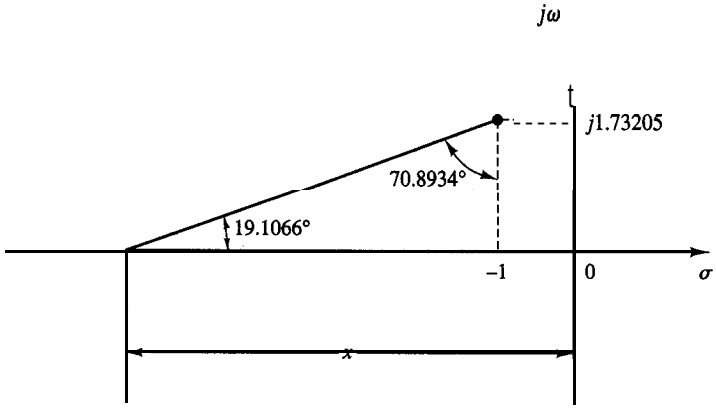


Figura 7-48
Determinación del polo de la red de adelanto.

Por tanto,

$$G_c(s) = K_c \frac{s + 1}{s + 6}$$

El valor de K_c se determina a partir de la condición de magnitud

$$K_c \left| \frac{s + 1}{s + 6} \frac{1}{s^2} \frac{1}{0.1s + 1} \right|_{s=-1+j\sqrt{3}} = 1$$

del modo siguiente:

$$K_c = \left| \frac{(s + 6)s^2(0.1s + 1)}{s + 1} \right|_{s=-1+j\sqrt{3}} = 11.2000$$

De este modo,

$$G_c(s) = 11.2 \frac{s + 1}{s + 6}$$

Dado que la función de transferencia en lazo abierto se convierte en

$$G_c(s)G(s)H(s) = 11.2 \frac{s + 1}{(s + 6)s^2(0.1s + 1)}$$

$$= \frac{11.2(s + 1)}{0.1s^4 + 1.6s^3 + 6s^2}$$

una gráfica del lugar geométrico de las raíces del sistema compensado se obtiene fácilmente con MATLAB introduciendo num y den, y usando el comando rlocus. El resultado aparece en la figura 7–49.

La función de transferencia en lazo cerrado para el sistema compensado se vuelve

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{11.2(s + 1)(0.1s + 1)}{(s + 6)s^2(0.1s + 1) + 11.2(s + 1)}$$

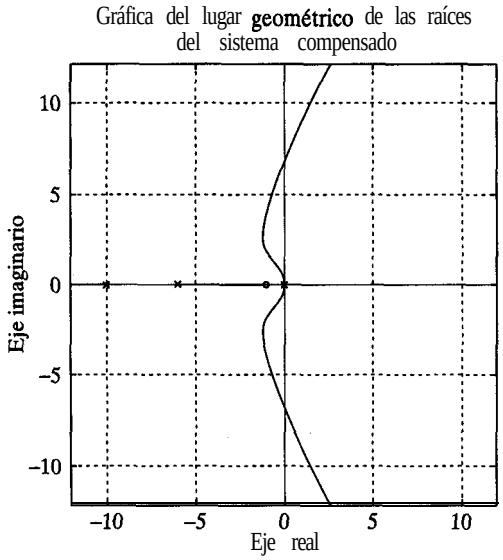


Figura 7-49
Gráfica del lugar geométrico de las raíces del sistema compensado.

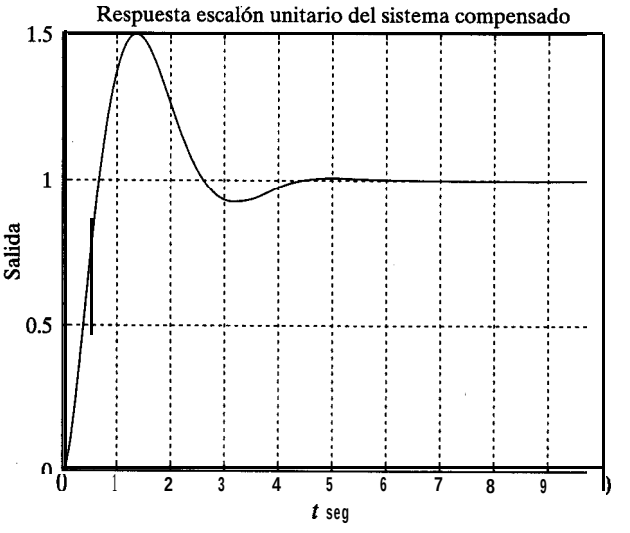


Figura 7–50
Respuesta escalón unitario del sistema compensado.

La figura 7–50 muestra la curva de respuesta escalón unitario. Presenta un sobrepaso máximo bastante grande (un sobrepaso de 50%). Es conveniente modificar el compensador y reducir el sobrepaso máximo. Una revisión cuidadosa de la gráfica del lugar geométrico de las raíces revela que la presencia del cero en $s = -1$ agrega el valor del sobrepaso máximo. Una forma de evitar esto es modificar el compensador de adelanto, tal como se presenta en el intento siguiente.

Segundo intento: Para modificar la forma de los lugares geométricos de las raíces, es posible usar dos redes de adelanto, tales que cada una contribuya con la mitad del ángulo de adelanto necesario, 70.8934'12 = 35.4467". Seleccionemos la ubicación de los ceros en $s = -3$. (Ésta es una elección arbitraria. Es posible elegir otra ubicación, tal como $s = -2.5$ o $s = -4$.)

Una vez elegidos dos ceros en $s = -3$, la ubicación necesaria de los polos se determina tal como se aprecia en la figura 7-51, o bien

$$\frac{1.73205}{y - 1} = \tan(40.89334° - 35.4467')$$

$$= \tan 5.4466" = 0.09535$$

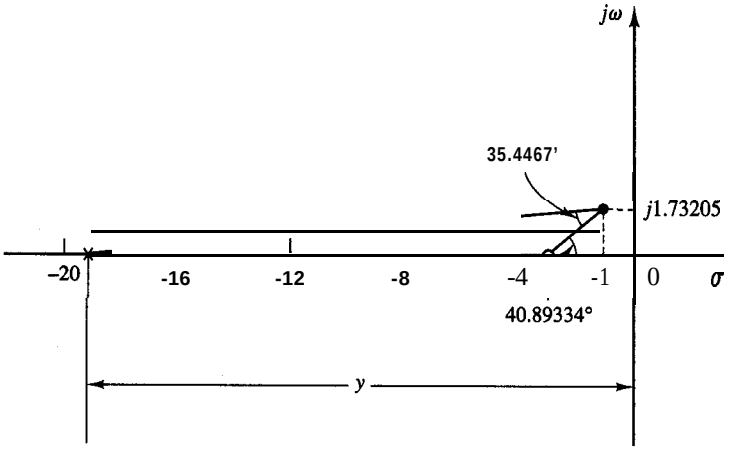


Figura 7–51
Determinación del polo de la red de adelanto.

lo cual nos da

$$y = 1 + \frac{1.73205}{0.09535} = 19.1652$$

Por tanto, el compensador de adelanto tendrá la siguiente función de transferencia:

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{s + 3}{s + 19.1652} \right)$$

El valor de K_c se determina a partir de la condición de magnitud, del modo siguiente:

$$\left| K_c \left(\frac{s + 3}{s + 19.1652} \right)^2 \frac{1}{s^2} \frac{1}{0.1s + 1} \right|_{s=-1+j\sqrt{3}} = 1$$

o bien

$$K_c = 174.3864$$

De esta forma, el compensador de adelanto recién diseñado es

$$G_c(s) = 174.3864 \left(\frac{s + 3}{s + 19.1652} \right)^2$$

Así, la función de transferencia en lazo abierto se convierte en

$$G_c(s)G(s)H(s) = 174.3864 \left(\frac{s + 3}{s + 19.1652} \right)^2 \frac{1}{s^2} \frac{1}{0.1s + 1}$$

La figura 7–52(a) contiene una gráfica del lugar geométrico de las raíces para el sistema compensado. Observe que no hay un cero en lazo cerrado cerca del origen. Una vista ampliada de la gráfica del lugar geométrico de las raíces cerca del origen aparece en la figura 7–52(b).

La función de transferencia en lazo cerrado se convierte en

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{174.3864(s + 3)^2(0.1s + 1)}{(s + 19.1652)^2 s^2 (0.1s + 1) + 174.3864(s + 3)^2}$$

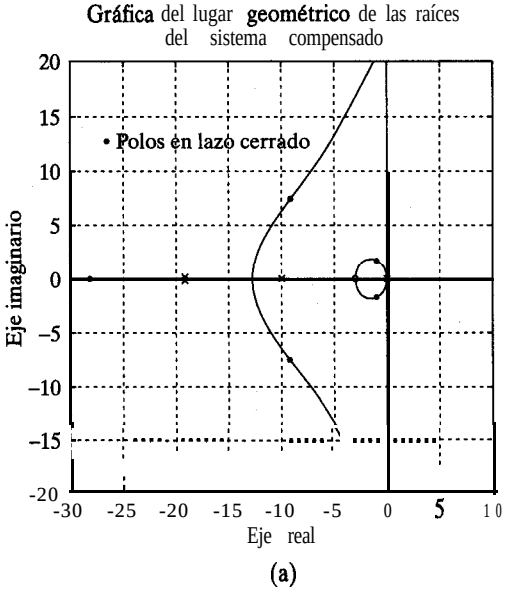


Figura 7-52
(a) Gráfica del lugar geométrico de las raíces del sistema compensado; (b) gráfica del lugar geométrico de las raíces cerca del origen.

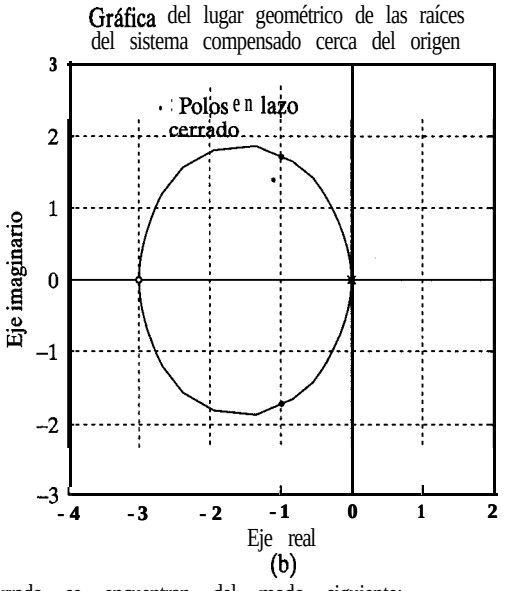


Figura 7-52 *(Continuación)*

Los polos en lazo cerrado se encuentran del modo siguiente:

$$s = -1 \pm j1.73205$$

$$s = -9.1847 \pm j7.4814$$

$$s = -27.9606$$

Las figuras 7–53(a) y (b) muestran la respuesta escalón unitario y la respuesta rampa unitaria del sistema compensado. La curva de respuesta escalón unitario es razonable y la respuesta rampa unitaria parece aceptable. Observe que, en la respuesta rampa unitaria, la salida se adelanta a la entrada de una cantidad pequeña. Esto se debe a que el sistema tiene una función de transferencia realimentada de $1/(0.1s + 1)$. Si se grafica la señal de realimentación contra t, junto con la entrada rampa unitaria, la primera no se adelantará a la entrada rampa en estado estable. Véase la figura 7–53(c).

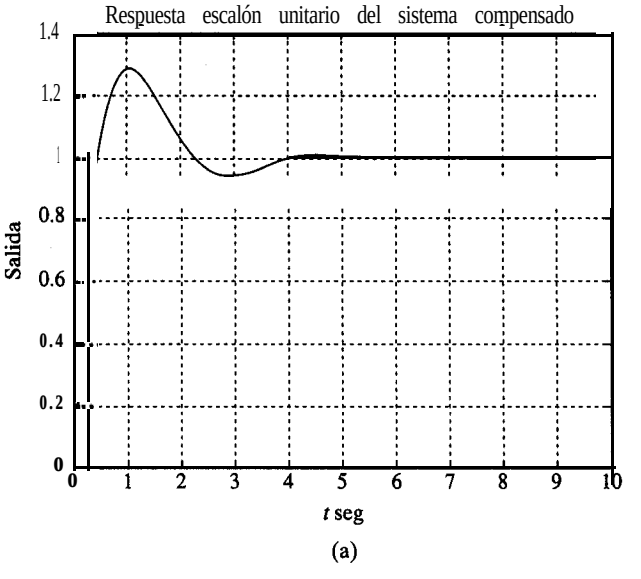


Figura 7-53
(a) Respuesta escalón unitario del sistema compensado; (b) respuesta rampa unitaria del sistema compensado; (c) gráfica de la señal de realimentación contra t en la respuesta rampa unitaria.

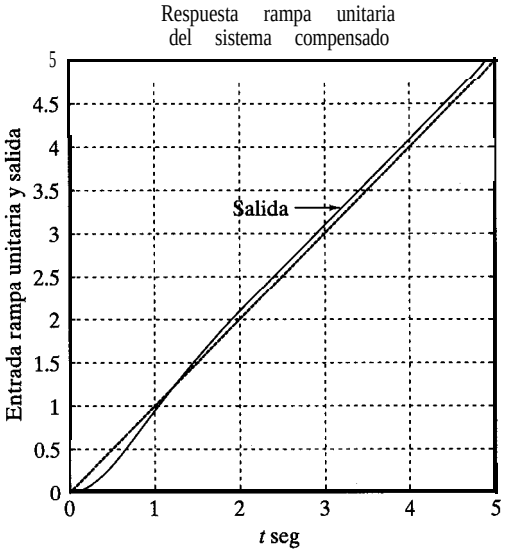


Figure 7-53
(Continuación)

PROBLEMAS

B-7-1. Considere el sistema mecánico de la figura 7-54. Está formado por un resorte y dos amortiguadores Obtenga la función de transferencia del sistema. El desplazamiento x_i es la entrada y el desplazamiento x_o es la salida. ¿Este sistema es una red de adelanto mecánico o una red de atraso?

B-7-2. Obtenga la función de transferencia de la red eléctrica de la figura 7-55. Demuestre que se trata de una red de atraso.

B-7-3. Considere el sistema de la figura 7-56. Grafique los lugares geométricos de las raíces para el sistema. Determine el valor de K tal que el factor de amortiguamiento relativo ζ de los polos dominantes en lazo cerrado sea 0.5. Después, determine todos los polos en lazo cerrado. Grafique la curva de respuesta escalón unitario con MATLAB.

B-7-4. Determine los valores de K, T_1 y T_2 del sistema de la

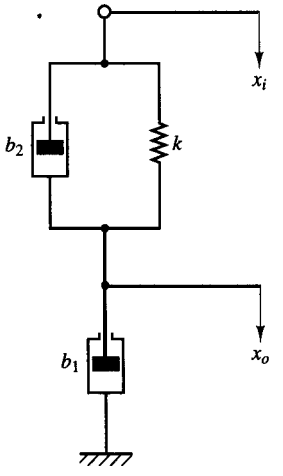


Figura 7-54
Sistema mecánico.

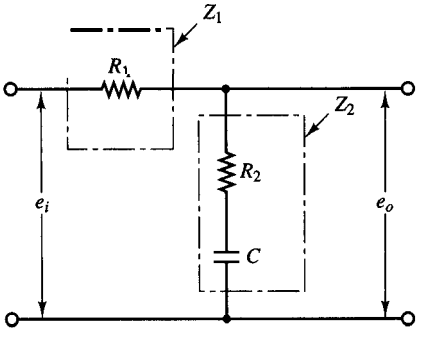


Figura 7-55
Red eléctrica.

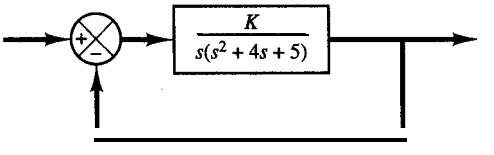


Figura 7-56
Sistema de control.

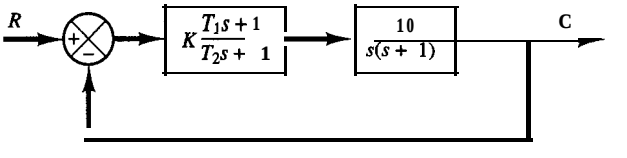


Figura 7-57
Sistema de control.

figura 7-57 tales que los polos dominantes en lazo cerrado tengan el factor de amortiguamiento relativo $\zeta = 0.5$ y la frecuencia natural no amortiguada $\omega_n = 3$ rad/seg.

B-7-5. Considere el sistema de la figura 7-58, que incluye una realimentación de velocidad, determine los valores de la ganancia de amplificador K y la ganancia de realimentación de velocidad K_h tales que se satisfagan las siguientes especificaciones:

1. El factor de amortiguamiento de los polos en lazo cerrado es 0.5
2. El tiempo de asentamiento es ≤ 2 segundos.
3. La constante de error estático de velocidad $K_v \geq 50$ seg $^{-1}$.

$0 < K_h < 1$

B-7-6. Considere el sistema de la figura 7-59. Diseñe un compensador de adelanto tal que los polos dominantes en lazo cerrado se ubiquen en $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$. Grafique con

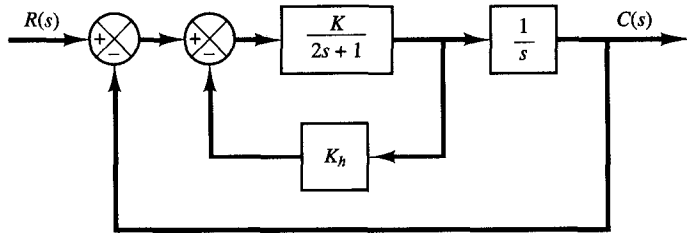


Figura **7–58**
Sistema de control.

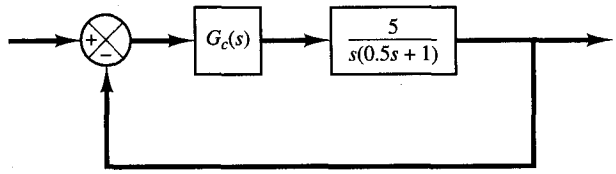


Figura 7-59
Sistema de control.

MATLAB la curva de respuesta escalón unitario del sistema diseñado.

B-7-7. Considere el sistema de la figura 7-60. Diseñe un compensador tal que los polos dominantes en lazo cerrado se ubiquen en $s = -1 \pm j1$.

B-7-8. Remítase al sistema de la figura 7-61 para diseñar un compensador tal que la constante de error estático de velocidad K_v sea de 20 seg $^{-1}$ sin que se modifique en forma notable la ubicación original $(s = -2 \pm j2\sqrt{3})$ de un par de polos complejos conjugados en lazo cerrado.

B-7-9. Considere el sistema de control de posición angular de la figura 7-62. Los polos dominantes en lazo cerrado se ubican en $s = -3.60 \pm j4.80$. El factor de amortiguamiento relativo ζ de los polos dominantes en lazo cerrado es 0.6. La constante de error estático de velocidad K_v es 4.1 seg $^{-1}$, lo que significa que, para una entrada rampa de 360°/seg, el error en estado estable al seguir la entrada rampa es

$$e_v = \frac{\theta_i}{K_v} = \frac{360°/\text{seg}}{4.1\ \text{seg}^{-1}} = 87.8°$$

Se desea disminuir e_v a un décimo del valor presente, o incrementar el valor de la constante de error estático de velocidad K_v a 41 seg $^{-1}$. También se busca conservar el factor de amortiguamiento relativo ζ de los polos dominantes en lazo cerrado en 0.6. Se permite un pequeño cambio en la frecuencia natural no amortiguada ω_v de los polos dominantes en lazo cerrado. Diseñe un compensador de atraso conveniente para incrementar la constante de error estático de velocidad como se pretende.

B-7-10. Considere el sistema de control de la figura 7-63. Diseñe un compensador tal que los polos dominantes en lazo cerrado se ubiquen en $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$ y la constante de error estático de velocidad K_v sea de 50 seg $^{-1}$.

B-7-11. Considere el mismo sistema del problema A-7-10. Se desea diseñar un controlador PID $G_c(s)$ tal que los polos

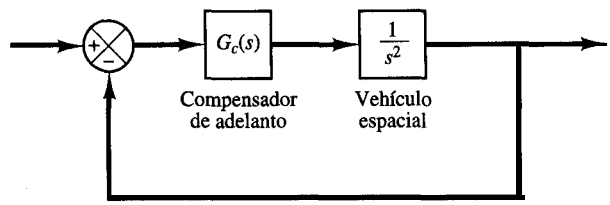


Figura 7-60
Sistema de control.

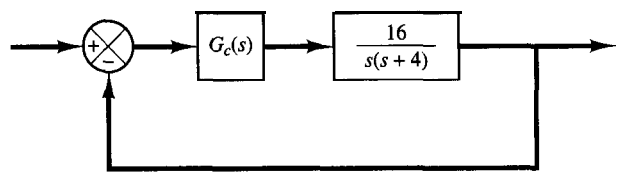


Figura 7-61
Sistema de control.

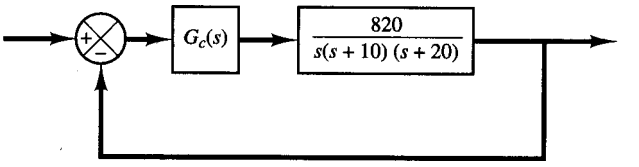


Figura 7-62
Sistema de control de posición angular.

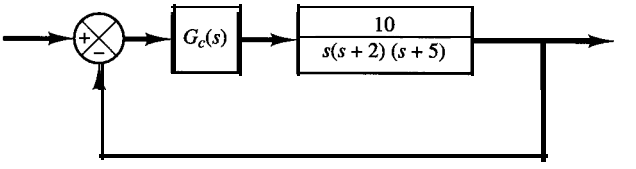


Figura 7-63
Sistema de control.

dominantes en lazo cerrado se ubiquen en $s = -1 + j\sqrt{3}$. Para el controlador PID, seleccione $a = 0.5$ (en lugar de $a = 1$ como se analizó en el problema A-7-10), y después determine los valores de K y b. Trace la gráfica del lugar geométrico de las raíces para el sistema diseñado. Asimismo, obtenga la curva de respuesta escalón unitario con MATLAB.

B-7-12. Considere el sistema de control de la figura 7-64. La planta es críticamente estable en el sentido de que las oscilaciones proseguirán indefinidamente. Diseñe un compensador conveniente tal que la respuesta escalón unitario exhiba un sobrepaso máximo menor que 40% y un tiempo de asentamiento de 5 seg o menos.

B-7-13. Considere el sistema de control de la figura 7-65. Diseñe un compensador tal que la curva de respuesta escalón unitario exhiba un sobrepaso máximo de 30% o menor y un tiempo de asentamiento de 3 seg o menos.

B-7-14. Considere el sistema de control de la figura 7-66. Diseñe un compensador tal que la curva de respuesta escalón unitario exhiba un sobrepaso máximo de 25% o menor y un tiempo de asentamiento de 5 seg o menos.

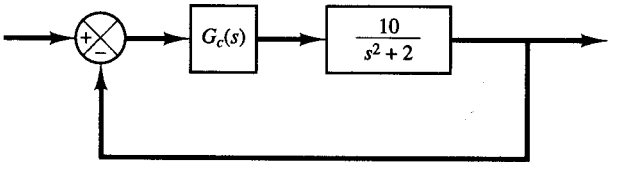


Figura 7-64
Sistema de control.

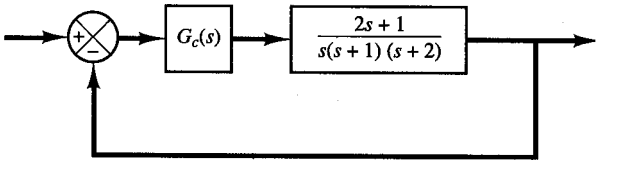


Figura 7-65
Sistema de control.

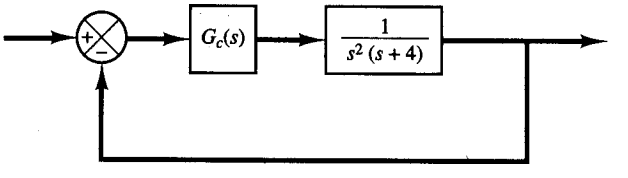


Figura 7-66
Sistema de control.

Análisis de la respuesta en frecuencia

8–1 INTRODUCCIÓN

Con el término respuesta en frecuencia, nos referimos a la respuesta de un sistema en estado estable a una entrada senoidal. En los métodos de la respuesta en frecuencia, la frecuencia de la señal de entrada se varía en un cierto rango, para estudiar la respuesta resultante.

El criterio de estabilidad de Nyquist nos permite averiguar la estabilidad relativa y absoluta de los sistemas lineales en lazo cerrado a partir del conocimiento de sus características de frecuencia en lazo abierto. Una ventaja del enfoque de la respuesta en frecuencia es que las pruebas de la respuesta en frecuencia son, en general, sencillas y pueden ser muy precisas con el uso de generadores de señales senoidales que se obtienen con facilidad y un equipo de medición preciso. Por lo común las funciones de transferencia de los componentes complicados se determinan experimentalmente mediante pruebas de la respuesta en frecuencia. Además, este enfoque tiene la ventaja de que permite diseñar un sistema en el que se desprecian los efectos inconvenientes del ruido así como extender este análisis y diseño a ciertos sistemas de control no lineales.

Aunque la respuesta en frecuencia de un sistema de control presenta una imagen cualitativa de la respuesta transitoria, la correlación entre las respuestas en frecuencia y transitoria es indirecta, excepto en el caso de los sistemas de segundo orden. Al diseñar un sistema en lazo cerrado, las características de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia en lazo abierto se ajustan mediante varios criterios de diseño, a fin de obtener características aceptables de respuesta transitoria para el sistema.

Salida en estado estable para una entrada senoidal. Considere el sistema lineal e invariante con el tiempo de la figura 8-1. Para este sistema

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s)$$

La entrada $x(t)$ es senoidal y se obtiene mediante

$$x(t) = X\text{sen}\ \omega t$$

Tal como se presentó en el capítulo 5, si el sistema es estable, la salida $y(t)$ se obtiene a partir de

$$y(t) = Y\ \text{sen}(\omega t + \phi)$$

en donde

$$Y = X|G(j\omega)|$$

Y

$$\phi = \underline{/G(j\omega)} = \tan^{-1}\left[\frac{\text{parte imaginaria de } G(j\omega)}{\text{parte real de } G(j\omega)}\right]$$

Un sistema estable, lineal e invariante con el tiempo, sujeto a una entrada senoidal, tendrá, en estado estable, una salida senoidal de la misma frecuencia que la entrada. Pero, en general, la amplitud y la fase de la salida serán diferentes de las de la entrada. De hecho, la amplitud de la salida se obtiene del producto de la amplitud de la entrada y $|G(j\omega)|$, en tanto que el ángulo de fase difiere del de la entrada en una cantidad $\phi = \underline{/G(j\omega)}$. Un ejemplo de las señales senoidales de entrada y salida aparece en la figura 8-2.

Observe que para las entradas senoidales,

$$|G(j\omega)| = \left|\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\right| = \text{Cociente de amplitud entre la senoide de salida y la senoide de entrada}$$

$$\underline{/G(j\omega)} = \underline{\left/\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\right.} = \text{Corrimiento de fase de la senoide de salida con respecto a la senoide de entrada}$$

Por tanto, la característica de respuesta de un sistema para una entrada senoidal se obtiene directamente de

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = G(j\omega)$$

8–1
Sistema lineal e invariante con el tiempo.

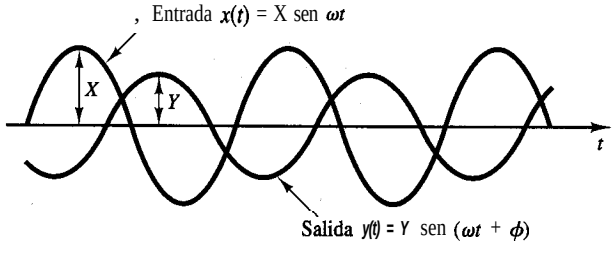


Figura 8-2
Señales senoidales de entrada y salida.

La función de transferencia senoidal $G(j\omega)$, cociente entre $Y(j\omega)$ y $X(j\omega)$, es una cantidad compleja y se representa mediante la magnitud y el ángulo de fase con la frecuencia como parámetro. (Un ángulo de fase negativo se denomina *atraso* de *fase* y un ángulo de fase positivo se llama *adelanto de fase.)* La función de transferencia senoidal de cualquier sistema lineal se obtiene sustituyendo s por $j\omega$ en la función de transferencia del sistema.

Presentación de las características de la respuesta en frecuencia en forma gráfica. La función de transferencia senoidal, función compleja de la frecuencia ω, se caracteriza por su magnitud y ángulo de fase, con la frecuencia como parámetro. Por lo general se usan tres representaciones gráficas de las funciones de transferencia senoidales:

1. Las trazas de Bode o trazas logarítmicas
2. La traza de Nyquist o traza polar
3. La traza de magnitud logarítmica contra la fase

En este capítulo analizaremos estas representaciones con detalle, y discutiremos el enfoque de MATLAB para obtener las trazas de Bode y las de Nyquist.

Panorama del capítulo. La sección 8-1 presentó el material introductorio para la respuesta en frecuencia. La sección 8-2 presenta las trazas de Bode de diferentes sistemas de funciones de transferencia. La sección 8-3 analiza un enfoque de cálculo para obtener trazas de Bode con MATLAB, la sección 8-4 trata las trazas polares de funciones de transferencia senoidales y la sección 8-5 describe la obtención de las trazas de Nyquist con MATLAB. La sección 8-6 presenta brevemente las trazas de magnitud logarítmica contra la fase. La sección 8–7 ofrece una explicación detallada del criterio de estabilidad de Nyquist, en la sección 8-8 se estudia el análisis de estabilidad de sistemas en lazo cerrado mediante el mismo criterio de estabilidad y la sección 8-9 trata el análisis de la estabilidad relativa de los sistemas en lazo cerrado. También se presentan aquí las medidas de la estabilidad relativa, tales como el margen de fase y el margen de ganancia. Asimismo, se analiza la correlación entre la respuesta transitoria y la respuesta en frecuencia. La sección 8-10 presenta un método para obtener la respuesta en frecuencia en lazo cerrado a partir de la respuesta en frecuencia en lazo abierto, mediante el uso de los círculos M y N. También se describe el uso de la traza de Nichols para obtener la respuesta en frecuencia en lazo cerrado. Por último, la sección 8-11 aborda la determinación de la función de transferencia con base en una traza de Bode experimental.

8-2 TRAZAS DE BODE

Trazas de Bode o trazas logarítmicas. Una función de transferencia senoidal puede representarse mediante dos gráficas distintas: una que ofrece la magnitud contra la frecuencia y otra que muestra el ángulo de fase (en grados) contra la frecuencia. Las trazas de Bode están formadas por dos gráficas: una es el logaritmo de la magnitud de una función de transferencia senoidal y la otra es el ángulo de fase. Ambas se grafican contra la frecuencia en la escala logarítmica.

La representación común de la magnitud logarítmica de $G(j\omega)$ es $20 \log|G(j\omega)|$, en donde la base del logaritmo es 10. La unidad que se usa en esta representación de la magnitud es el decibel, por lo general abreviado dB. En la representación logarítmica, se trazan las curvas sobre papel semilogarftmico, con la escala logarítmica para la frecuencia y la escala lineal para

cualquier magnitud (en decibeles) o el ángulo de fase (en grados). (El rango de frecuencia de interés determina la cantidad de ciclos logarítmicos que se requieren en la abscisa.)

La ventaja principal de usar la traza de Bode es que la multiplicación de magnitudes se convierte en adición. Además, cuenta con un método simple para trazar una curva aproximada de magnitud logarítmica. Se basa en aproximaciones asintóticas. Esta aproximación, mediante asíntotas (líneas rectas), es suficiente si sólo se necesita información general sobre la característica de la respuesta en frecuencia. Si se desea obtener curvas exactas, es fácil corregir las curvas asintóticas. Las curvas de ángulo de fase se dibujan con facilidad si se cuenta con una plantilla de la curva de ángulo de fase de $1 + j\omega$. Es muy provechoso ampliar el rango de frecuencia baja mediante el uso de una escala logarítmica, dado que las características de las frecuencias bajas son lo más importante en los sistemas prácticos. Aunque no es posible graficar las curvas hasta una frecuencia cero, debido a la frecuencia logarftmica ($\log 0 = -\infty$), esto no significa un problema serio.

Observe que la determinación experimental de una función de transferencia se hace simplemente si se presentan datos de la respuesta en frecuencia en la forma de una traza de Bode.

Factores básicos de $G(j\omega)H(j\omega)$. Como se plante6 antes, la ventaja principal de usar una traza logarftmica es la facilidad relativa de graficar las curvas de la respuesta en frecuencia. Los factores básicos que suelen ocurrir en una función de transferencia arbitraria $G(j\omega)H(j\omega)$ son:

1. La ganancia K
2. Los factores de integral y de derivada $(j\omega)^{\mp 1}$
3. Los factores de primer orden $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$
4. Los factores cuadráticos $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{\mp 1}$

Una vez que nos familiarizamos con las trazas logarítmicas de estos factores básicos, es posible utilizarlas con el fin de construir una traza logarítmica compuesta para cualquier forma de $G(j\omega)H(j\omega)$, trazando las curvas para cada factor y agregando curvas individuales en forma gráfica, ya que agregar los logaritmos de las ganancias corresponde a multiplicarlos entre sí.

El proceso de obtener la traza logarítmica se simplifica todavía más mediante aproximaciones asintóticas para las curvas de cada factor. (Si es necesario, es fácil hacer correcciones a una traza aproximada, con el fin obtener una precisa.)

La ganancia K. Un numero mayor que la unidad tiene un valor positivo en decibeles, en tanto que un número menor que la unidad tiene un valor negativo. La curva de magnitud logarftmica para una ganancia constante K es una recta horizontal cuya magnitud es de 20 log K decibeles. El ángulo de fase de la ganancia K es cero. El efecto de variar la ganancia K en la función de transferencia es que sube o baja la curva de magnitud logarftmica de la función de transferencia en la cantidad constante correspondiente, pero no afecta la curva de fase.

La figura 8-3 contiene una línea de conversión de números a decibeles. El valor en decibeles de cualquier número se obtiene a partir de esta línea. Conforme un número aumenta en un factor de 10, el valor correspondiente en decibeles aumenta en un factor de 20. Esto se observa a partir de lo siguiente:

$$20 \log(K \times 10) = 20 \log K + 20$$

Asimismo,

$$20 \log (K \times 10^n) = 20 \log K + 20n$$

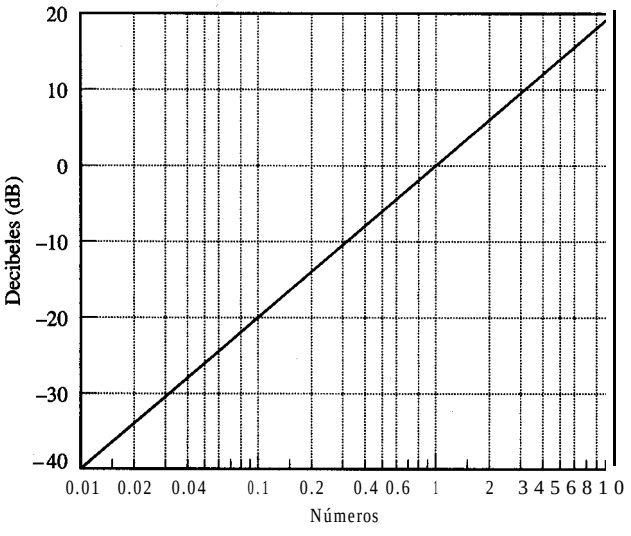


Figura 83
Línea de conversión de números a decibeles.

Observe que, cuando se expresa en decibeles, el recíproco de un número difiere de su valor sólo en el signo; es decir, para el numero K,

$$20 \log K = -20 \log \frac{1}{K}$$

Factores de integral y de derivada $(j\omega)^{\mp 1}$ (polos y ceros en el origen). La magnitud logarítmica de $1/j\omega$ en decibeles es

$$20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega \text{ dB}$$

El ángulo de fase de $1/j\omega$ es constante e igual a -90".

En las trazas de Bode, las razones de frecuencia se expresan en términos de octavas o décadas. Una octava es una banda de frecuencia de ω_1 a $2\omega_1$, en donde ω_1 es cualquier frecuencia. Una década es una banda de frecuencia de ω_1 a $10\omega_1$, en donde, otra vez, ω_1 es cualquier frecuencia. (En la escala logarftmica del papel semilogarftmico, cualquier razón de frecuencia determinada se representa mediante la misma distancia horizontal. Por ejemplo, la distancia horizontal de $\omega = 1$ a $\omega = 10$ es igual a la de $\omega = 3$ a $\omega = 30$.)

Si se grafica la magnitud logarítmica de $-20 \log \omega$ dB contra ω en una escala logarítmica, se obtiene una recta. Para trazar esta recta, necesitamos ubicar un punto (0 dB, $\omega = 1$) en ella. Dado que

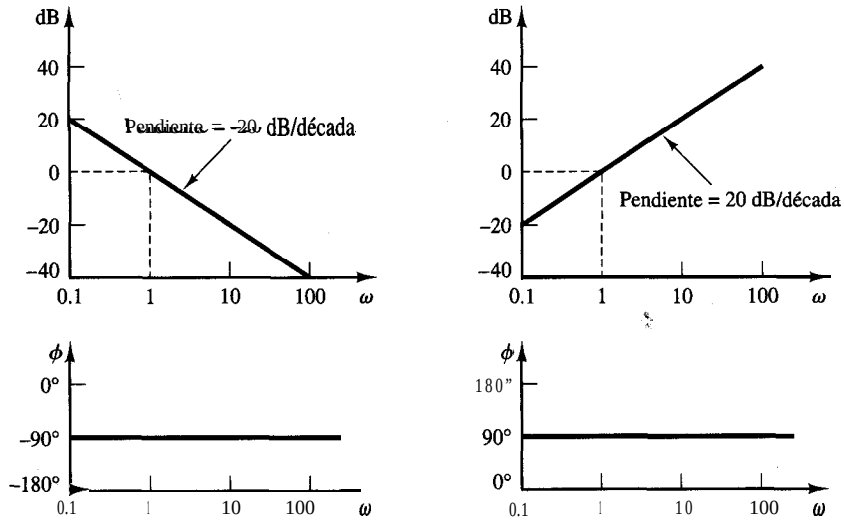
$$(-20 \log 100) \text{ dB} = (-20 \log \omega - 20) \text{ dB}$$

la pendiente de la recta es -20 dB/década (o -6 dB/octava).

De la misma manera, la magnitud logarftmica de $j\omega$ en decibeles es

$$20 \log |j\omega| = 20 \log \omega \text{ dB}$$

El ángulo de fase de $j\omega$ es constante e igual a 90". La curva de magnitud logarftmica es una recta con una pendiente de 20 dB/década. Las figuras 8–4(a) y (b) muestran curvas de res-



Trazas de Bode de $G(j\omega) = 1/j\omega$ (a)

Trazas de Bode de $G(j\omega) = j\omega$ (b)

Figura 8-4
(a) Trazas de Bode de $G(j\omega) = 1/j\omega$; (b) trazas de Bode de $G(j\omega) = j\omega$.

puesta en frecuencia para $1/j\omega$ y jo, respectivamente. Es fácil observar que las diferencias en las respuestas en frecuencia de los factores $1/j\omega$ y $j\omega$ estriban en los signos de las pendientes de las curvas de magnitud logarítmica y en los signos de los ángulos de fase. Ambas magnitudes logarítmicas se vuelven iguales a 0 dB en $\omega = 1$.

Si la función de transferencia contiene el factor $(1/j\omega)^n$ o $(j\omega)^n$, la magnitud logarítmica se convierte, respectivamente, en

$$20 \log \left| \frac{1}{(j\omega)^n} \right| = -n \times 20 \log |j\omega| = -20n \log \omega \text{ dB}$$

o bien

$$20 \log |(j\omega)^n| = n \text{ X } 20 \log |j\omega| = 20\text{n} \log \omega \text{ dB}$$

Por tanto, las pendientes de las curvas de magnitud logarítmica para los factores $(1/j\omega)^n$ y $(j\omega)^n$ son -20n dB/década y 20n dB/década, respectivamente. El ángulo de fase de $(1/j\omega)^n$ es igual a -90" X n durante todo el rango de frecuencia, en tanto que el de $(j\omega)^n$ es igual a 90" X n en todo el rango de frecuencia. Las curvas de magnitud pasarán por el punto (0 dB, $\omega = 1$).

Factores de primer orden $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$. La magnitud logarítmica del factor de primer orden $1/(1 + j\omega T)$ es

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \text{ dB}$$

Para frecuencias bajas, tales que $\omega \ll 1/T$, la magnitud logarítmica se aproxima mediante

$$-20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \doteq -20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Por tanto, la curva de magnitud logarítmica para frecuencias bajas es la línea 0 dB constante. Para frecuencias altas, tales que $\omega \gg 1/T$,

$$-20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \doteq -20 \log \omega T \text{ dB}$$

Ésta es una expresión aproximada para el rango de altas frecuencias. En $\omega = 1/T$, la magnitud logarítmica es igual a 0 dB; en $\omega = 10/T$, la magnitud logarítmica es de -20 dB. Por tanto, el valor de -20 log ωT dB disminuye en 20 dB para todas las décadas de ω. De esta forma, Para $\omega \gg 1/T$, la curva de magnitud logarítmica es una línea recta con una pendiente de -20 dB/década (o -6 dB/octava).

Nuestro análisis muestra que la representación logarítmica de la curva de respuesta en frecuencia del factor $1/(1 + j\omega T)$ se aproxima mediante dos asíntotas (líneas rectas), una de las cuales es una recta de 0 dB para el rango de frecuencia $0 < \omega < 1/T$ y la otra es una recta con una pendiente de -20 dB/década (o –6 dB/octava) para el rango de frecuencia $1/T < \omega < \infty$. La curva de magnitud logarítmica exacta, las asíntotas y la curva de ángulo de fase exacta aparecen en la figura 8-5.

La frecuencia en la cual las dos asíntotas se encuentran se denomina frecuencia de esquina o frecuencia de corte. Para el factor $1/(1 + j\omega T)$, la frecuencia $\omega = 1/T$ es la frecuencia de esquina, dado que en $\omega = 1/T$, ambas asíntotas tienen el mismo valor. (La expresión asintótica de baja frecuencia en $\omega = 1/T$ es 20 log 1 dB = 0 dB y la expresión asintótica de alta frecuencia en $\omega = 1/T$ también es 20 log 1 dB = 0 dB.) La frecuencia de esquina divide la curva de respuesta en frecuencia en dos regiones, una curva para la región de baja frecuencia y una curva para la región de alta frecuencia. La frecuencia de esquina es muy importante cuando se trazan curvas logarítmicas de frecuencia en respuesta.

El ángulo de fase ϕ exacto del factor $1/(1 + j\omega T)$ es

$$\phi = -\tan^{-1} \omega T$$

En una frecuencia cero, el ángulo de fase es 0". En la frecuencia de esquina, el ángulo de fase es

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{T}{T} = -\tan^{-1} 1 = -45°$$

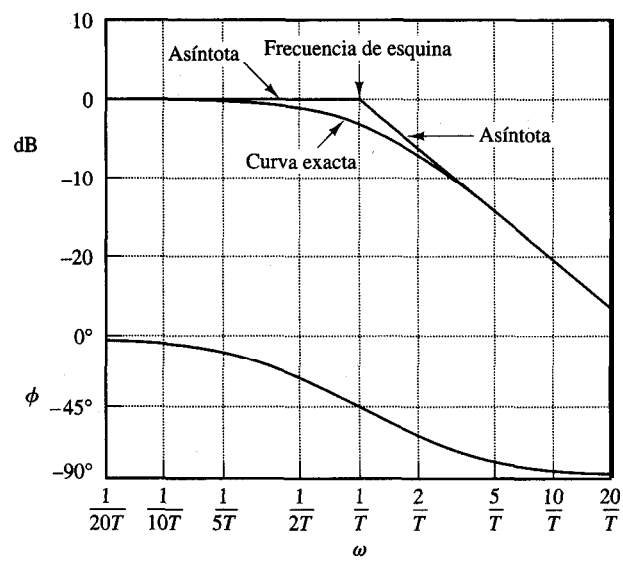


Figura 8-5
Curva de magnitud logarítmica, junto con las asíntotas y la curva de ángulo de fase de $1/(1 + j\omega T)$.

En el infinito, el ángulo de fase se convierte en -90". Dado que el ángulo de fase se obtiene mediante una función de tangente inversa, el ángulo de fase tiene una pendiente simétrica con respecto al punto de inflexión en ϕ = -45".

Se puede calcular el error en la curva de magnitud provocado por el uso de las asíntotas. El error máximo ocurre en la frecuencia de esquina y es aproximadamente igual a -3 dB dado que

$$-20 \log \sqrt{1+1} + 20 \log 1 = -10 \log 2 = -3.03 \text{ dB}$$

El error en la frecuencia una octava abajo de la frecuencia de esquina, es decir, en $\omega = 1/(2T)$, es

$$-20 \log \sqrt{\frac{1}{4}+1} + 20 \log 1 = -20 \log \frac{\sqrt{5}}{2} = -0.97 \text{ dB}$$

El error en la frecuencia una octava arriba de la esquina de frecuencia, es decir, en $\omega = 2/T$, es

$$-20 \log \sqrt{2^2+1} + 20 \log 2 = -20 \log \frac{\sqrt{5}}{2} = -0.97 \text{ dB}$$

Por tanto, el error en una octava abajo o arriba de la frecuencia de esquina es aproximadamente igual a -1 dB. Asimismo, el error en una década abajo o arriba de la frecuencia de esquina es aproximadamente -0.04 dB. El error en decibeles implícito al usar la expresión asintótica para la curva de respuesta en frecuencia de $1/(1 + j\omega T)$ aparece en la figura S-6. El error es simétrico con respecto a la frecuencia de esquina.

Dado que las asíntotas se trazan con facilidad y están suficientemente cerca de la curva exacta, su uso es conveniente para dibujar las trazas de Bode con el fin de establecer con rapidez y con un mínimo de cálculos la naturaleza general de las características de la respuesta en frecuencia, y significa una ayuda en gran parte del trabajo de diseño preliminar. Si se desea obtener curvas de respuesta en frecuencia precisas, es fácil hacer correcciones remitiéndonos a la curva obtenida en la figura 8–6. En la práctica, para dibujar una curva de respuesta en frecuencia precisa se introduce una corrección de 3 dB en la frecuencia de esquina y una corrección de 1 dB en los puntos una octava abajo y arriba de la frecuencia de esquina, y después se conectan estos puntos mediante una curva regular.

Observe que variar la constante de tiempo T mueve la frecuencia de esquina a la izquierda o a la derecha, aunque las formas de las curvas de magnitud logarítmica y de ángulo de fase no cambian.

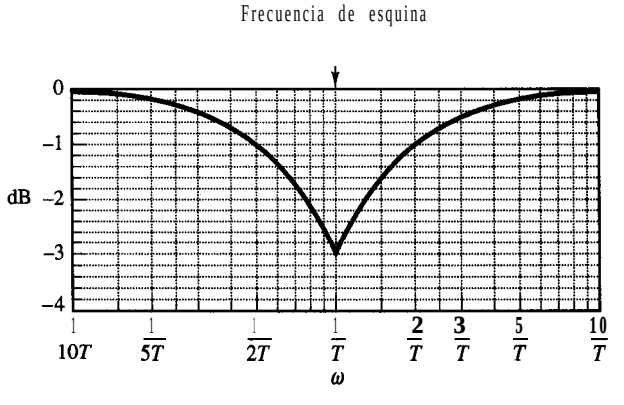


Figura 8-6
Error de magnitud logarítmica en la expresión asintótica de la curva de respuesta en frecuencia de $1/(1 + j\omega T)$.

La función de transferencia $1/(1 + j\omega T)$ tiene la característica de un filtro paso-bajas. Para frecuencias arriba de $\omega = 1/T$, la magnitud logarftmica disminuye rápidamente hacia $-\infty$. Esto se debe, en esencia, a la presencia de la constante de tiempo. En el filtro paso-bajas, la salida sigue fielmente una entrada senoidal a frecuencias bajas. Pero, conforme aumenta la frecuencia de entrada, la salida no puede seguir la entrada debido a que se requiere de cierta cantidad de tiempo para que el sistema aumente en magnitud. Por tanto, para frecuencias altas, la amplitud de la salida tiende a cero y el ángulo de fase de la salida tiende a -90". En este caso, si la función de entrada contiene muchos armónicos, los componentes de baja frecuencia se reproducen fielmente en la salida, en tanto que los componentes de alta frecuencia se atenúan en amplitud y cambian en fase. Por tanto, un elemento de primer orden produce una duplicación exacta, o casi exacta, sólo para fenómenos constantes 0 que varían lentamente.

Una ventaja de las trazas de Bode es que, para factores recíprocos, por ejemplo, el factor $1 + j\omega T$, las curvas de magnitud logarftmica y de ángulo de fase sólo necesitàn cambiar de signo. Dado que

$$20 \log |1 + j\omega T| = -20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right|$$

$$\angle 1 + j\omega T = \tan^{-1} \omega T = -\angle \frac{1}{1 + j\omega T}$$

la frecuencia de esquina es igual para ambos casos. La pendiente de la asíntota de alta frecuencia de 1 + jo T es 20 dB/década, y el ángulo de fase varía de 0° a 90" conforme la frecuencia ω se incrementa de cero a infinito. La curva de magnitud logarftmica, junto con las asíntotas y la curva del ángulo de fase para el factor $1 + j\omega T$, aparece en la figura 8–7.

La forma de las curvas del ángulo de fase es la misma para cualquier factor de la forma $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$. Por tanto, es conveniente tener una plantilla para la curva de ángulo de fase. Esta plantilla puede usarse repetidas veces para construir curvas de ángulo de fase para

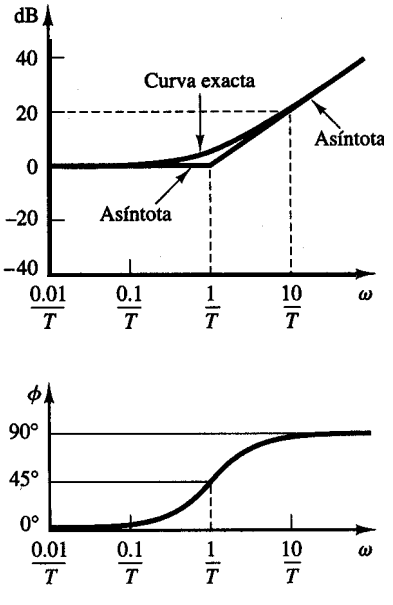


Figura 8–7
Curva de magnitud logarítmica, asíntotas y curva de ángulo de fase para $1 + j\omega T$.

cualquier función de la forma $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$. Si no se cuenta con dicha plantilla, será necesario localizar varios puntos sobre la curva. Los ángulos de fase de $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$ son

$$\mp 45° \quad \text{en} \quad \omega = \frac{1}{T}$$

$$\mp 26.6° \quad \text{en} \quad \omega = \frac{1}{2T}$$

$$\mp 5.7° \quad \text{en} \quad \omega = \frac{1}{10T}$$

$$763.4" \quad \text{en} \quad \omega = \frac{2}{T}$$

$$784.3" \quad \text{en} \quad \omega = \frac{10}{T}$$

Para el caso en el que una función de transferencia determinada contiene términos como $(1 + j\omega T)^{\mp n}$, se hace una construcción asintótica similar. La frecuencia de esquina está todavía en $\omega = 1/T$ y las asíntotas son rectas. La asíntota de frecuencia baja es una recta horizontal en 0 dB, en tanto que la asíntota de frecuencia alta tiene la pendiente de -20n dB/década o $20n$ dB/década. El error implícito en las ecuaciones asintóticas es n veces el que existe para $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$. El ángulo de fase es n veces el de $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$ en cada punto de frecuencia.

Factores cuadráticos $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{\mp 1}$. Los sistemas de control suelen tener factores cuadráticos de la forma

$$\frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \tag{8–1}$$

Si $\zeta > 1$, este factor cuadrático se expresa como un producto de dos factores de primer orden con polos reales. Si $0 < \zeta < 1$, este factor cuadrático es el producto de dos factores complejos conjugados. Las aproximaciones asintóticas para las curvas de respuesta en frecuencia no son precisas para un factor con valores bajos de ζ. Esto se debe a que la magnitud y la fase del factor cuadrático dependen de la frecuencia de esquina y del factor de amortiguamiento relativo ζ.

La curva asintótica de respuesta en frecuencia se obtiene del modo siguiente: dado que

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right| = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

para frecuencias bajas tales que $\omega \ll \omega_n$, la magnitud logarítmica se convierte en

$$-20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Por tanto, la asintota de frecuencia baja es una recta horizontal en 0 dB. Para frecuencias altas tales que $\omega \gg \omega_n$, la magnitud logarítmica se vuelve

$$-20 \log \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40 \log \frac{\omega}{\omega_n} \text{ dB}$$

La ecuación para la **asíntota** de alta frecuencia es una recta con pendiente de -40 dB/década, dado que

$$-40 \log \frac{10\omega}{\omega_n} = -40 - 40 \log \frac{\omega}{\omega_n}$$

La **asíntota** de alta frecuencia interseca la de baja frecuencia en $\omega = \omega_n$ dado que en esta frecuencia

$$-40 \log \frac{\omega_n}{\omega_n} = -40 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Esta frecuencia, ω_n, es la frecuencia de esquina para el factor cuadrático considerado.

Las dos asíntotas recién obtenidas son independientes del valor de ζ. Cerca de la frecuencia $\omega = \omega_n$, ocurre un pico de resonancia, tal como se espera de (8-1). El factor de amortiguamiento relativo ζ determina la magnitud de este pico de resonancia. Es obvio que la aproximación mediante las asíntotas genera errores. La magnitud del error depende del valor de ζ. Para valores pequeños de éste, es grande . La figura 8-8 muestra las curvas exactas de magnitud logarítmica junto con las asíntotas y las curvas exactas de ángulo de fase para el factor cuadrático obtenido mediante (8-1) con varios valores de ζ. Si se desea hacer correcciones en las curvas asintóticas, las cantidades necesarias de corrección en un número suficiente de puntos de frecuencia se obtienen de la figura 8-8.

El ángulo de fase del factor cuadrático $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$ es

$$\phi = \left/ \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = -\tan^{-1}\left[\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right] \right. \qquad (8\text{–}2)$$

El ángulo de fase es una función de ω y de ζ. En $\omega = 0$, el ángulo de fase es igual a 0". En la frecuencia de esquina $\omega = \omega_n$, el ángulo de fase es –90°, sin considerar ζ, dado que

$$\phi = -\tan^{-1}\frac{2\zeta}{0} = -\tan^{-1}\infty = -90°$$

En $\omega = \infty$, el ángulo de fase se convierte en -180". La curva del ángulo de fase tiene una pendiente simétrica respecto del punto de inflexión, punto en el que ϕ = -90". No existen maneras simples de trazar **tales** curvas de fase. Es necesario remitirnos a las curvas de ángulo de fase de la figura 8-8.

Las curvas de respuesta en frecuencia para el factor

$$1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

pueden obtenerse si simplemente se invierte el signo de la magnitud logarítmica y el del ángulo de fase del factor

$$\frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

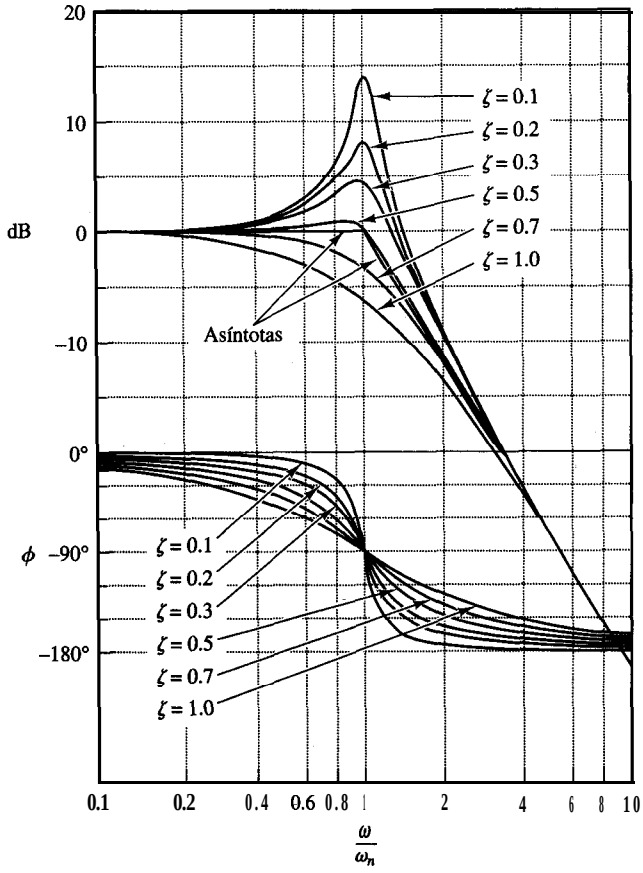


Figura 8–8
Curvas de magnitud logarítmica, asíntotas y curvas de ángulo de fase de la función de transferencia cuadrática obtenida mediante (8-1).

Para obtener las curvas de respuesta en frecuencia de una función de transferencia cuadrática determinada, primero debemos determinar los valores de la frecuencia de esquina ω_n y del factor de amortiguamiento relativo ζ. A continuación, usando la familia de curvas obtenidas en la figura 8-8, se grafican las curvas de respuesta en frecuencia.

Frecuencia de resonancia ω_r y el valor del pico de resonancia M_r. La magnitud de

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

es

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \tag{8–3}$$

Si $|G(j\omega)|$ tiene un valor pico en alguna frecuencia, ésta se denomina frecuencia de resonancia. Dado que el numerador de $|(Gj\omega)|$ es constante, ocurrirá un valor pico de $|G(j\omega)|$ cuando

$$g(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \tag{8–4}$$

sea mínima. Dado que la ecuación (8-4) se escribe como

$$g(\omega) = \left[\frac{\omega^2 - \omega_n^2(1 - 2\zeta^2)}{\omega_n^2}\right]^2 + 4\zeta^2(1 - \zeta^2) \tag{8–5}$$

el valor mínimo de g(w) ocurre en w = $\sqrt{1 - 2\zeta^2}$. Por tanto, la frecuencia de resonancia ω_r es

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2}, \qquad \text{para } 0 \leq \zeta \leq 0.707 \tag{8–6}$$

Conforme el factor de amortiguamiento relativo ζ tiende a cero, la frecuencia de resonancia tiende a ω_n. Para $0 < \zeta \leq 0.707$, la frecuencia de resonancia ω_r es menor que la frecuencia natural amortiguada $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$, lo cual se exhibe en la respuesta transitoria. A partir de la ecuación (8–6), se aprecia que, para $\zeta > 0.707$, no hay un pico de resonancia. La magnitud $|G(j\omega)|$ disminuye en forma monotónica con el aumento de la frecuencia w. (La magnitud es menor que 0 dB para todos los valores de $w > 0$. Recuerde que, para $0.7 < \zeta < 1$, la respuesta escalón es oscilatoria, pero las oscilaciones están bien amortiguadas y son apenas perceptibles.)

la magnitud del pico de resonancia M_r se encuentra sustituyendo la ecuación (8-6) en la ecuación (8-3). Para $0 \leq \zeta \leq 0.707$,

$$M_r = |G(j\omega)|_{\text{máx}} = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \tag{8–7}$$

Para $\zeta > 0.707$,

$$M_r = 1 \tag{8–8}$$

Conforme ζ tiende a cero, M_r tiende a infinito. Esto significa que, si el sistema no amortiguado se excita en su frecuencia natural, la magnitud de $G(j\omega)$ se vuelve infinita. La relación entre M_r y ζ aparece en la figura 8-9.

El ángulo de fase de $G(j\omega)$ en la frecuencia en la que ocurre el pico de resonancia se obtiene sustituyendo la ecuación (8–6) en la ecuación (8-2). Por tanto, en la frecuencia de resonancia ω_r,

$$\underline{/G(j\omega_r)} = \text{-tan-r } \frac{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}{\zeta} = \text{-90”} + \text{sen-r } \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Procedimiento general para graficar trazas de Bode. Primero reescriba la función de transferencia senoidal $G(j\omega)H(j\omega)$ como un producto de los factores básicos analizados antes. Después identifique las frecuencias de esquina asociadas con estos factores

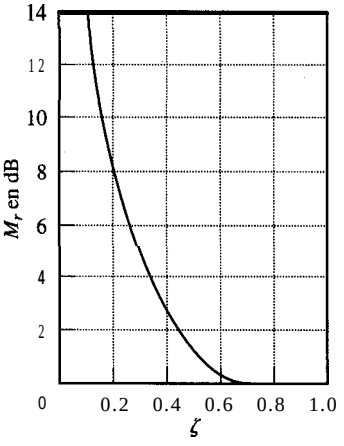


Figura 8-9
Curva M_r contra ζ para el sistema de segundo orden $1/[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]$.

básicos. Por último, dibuje las curvas asintóticas de magnitud logarítmica con pendientes adecuadas entre las frecuencias de esquina. La curva exacta, que se encuentra cerca de la curva asintótica, se obtiene agregando las correcciones adecuadas.

La curva del ángulo de fase de $G(j\omega)H(j\omega)$ se traza agregando las curvas de ángulo de fase de los factores individuales.

El uso de las trazas de Bode con aproximaciones asintóticas toma mucho menos tiempo que otros métodos utilizados para calcular la respuesta en frecuencia de una función de transferencia. La facilidad de graficar las curvas de respuesta en frecuencia para una función de transferencia determinada y la facilidad para modificar la curva de respuesta conforme se agrega una compensación, son las principales razones por las cuales las trazas de Bode se usan tanto en la práctica.

EJEMPLO 8-1 Dibuje las trazas de Bode para la siguiente función de transferencia:

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega + 3)}{(j\omega)(j\omega + 2)[(j\omega)^2 + jo + 2]}$$

Haga las correcciones necesarias para que la curva de magnitud logarítmica sea precisa.

Para evitar errores posibles al trazar la curva de magnitud logarítmica, es conveniente-escribir $G(j\omega)$ en la siguiente forma normalizada, en la que las asíntotas de baja frecuencia para los factores de primer orden y el factor de segundo orden son la línea 0 dB.

$$G(j\omega) = \frac{7.5\left(\frac{j\omega}{3} + 1\right)}{(j\omega)\left(\frac{j\omega}{2} + 1\right)\left[\frac{(j\omega)^2}{2} + \frac{j\omega}{2} + 1\right]}$$

Esta función se compone de los factores siguientes:-

$$7.5, \qquad (j\omega)^{-1}, \qquad 1 + j\frac{\omega}{3}, \qquad \left(1 + j\frac{\omega}{2}\right)^{-1}, \qquad \left[1 + j\frac{\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2}\right]^{-1}$$

Las frecuencias de esquina del tercer, cuarto y quinto términos son $\omega = 3$, $\omega = 2$ y $\omega = \sqrt{2}$, respectivamente. Observe que el último término tiene el factor de amortiguamiento relativo de 0.3536.

Para graficar las trazas de Bode, la figura 8–10 muestra las curvas asintóticas separadas para cada uno de los factores. A continuación se obtiene la curva compuesta agregando algebraicamente las curvas individuales, como también se observa en la figura 8-10. Considere que, cuando se agregan las curvas asintóticas individuales a cada frecuencia, la pendiente de la curva compuesta es acumulativa. Debajo de $\omega = \sqrt{2}$, la gráfica tiene la pendiente de -20 dB/década. En la primera frecuencia de esquina $\omega = \sqrt{2}$, la pendiente cambia a -60 dB/década y continúa a la siguiente esquina de frecuencia $\omega = 2$, en donde la pendiente se convierte en -80 dB/década. En la última frecuencia de esquina $\omega = 3$, la pendiente cambia a -60 dB/década.

Una vez dibujada una curva aproximada de magnitud logarítmica, la curva real se obtiene agregando correcciones a todas las frecuencias de esquina y a las frecuencias una octava abajo y arriba de las frecuencias de esquina. Para los factores de primer orden $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$, las correcciones son ± 3 dB en la frecuencia de esquina y $\pm$ 1 dB en las frecuencias una octava abajo y arriba de la frecuencia de esquina. Las correcciones necesarias para el factor cuadrático se obtienen a partir de la figura 8-8. La curva exacta de magnitud logarítmica para $G(j\omega)$ aparece con una curva de guiones en la figura 8-10.

Observe que cualquier cambio en la pendiente de la curva de magnitud sólo se hace en las frecuencias de esquina de la función de transferencia $G(j\omega)$. Por tanto, en lugar de dibujar y agregar curvas de magnitud individuales, tal como aparece, es posible trazar la curva de magnitud sin trazar las curvas individuales. Empezamos por dibujar la parte de la recta de frecuencia más baja

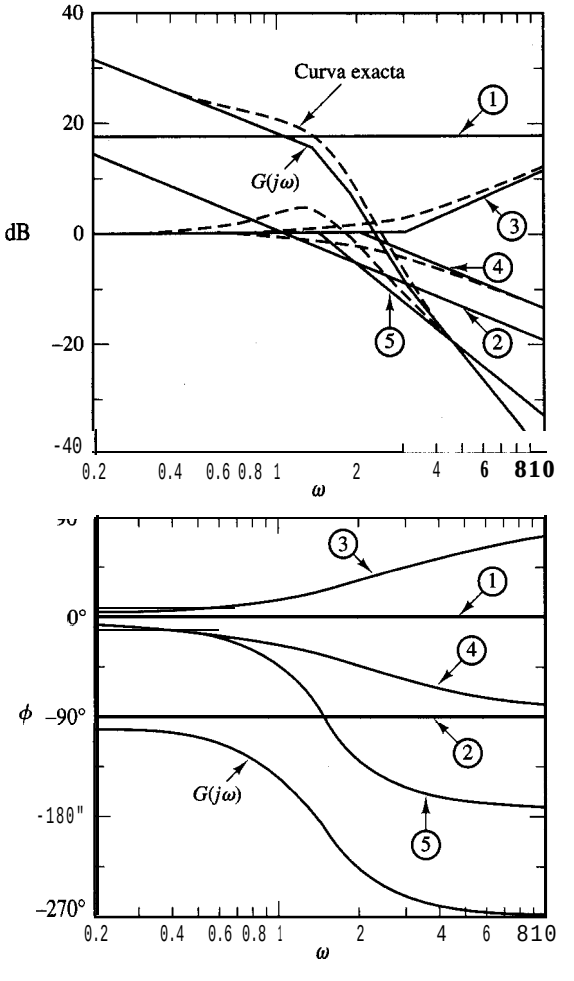


Figura 8-10
Trazas de Bode del sistema considerado en el ejemplo 8-1.

(es decir, la recta con la pendiente de -20 dB/década para $\omega < \sqrt{2}$). Conforme la frecuencia aumenta, obtenemos el efecto de los polos complejos conjugados (el término cuadrático) en la frecuencia de esquina $\omega = \sqrt{2}$. Los polos complejos conjugados provocan que las pendientes de la curva de magnitud cambien de -20 a -60 dB/década. En la siguiente esquina de frecuencia, $\omega = 2$, el efecto del polo es cambiar la pendiente a –80 dB/década. Por ultimo, en la frecuencia de esquina $\omega = 3$, el efecto del cero es cambiar la pendiente de –80 a -60 dB/década.

Para graficar la curva de ángulo de fase completa, deben trazarse las curvas de ángulo de fase de todos los factores. La suma algebraica de todas las curvas de ángulo de fase proporciona la curva completa de ángulo de fase, como se aprecia en la figura 8–10.

Sistemas de fase mínima y de fase no mínima. Las funciones de transferencia que no tienen polos ni ceros en el semiplano derecho del plano s son funciones de transferencia de fase mínima, en tanto que las que tienen polos y/o ceros en el semiplano derecho del plano s son funciones de transferencia de fase no mínima. Los sistemas con funciones de transferencia de fase mínima se denominan ***sistemas*** de ***fase mínima***, en tanto que aquellos con funciones de transferencia con fase no mínima se denominan ***sistemas de fase no mínima.***

Para los sistemas con la misma característica de magnitud, el rango del ángulo de fase de la función de transferencia de fase mínima es mínimo entre todos los sistemas de ese tipo, en tanto que el rango del ángulo de fase de cualquier función de transferencia de fase no mínima es mayor que este mínimo.

Se observa que, para un sistema de fase mínima, la función de transferencia se determina en forma única sólo a partir de la curva de magnitud. Para un sistema de fase no mínima, esto no sucede. Multiplicar cualquier función de transferencia por todos los filtros paso-todo no altera la curva de magnitud, sino que modifica la curva de fase.

Considere como ejemplo los dos sistemas cuyas funciones de transferencia senoidales son

$$G_1(j\omega) = \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega T_1}, \qquad G_2(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T_1} \qquad 0 < T < T_1$$

Las configuraciones de polos y ceros de estos sistemas aparecen en la figura 8-11. Las dos funciones de transferencia senoidales tienen la misma característica de magnitud, pero tienen diferente característica de ángulo de fase, como se aprecia en la figura 8-12. Estos dos sistemas difieren uno del otro en el factor

$$G(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T}$$

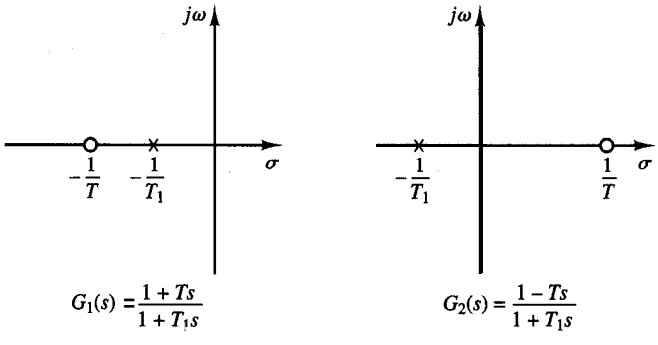


Figura 8-11
Configuraciones de polos y ceros de un sistema de fase mínima $G_1(s)$ y un sistema de fase no mínima $G_2(s)$.

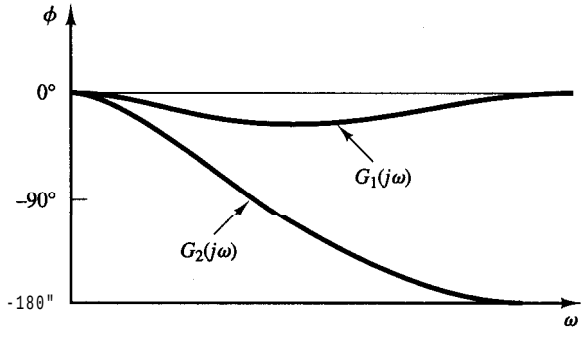


Figura 8–12
Característica de ángulo de fase de los sistemas $G_1(s)$ y $G_2(s)$ de la figura s-11.

La magnitud del factor $(1 - j\omega T)/(1 + j\omega T)$ siempre es unitaria. Pero el ángulo de fase es igual a -2 tan-r ωT y varía de 0" a -180" conforme ω aumenta de cero a infinito.

Como se planteó antes, para un sistema de fase mínima, las características de magnitud y de ángulo de fase se relacionan en forma única. Esto significa que, si se especifica la curva de magnitud de un sistema en el rango de frecuencia completo de cero a infinito, la curva de ángulo de fase se determina en forma única y viceversa. Sin embargo, esto no es válido para un sistema de fase no mínima.

Las situaciones de fase no mínima surgen en dos formas distintas. Una es simplemente cuando un sistema incluye uno o más elementos de fase no mínima. La otra ocurre cuando un lazo menor es inestable.

Para un sistema de fase mínima, el ángulo de fase en ω = cc se convierte en $-90°(q - p)$, donde p y q son los grados de los polinomios del numerador y el denominador de la función de transferencia, respectivamente. Para un sistema de fase no mínima, el ángulo de fase en ω = co difiere de $-90°(q - p)$. En cualquier sistema, la pendiente de la curva de magnitud logarítmica en ω = co es igual a $-20(q - p)$ dB/década. Por tanto, es posible detectar si el sistema es de fase mínima, si se examinan tanto la pendiente de la asíntota de alta frecuencia de la curva de magnitud logarítmica, como el ángulo de fase en $\omega = \infty$. Si la pendiente de la curva de magnitud logarítmica, conforme ω tiende a infinito, es $-20(q - p)$ dB/década y el ángulo de fase en ω = co es igual a $-90°\ (q - p)$, el sistema es de fase mínima.

Los sistemas de fase no mínima son lentos en su respuesta, debido a su comportamiento defectuoso al inicio de la respuesta. En la mayor parte de los sistemas de control, debe tenerse cuidado en evitar un atraso de fase excesivo. Al diseñar un sistema, si una velocidad de respuesta rápida es de vital importancia, no deben usarse componentes de fase no mínima. (Un ejemplo común de elementos de fase no mínima que pueden estar presentes en un sistema de control es el retardo de transporte.)

Es importante observar que las técnicas de análisis y diseño mediante la respuesta en frecuencia que se presentarán en este capítulo y el siguiente son válidas para los sistemas de fase mínima y los de fase no mínima.

Retardo de transporte. El retardo de transporte tiene un comportamiento de fase no mínima y tiene un atraso de fase excesivo sin atenuación en frecuencias altas. Estos retardos de transporte ocurren, por lo común en los sistemas térmicos, hidráulicos y neumáticos.

Considere el retardo de transporte obtenido mediante

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T}$$

La magnitud siempre es igual a la unidad, dado que

$$|G(j\omega)| = |\cos \omega T - j \operatorname{sen} \omega T| = 1$$

Por tanto, la magnitud logarítmica del retardo de transporte $e^{-j\omega T}$ es igual a 0 dB. El ángulo de fase del retardo de transporte es

$$\angle G(j\omega) = -\omega T \quad \text{(radianes)}$$
$$= -57.3\ \omega T \quad \text{(grados)}$$

El ángulo de fase varía en forma lineal con la frecuencia ω. La característica del ángulo de fase del retardo de transporte aparece en la figura 8-13.

EJEMPLO 8-2 Dibuje las trazas de Bode de la siguiente función de transferencia:

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega T}$$

La magnitud logarítmica es

$$20 \log|G(j\omega)| = 20 \log|e^{-j\omega L}| + 2010g\left|\frac{1}{1 + j\omega T}\right|$$
$$= 0 + 20 \log\left|\frac{1}{1 + j\omega T}\right|$$

El ángulo de fase de $G(j\omega)$ es

$$\angle G(j\omega) = \angle e^{-j\omega L} + \angle \frac{1}{1 + j\omega T}$$
$$= -\omega L - \tan^{-1} \omega T$$

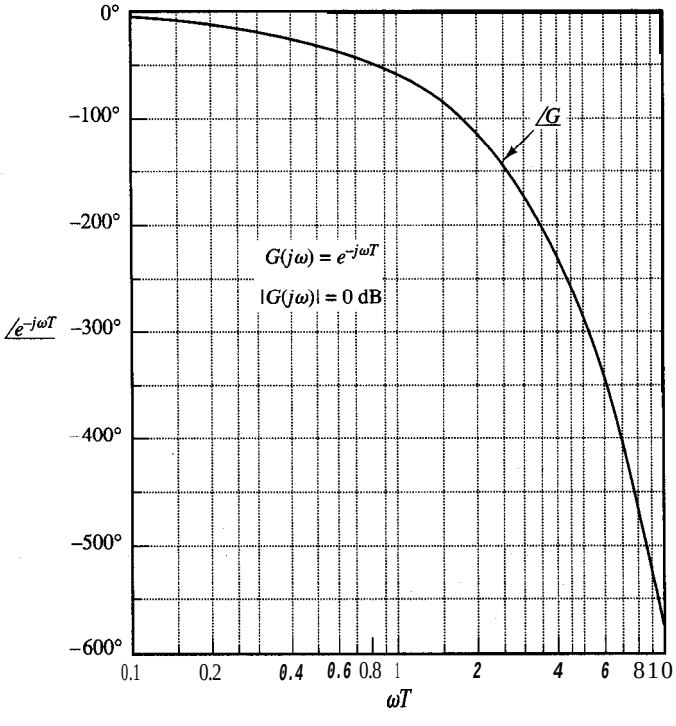


Figura 8–13
Característica del ángulo de fase del retardo de transporte.

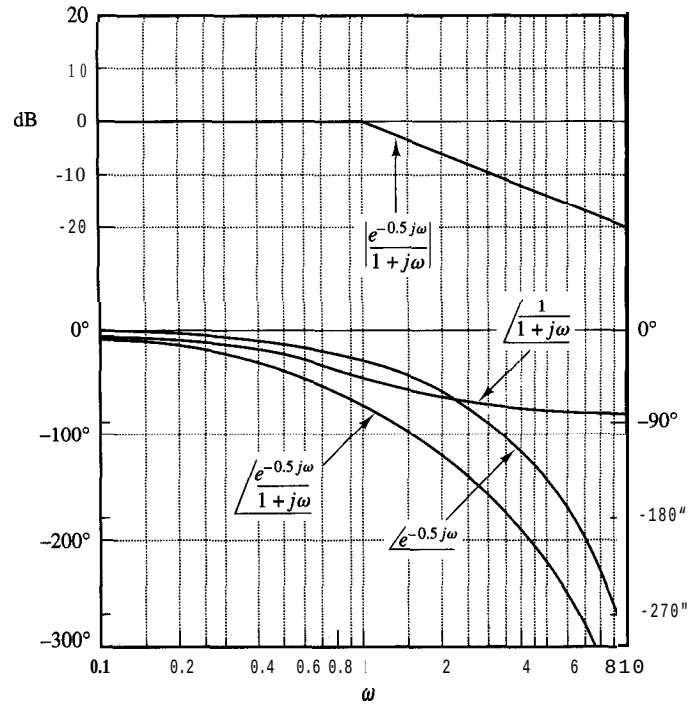


Figura 8–14
Trazas de Bode para el sistema $e^{-j\omega L}/(1 + j\omega T)$ con $L = 0.5$ y $T = 1$.

Las curvas de magnitud logarítmica y de ángulo de fase para esta función de transferencia con $L = 0.5$ y $T = 1$ aparecen en la figura 8-14.

Relación entre el tipo de sistema y la curva de magnitud logarítmica. Considere el sistema de control con realimentación unitaria. Las constantes estáticas de error de posición, velocidad y aceleración describen el comportamiento de baja frecuencia de los sistemas de tipo 0, tipo 1 y tipo 2, respectivamente. Para un sistema definido, sólo es finita y significativa una de las constantes de error estático. (Entre mayor es el valor de la constante finita de error estático, más alta es la ganancia de lazo conforme ω tiende a cero.)

El tipo de sistema determina la pendiente de la curva de magnitud logarítmica en frecuencias bajas. Por tanto, la información relacionada con la existencia y la magnitud del error en estado estable de un sistema ante una entrada definida se determina a partir de la observación de baja frecuencia de la curva de magnitud logarítmica.

Determinación de las constantes de error estático de posición. Considere el sistema de control con realimentación unitaria de la figura 8-15. Suponga que la función de transferencia en lazo abierto se obtiene mediante

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_p s + 1)}$$

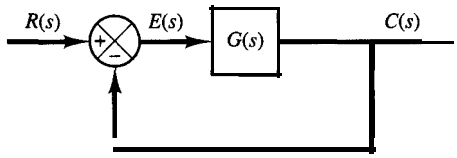


Figura 8–15
Sistema de control con realimentación unitaria.

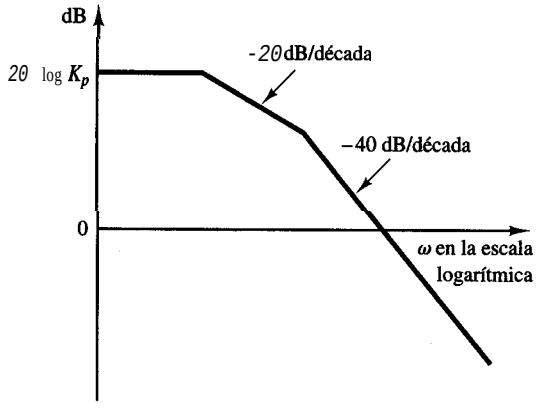


Figura 8-16
Curva de magnitud logarítmica de un sistema de tipo 0.

o bien

$$G(j\omega) = \frac{K(T_a j\omega + 1)(T_b j\omega + 1)\cdots(T_m j\omega + 1)}{(j\omega)^N(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)\cdots(T_p j\omega + 1)}$$

La figura 8–16 contiene un ejemplo de la gráfica de la magnitud logarítmica de un sistema de tipo 0. En este sistema, la magnitud de $G(j\omega)$ es igual a K_p en frecuencias bajas, o

$$\lim_{\omega \to 0} G(j\omega) = K_p$$

De esto se deduce que la asíntota de baja frecuencia es una línea horizontal en 20 log K_p dB.

Determinación de las constantes de error estático de velocidad. Considere el sistema de control con realimentación unitaria de la figura 8–15. La figura 8–17 contiene un ejemplo de la gráfica de la magnitud logarítmica de un sistema de tipo 1. La intersección del segmento inicial -20 dB/década (o su extensión) con la línea $\omega = 1$ tiene la magnitud de 20 log K_v. Esto se observa del modo siguiente: en un sistema de tipo 1

$$G(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega}, \qquad \text{para } \omega \ll 1$$

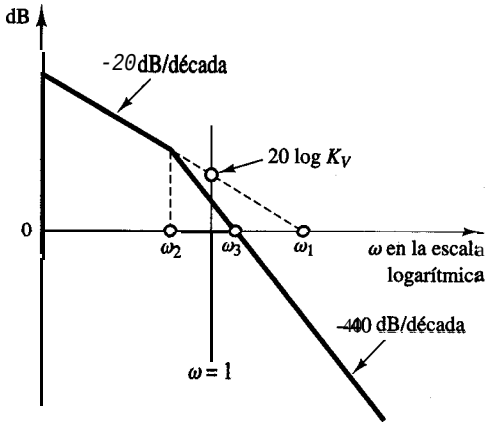


Figura 8-17
Curva de magnitud logarítmica de un sistema de tipo 1.

Por tanto.

$$20 \log \left| \frac{K_v}{j\omega} \right|_{\omega=1} = 20 \log K_v$$

La intersección del segmento inicial -20 dB/década (o su extensión) con la línea 0 dB tiene una frecuencia cuyo valor numérico es igual a K_v. Para ver esto, defina la frecuencia en esta intersección como ω_1; así,

$$\left| \frac{K_v}{j\omega_1} \right| = 1$$

o bien

$$K_v = \omega_1$$

Como ejemplo, considere el sistema de tipo 1 con realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{K}{s(Js + F)}$$

Si definimos la frecuencia de esquina como ω_2 y la frecuencia de la intersección del segmento –40 dB/década (o su extensión) con la línea 0 dB como ω_3, entonces

$$\omega_2 = \frac{F}{J}, \qquad \omega_3^2 = \frac{K}{J}$$

Dado que

$$\omega_1 = K_v = \frac{K}{F}$$

se deduce que

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_3^2$$

o bien

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{\omega_3}{\omega_2}$$

En la traza de Bode,

$$\log \omega_1 - \log \omega_3 = \log \omega_3 - \log \omega_2$$

Por tanto, el punto ω_3 está justo en la mitad entre los puntos ω_2 y WI. Entonces, el factor de amortiguamiento relativo ζ del sistema es

$$\zeta = \frac{F}{2\sqrt{KJ}} = \frac{\omega_2}{2\omega_3}$$

Determinación de las constantes de error estático de aceleración. Considere el sistema de control con realimentación unitaria de la figura 8-15. La figura 8-18 contiene un ejemplo de la gráfica de la magnitud logarítmica de un sistema de tipo 2. La intersección

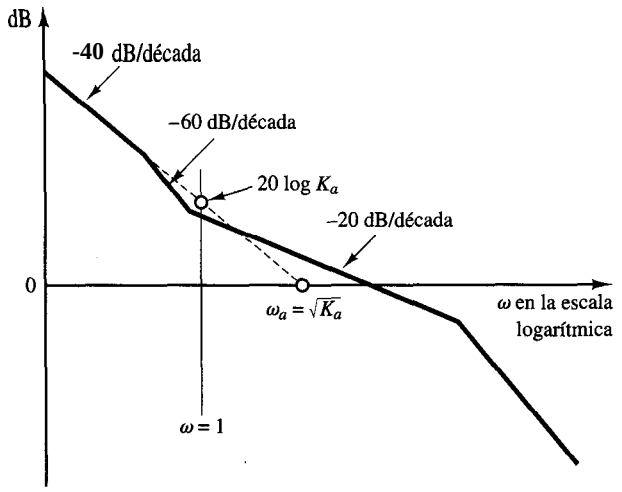


Figura 8-18
Curva de magnitud logarítmica de un sistema de tipo 2.

del segmento inicial -40 dB/década (o su extensión) con la línea $\omega = 1$ tiene una magnitud de 20 log K_a. Dado que, a bajas frecuencias,

$$G(j\omega) = \frac{K_a}{(j\omega)^2}, \qquad \text{para } \omega \ll 1$$

se deduce que

$$20 \log \left| \frac{K_a}{(j\omega)^2} \right|_{\omega=1} = 20 \log K_a$$

La frecuencia ω_a de la intersección del segmento inicial –40 dB/década (o su extensión) con la línea 0 dB produce numéricamente la raíz cuadrada de K_a. Esto se observa a partir de lo siguiente:

$$20 \log \left| \frac{K_a}{(j\omega_a)^2} \right| = 20 \log 1 = 0$$

lo cual produce

$$\omega_a = \sqrt{K_a}$$

8-3 GRAFICACIÓN DE TRAZAS DE BODE CON MATLAB

El comando bode calcula las magnitudes y los ángulos de fase de la respuesta en frecuencia de un sistema en tiempo continuo, lineal e invariante con el tiempo.

Cuando se introduce el comando bode a la computadora (sin argumentos en el lado izquierdo), MATLAB produce las trazas de Bode en la pantalla.

Cuando se invoca con argumentos en el lado izquierdo,

```
[mag,phase,w] = bode(num,den,w)
```

bode retorna la respuesta en frecuencia del sistema en las matrices mag, phase, y w. No aparece una gráfica en la pantalla. Las matrices mag y phase contienen las magnitudes y los

ángulos de fase de respuesta en frecuencia del sistema evaluado en los puntos de frecuencia especificados por el usuario. El ángulo de fase se retorna en grados. La magnitud se convierte en decibeles con el enunciado

```
magdB = 20*log10(mag)
```

Para especificar el rango de frecuencia, use el comando logspace(d1,d2), o logspace(d1,d2,n). El primero genera un vector de 50 puntos logarítmicamente espaciados en forma equitativa entre las décadas 10^{d1} y 10^{d2}. Es decir, para generar 50 puntos entre 0.1 rad/seg y 100 rad/seg, introduzca el comando

```
w = logspace(-1,2)
```

El comando logspace(d1,d2,n), en cambio, genera logarítmicamente n puntos espaciados en forma equitativa entre las décadas 10^{d1} y 10^{d2}. Por ejemplo, para generar 100 puntos entre 1 rad/seg y 1000 rad/seg, introduzca el comando siguiente:

```
w = logspace(0,3,100)
```

Para incorporar estos puntos de frecuencia cuando se grafican las trazas de Bode, use el comando bode(num,den,w) o bode(A,B,C,D,iu,w). Estos comandos usan el vector de frecuencia w especificado por el usuario.

EJEMPLO 8-3 Considere la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 4s + 25}$$

Grafique las trazas de Bode para esta función de transferencia.

Cuando el sistema se define en la forma

$$G(s) = \frac{\text{num}(s)}{\text{den}(s)}$$

use el comando bode(num,den) para dibujar las trazas de Bode. [Cuando el numerador y el denominador contienen los coeficientes del polinomio en potencias descendentes de s, bode(num,den) dibuja las trazas de Bode.] El programa MATLAB 8-1 muestra un programa que grafica las trazas de Bode para este sistema. Las trazas de Bode resultantes aparecen en la figura 8–19.

Programa MATLAB 8–1

```
num = [0  0  25];
den = [1  4  25];
bode(num,den)
subplot(2,1,1);
title('Trazas de Bode de G(s) = 25/(s^2 + 4s + 25)')
```

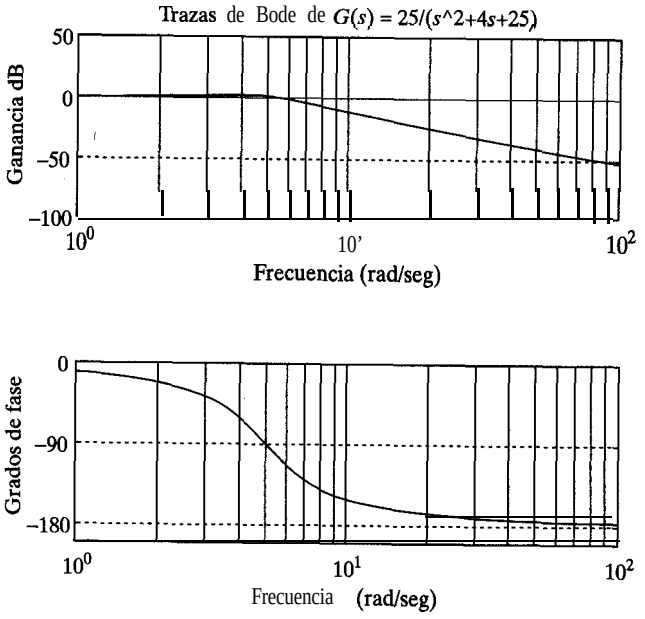


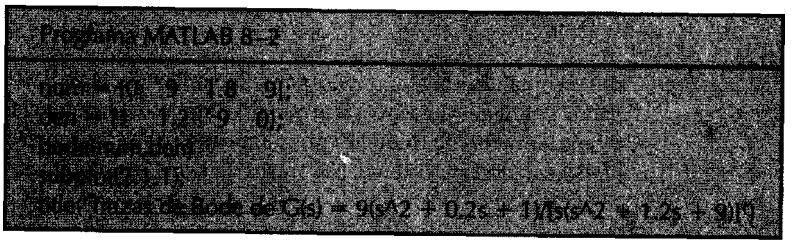
Figura 8–19
Trazas de Bode de $G(s) = \dfrac{25}{s^2 + 4s + 25}$.

EJEMPLO 8 - 4 Considere el sistema de la figura 8-20. La función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{9(s^2 + 0.2s + 1)}{s(s^2 + 1.2s + 9)}$$

Grafique las trazas de Bode.

El programa MATLAB 8-2 **grafica** las trazas de Bode para el sistema. Las gráficas resultantes aparecen en la figura 8-21. En este caso, se determina automáticamente que el rango de frecuencia es de 0.1 a 10 radlseg.



Si se pretende **graficar** las trazas de Bode de 0.1 a 1000 radlseg, introduzca el comando siguiente:

```
w = logspace(-2,3,1 00)
```

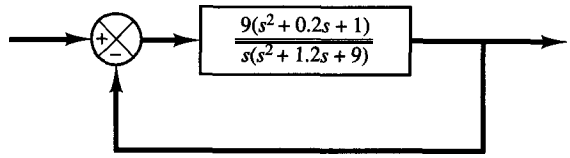


Figura8-20
Sistema de control.

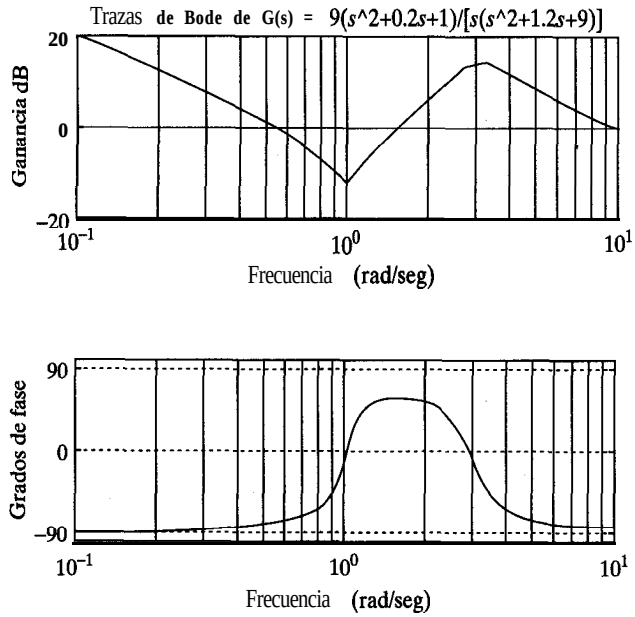


Figura 8–21
Trazas de Bode de G(s) $= \frac{9(s^2 + 0.2s + 1)}{s(s^2 + 1.2s + 9)}$.

Este comando genera logarítmicamente 100 puntos espaciados en forma equitativa entre 0.01 y 100 **rad/seg.** (Observe que el vector w especifica en radianes por segundo las frecuencias en las que se calculará la respuesta en frecuencia.)

Si usamos el comando

```
bode(num,den,w)
```

entonces, el rango de frecuencia será el que especifique el usuario, pero el rango de magnitud y el rango del ángulo de fase se determinarán automáticamente. Véase el programa MATLAB 8-3 y la gráfica resultante en la figura 8-22.

Para especificar el rango de **magnitud** y el rango del ángulo de fase, use el comando siguiente:

```
[mag,phase,w] = bode(num,den,w)
```

Las matrices **mag y phase** contienen las magnitudes y los ángulos de fase de respuesta en frecuencia, evaluados en los púntos de frecuencia especificados por el usuario. El ángulo de fase se retorna en grados. La magnitud se convierte en decibeles con el enunciado

Programa MATLAB 8–3

```
num = [0  9  1.8  9];
den = [1  1.2  9  0];
w = logspace(-2,3,100);
bode(num,den,w)
subplot(2,1,1);
title('Trazas de Bode de G(s) = 9(s^2 + 0.2s + 1)/[s(s^2 + 1.2s + 9)]')
```

```
magdb = 20*log10(mag)
```

Si se quiere especificar que el rango de magnitud se encuentre, por ejemplo, al menos entre –45 dB y +45 dB, deben introducirse líneas invisibles en –45 dB y +45 dB en la gráfica, especificando la magnitud máxima, dBmax, y magnitud mínima, dBmin, del modo siguiente:

```
dBmax = 45*ones(1,100);
dBmin = -45*ones(1,100);
```

A continuación, introduzca el siguiente comando de gráfica semilogarítmica:

```
semilogx(w,magdB,'o',w,magdB,'-',w,dBmax,'--i',w,dBmin,':i')
```

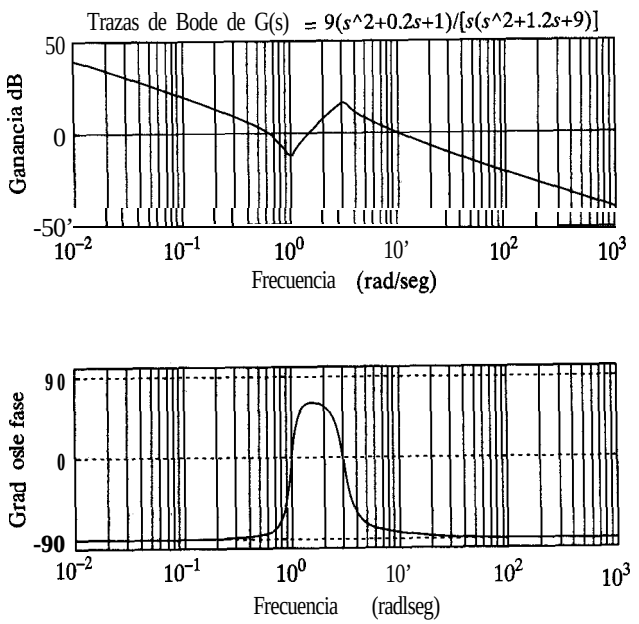


Figura 8-22
Trazas de Bode de G(s) $= \dfrac{9(s^2 + 0.2s + 1)}{s(s^2 + 1.2s + 9)}$

(Observe que el número de puntos **dBmax** y **dBmin** debe ser el mismo que el número de puntos de frecuencia en w. En este ejemplo, todos los números son 100.) A continuación, la pantalla mostrará la curva de magnitud **magdB** con marcas **'o'**. (Las líneas rectas en **+45 dB** y **–45 dB** son invisibles.)

Observe que **'i'** es un color invisible. Por ejemplo, 'og' mostrará círculos pequeños en color verde y **'oi'** mostrará círculos pequeños en color 'invisible'; es decir, los círculos pequeños no aparecerán en la pantalla. Cambiando una parte del comando semilogx anterior de

```
w,dBmax,'--i',w,dBmin,':i'
```

a

```
w,dBmax,'--',w,dBmin,':'
```

Las líneas de **+45 dB** y **–45 dB** se volverán visibles en la pantalla.

El rango para la magnitud es, por lo general, un múltiplo de **5, 10, 20** o 50 **dB.** (Hay excepciones.) Para el caso actual, el rango para la magnitud será de -50 **dB** a **+50 dB.**

Para el ángulo de fase, si pretendemos especificar que el rango esté,por ejemplo, al menos entre **–145°** y **+115°,** introducimos líneas invisibles en -145" y **+115°** en el programa, especificando el ángulo de fase máximo, pmax, y el ángulo de fase mfnimo, pmin, del modo siguiente:

```
pmax = 115*ones(1,100)
pmin = -145*ones(1,100)
```

Después, introducimos el comando de la gráfica semilogarítmica:

```
semilogx(w,phase,'o',w,phase,'-',w,pmax,'--i',w,pmin,':i')
```

(La cantidad de puntos pmax y de puntos pmin debe ser igual al número de puntos de frecuencia en w.) La pantalla mostrará la curva de fase. Las líneas rectas en + 115" y -145" son invisibles.

El rango para el ángulo de fase es, por lo general, un múltiplo de **5°, 10°,** 50" o 100". (Hay excepciones.) Para el caso actual, el rango para el ángulo de fase será de -150" a + 150".

El programa MATLAB 8-4 genera las trazas de Bode para el sistema tal que el rango de frecuencia es de 0.01 a 1000 **rad/seg,** el rango de magnitud es de -50 a **+50 dB** (el rango de magnitud es un múltiplo de 50 **dB)** y el rango del ángulo de fase es de -150" a + **150°** (el rango del ángulo de fase es un múltiplo de 50"). La figura **8–23** muestra las trazas de Bode obtenidas mediante el programa MATLAB **8–4.**

¿Qué le sucede a las trazas de Bode si la ganancia se vuelve infinita en un punto de cierta frecuencia? Si existe un polo del sistema en el eje $j\omega$ y el vector w contiene este punto de frecuencia, la ganancia se vuelve infinita en esta frecuencia. En este caso, **MATLAB** proporcionará mensajes de advertencia. Considere el ejemplo siguiente.

Programa MATLAB 8–4

```
% ---------- Trazas de Bode ----------

% ***** En este programa obtendremos las trazas de Bode del
% sistema de función de transferencia usando un rango de
% frecuencia especificado por el usuario *****

% ***** Introduzca el numerador y el denominador de la
% función de transferencia *****

num = [0   9   1.8   9];
den = [1   1.2   9   0];

% ***** Especifique el rango de frecuencia e introduzca el comando
% [mag,phase,w] = bode(num,den,w) *****

w = logspace(-2,3,100);
[mag,phase,w] = bode(num,den,w);

% ***** Convierta la magnitud a decibeles *****

magdB = 20*log10(mag);

% ***** Especifique el rango para la magnitud. Para el sistema
% considerado, el rango de magnitud debe incluir -45 dB y
% +45 dB. Introduzca dBmax y dBmin en el programa y dibuje
% una línea de dBmax y una línea de dBmin en color invisible. Para
% graficar la curva magdB y las líneas invisibles, introduzca
% el siguiente comando dBmax, dBmin y semilogx *****

dBmax = 45*ones(1,100);
dBmin = -45*ones(1,100);
semilogx(w,magdB,'o',w,magdB,'-',w,dBmax,'--r',w,dBmin,'--r')

% ***** Introduzca la retícula, el título, la etiqueta de x y la etiqueta de y *****
grid
title('Trazas de Bode de G(s) = 9(s^2 + 0.2s + 1)/(s(s^2 + 1.2s + 9))')
xlabel('Frecuencia (rad/seg)')
ylabel('Ganancia dB')

% ***** Después, graficaremos la curva del ángulo de fase *****

% ***** Especifique el rango para el ángulo de fase. Para el sistema
% considerado, el rango del ángulo de fase debe incluir -145°
% y +115°. Introduzca en el programa pmax y pmin y
% dibuje una línea pmax y una línea pmin en color invisible. Para
% graficar la curva de fase y las líneas invisibles, introduzca el
% siguiente comando pmax, pmin y semilogx *****
```

```
pmax = 115*ones(1,100);
pmin = −145*ones(1,100);
semilogx(w,phase,'o',w,phase,'-',w,pmax,'--r',w,pmin,':r')

% ***** Introduzca la retícula, la etiqueta de x y la etiqueta de y *****

grid
xlabel('Frecuencia (rad/seg)')
ylabel('Grados de fase')
```

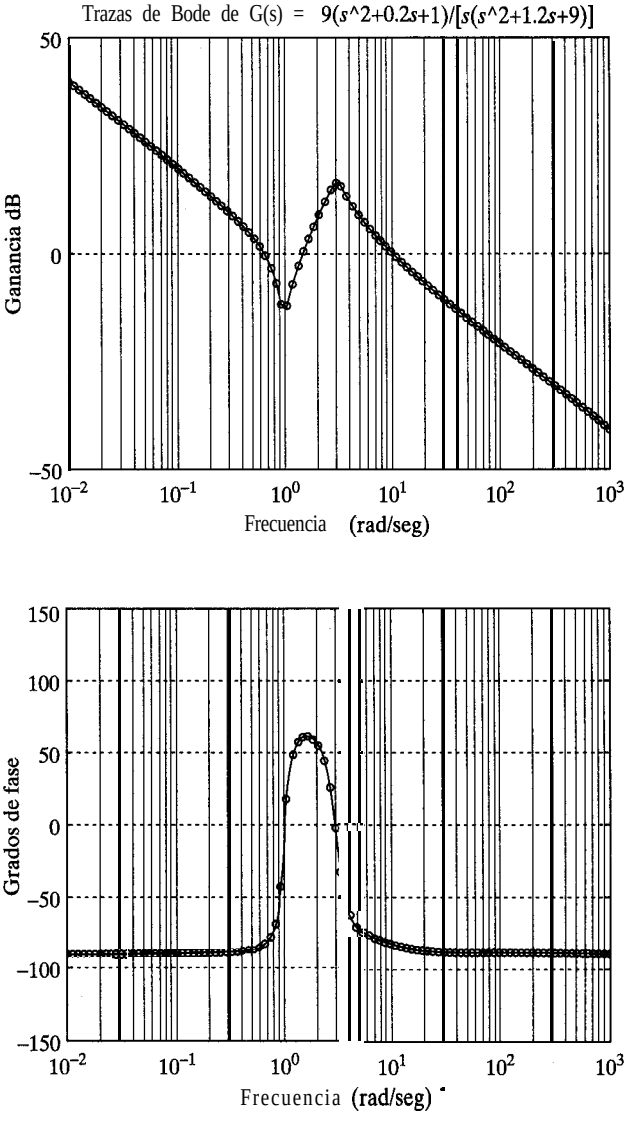


Figura 8-23
Trazas de Bode de $G(s) = \dfrac{9(s^2 + 0.2s + 1)}{s(s^2 + 1.2s + 9)}$.

EJEMPLO 8–5 Considere un sistema con la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Esta función de transferencia en lazo abierto tiene polos sobre el eje $j\omega$ en $\pm j$.

El programa MATLAB 8-5 se usa para **graficar** las trazas de Bode para este sistema. La gráfica resultante aparece en la figura 8-24. En teoría, la magnitud se vuelve infinita en un punto de frecuencia en el que ω = 1 **rad/seg.** Sin embargo, este punto de frecuencia no está entre los puntos de frecuencia que se calculan. En la gráfica, la magnitud de cumbre aparece de aproximadamente 50 **dB.** Este valor se calcula cercano, pero no exacto, a ω = 1 radlseg.

Programa MATLAB 8–5

```
num = [0  0  1];
den = [1  0  1];
bode(num,den)
subplot(2,1,1);
title('Trazas de Bode de G(s) = 1/(s^2 + 1)')
```

Sin embargo, si uno de los puntos de frecuencia que se calculan coincide con el polo en ω = 1, la magnitud se vuelve infinita en este punto. MATLAB envía mensajes de **advertencia.** Véase el

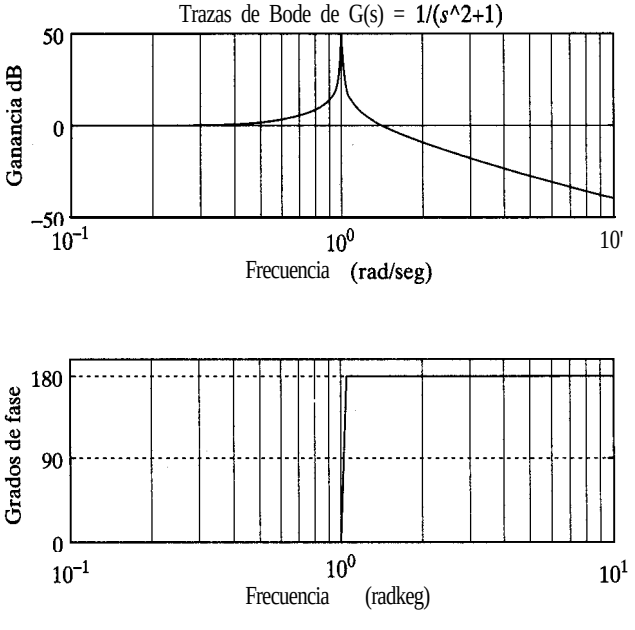


Figura 8-24
Trazas de Bode de G(s) = $\frac{1}{s^2 + 1}$.

programa MATLAB 8-6 en donde los puntos que se calculan incluyen el punto en $\omega = 1$ rad/seg. (En este caso, se calculan 101 puntos, que van de $\omega = 0.1$ a $\omega = 10$. Los primeros cincuenta puntos están en $\omega = 1$.) Cuando se introduce en la computadora el programa MATLAB 8-6, aparecen mensajes de advertencia, como se aprecia. Las trazas de Bode resultantes, que aparecen en la figura 8-25, no incluyen la magnitud calculada en $\omega = 1$. (En teoría, esta magnitud es infinita.) La curva de magnitud muestra el valor pico cerca de 20 dB. La curva de fase muestra un cambio gradual en el ángulo de fase de $0°$ a $+180°$ cerca del punto $\omega = 1$. (En teoría, el cambio en el ángulo de fase de 0" a $+180°$ debe ser abrupto en $\omega = 1$.) Es obvio que las trazas de Bode de la figura 8-25 son incorrectas.

Si el vector w contiene un punto de frecuencia en que la ganancia se vuelva infinita, el número de puntos de frecuencia cambiará, por ejemplo, de 101 a 100. Por lo común, un pequeño cambio en la cantidad de puntos de frecuencia evitará este tipo de problema.

Programa MATLAB 8–6

```
num = [0  0  1];
den = [1  0  1];
w = logspace(-1,1,101);
bode(num,den,w)

Warning: Divide by zero
subplot(2,1,1)
title('Trazas de Bode incorrectas')
```

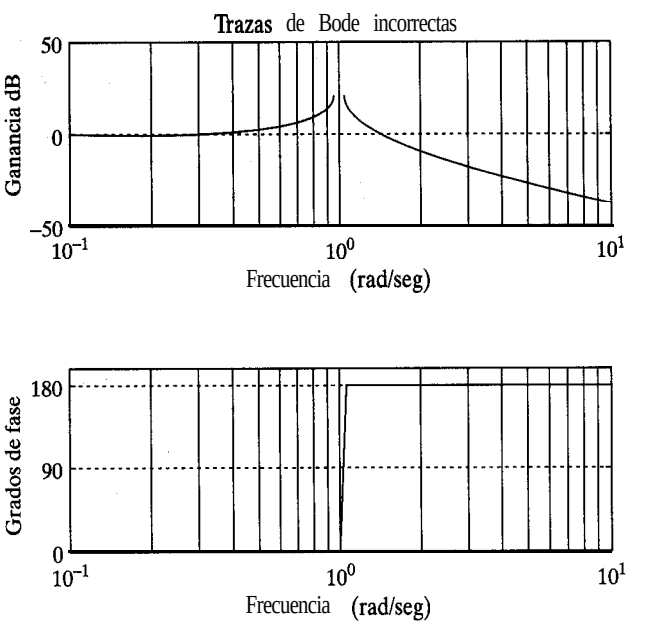


Figura 8-25
Trazas de Bode incorrectas de $G(s) = \dfrac{1}{s^2 + 1}$.

Obtención de trazas de Bode de sistemas definidos en el espacio de estados. Considere el sistema definido mediante

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

en donde x = vector de estado (vector n)
y = vector de salida (vector m)
u = vector de control (vector r))
A = matriz de estado (matriz n x n)
B = matriz de control (matriz n x r)
C = matriz de salida (matriz m x n)
D = matriz de transmisión directa (matriz m x r)

Las trazas de Bode para este sistema se obtiene introduciendo el comando

```
bode(A,B,C,D)
```

o bien

```
bode(A,B,C,D,iu)
```

El comando bode(A,B,C,D) produce una serie de trazas de Bode, una para cada entrada del sistema, con el rango de frecuencia determinado automáticamente. (Se usan más puntos cuando la respuesta cambia con rapidez.)

El comando bode(A, B,C, D, i u), en donde i u es la *i–ésima* entrada del sistema, produce las trazas de Bode de la entrada iu para todas las salidas (y_1, y_2,..., y,) del sistema, con el rango de frecuencia automáticamente determinado. **(La** iu escalar es un índice dentro de las entradas del sistema y especifica cuál entrada se usará para graficar las trazas de **Bode.)** Si el vector de control u tiene tres entradas, tales que

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

entonces iu debe establecerse en 1, 2 o 3.

Si el sistema sólo tiene una entrada u, se usa cualquiera de los comandos siguientes:

```
bode(A, B,C, D)
```

o bien

```
bode(A, B,C, D, 1)
```

EJEMPLO 8-6 Considere el sistema siguiente:

$$[\dot{m}:] = \begin{bmatrix} 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix} u$$

$$Y = [1\ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Este sistema tiene una entrada u y una salida y. Usando el comando

bode(A,B,C,D)

e introduciendo el programa MATLAB 8-7 en la computadora, obtenemos las trazas de Bode de la figura 8-26.

Programa MATLAB 8–7

```
A = [0  1; -25  -4];
B = [0;25];
C = [1  0];
D = [0];
bode(A,B,C,D)
subplot(2,1,1)
title('Trazas de Bode')
```

Si sustituimos el comando bode(A,B,C,D) del programa MATLAB 8-7 por

bode(A,B,C,D,1)

entonces, MATLAB producirá las trazas de Bode idénticas a las de la figura 8-26.

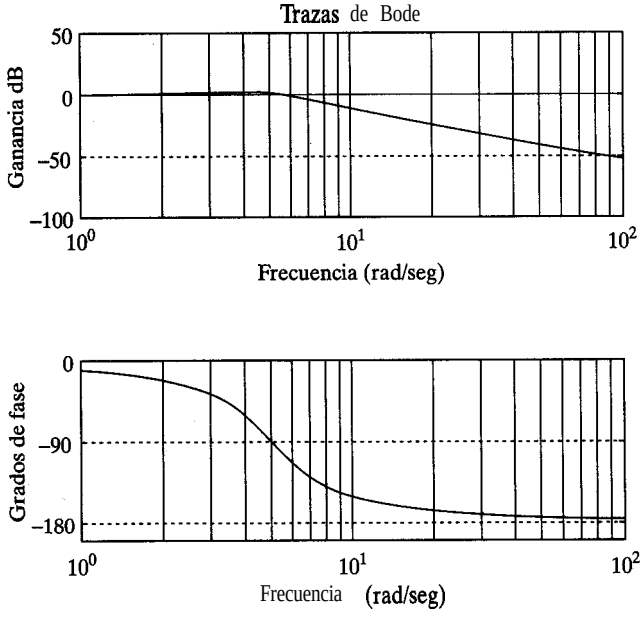


Figura 8–26
Trazas de Bode del sistema considerado en el ejemplo 8-6.

Observe que, si por error usamos el comando

```
bode(A,B,C,D,2)
```

MATLAB produce un mensaje de error, debido a que el sistema actual sólo tiene una entrada e iu debe establecerse en '1', no en '2' o cualquier otro número.

8-4 TRAZAS POLARES

La traza polar de una función de transferencia senoidal $G(j\omega)$ es una gráfica de la magnitud de $G(j\omega)$ contra el ángulo de fase de $G(j\omega)$ en coordenadas polares, conforme ω varía de cero a infinito. Por tanto, la traza polar es el lugar geométrico de los vectores $|G(j\omega)|\angle G(j\omega)$ conforme ω varía de cero a infinito. Observe que, en las gráficas polares, los ángulos de fase son positivos (negativos) si se miden en el sentido contrario de las manecillas del reloj (en el sentido de las manecillas) a partir del eje real positivo. La traza polar se denomina, con frecuencia, traza de Nyquist. La figura 8–27 contiene un ejemplo de dicha traza. Todos los puntos de la traza polar de $G(j\omega)$ representan el punto terminal de un vector en un valor determinado de ω. En la traza polar, es importante mostrar la graduación de la frecuencia del lugar geométrico. Las proyecciones de $G(j\omega)$ en los ejes real e imaginario son sus componentes real e imaginaria. La magnitud $|G(j\omega)|$ y el ángulo de fase $\angle G(j\omega)$ deben calcularse directamente para cada frecuencia ω con el propósito de construir trazas polares. Sin embargo, dado que es fácil construir trazas logarítmicas, los datos necesarios para graficar la traza polar deben obtenerse directamente de la traza logarítmica si ésta se traza primero y los decibeles se convierten a una magnitud ordinaria. 0 bien, por supuesto puede usarse MATLAB para obtener una traza polar $G(j\omega)$ o para obtener $|G(j\omega)|$ y $\angle G(j\omega)$ con precisión para diversos valores de ω en el rango de frecuencia que interesa. (Véase la sección 8–5.)

Una ventaja de usar una traza polar es que representa, en una sola gráfica, las características de la respuesta en frecuencia de un sistema en el rango de frecuencia completo. Una desventaja es que la traza no indica en forma clara la contribución de todos los factores individuales de la función de transferencia en lazo abierto.

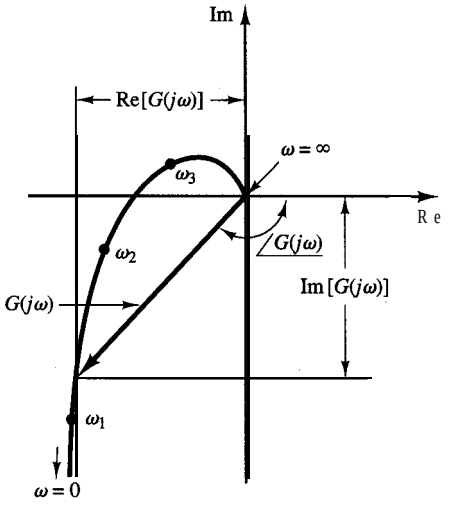


Figura 8-27
Traza polar.

Factores de integral y de derivada $(j\omega)^{\mp 1}$. La traza polar de $G(j\omega) = 1/j\omega$ es el eje imaginario negativo dado que

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega}\angle -90°$$

La traza polar de $G(j\omega) = j\omega$ es el eje imaginario positivo.

Factores de primer orden $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$. Para la función de transferencia senoidal

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}\angle -\tan^{-1}\omega T$$

los valores de $G(j\omega)$ en $\omega = 0$ y $\omega = 1/T$ son, respectivamente,

$$G(j0) = 1\angle 0° \qquad \text{y} \qquad G\left(j\frac{1}{T}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\angle -45°$$

Si ω tiende a infinito, la magnitud de $G(j\omega)$ tiende a cero y el ángulo de fase tiende a -90". La traza polar de esta función de transferencia es un semicírculo conforme la frecuencia ω varía de cero a infinito, como se aprecia en la figura 8–28(a). El centro se ubica en 0.5 sobre el eje real y el radio es igual a 0.5.

Para probar que la traza polar es un semicírculo, defina

$$G(j\omega) = X + jY$$

en donde

$$X = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} = \text{parte real de } G(j\omega)$$

$$Y = \frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = \text{parte imaginaria de } G(j\omega)$$

Así, obtenemos

$$\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{1}{2}\frac{1 - \omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2 + \left(\frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

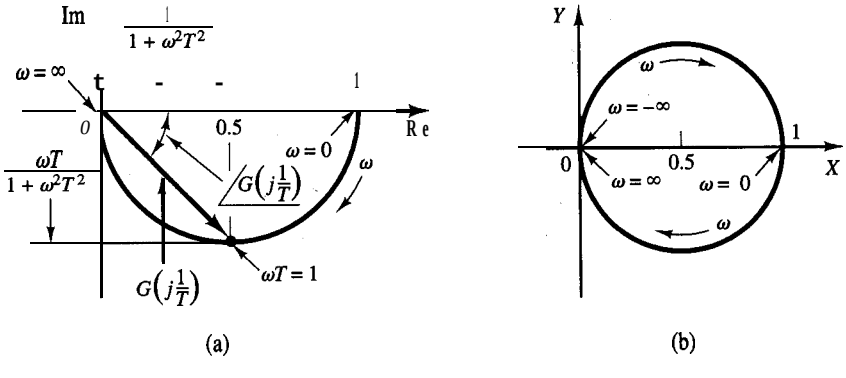


Figura 8-28
(a) Traza polar de $1/(1 + j\omega T)$;
(b) traza de $G(j\omega)$ en el plano X-Y.

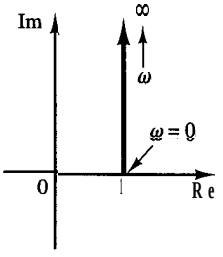


Figura 8-29
Traza polar de $1 + j\omega T$.

Por tanto, en el plano X-Y, $G(j\omega)$ es un círculo con centro en X = $\frac{1}{2}$, Y = 0 y con radio de $\frac{1}{2}$, como se aprecia en la figura 8–28(b). El semicírculo inferior corresponde a $0 \leq \omega \leq \infty$ y el semicírculo superior corresponde a $-\infty \leq \omega \leq 0$.

La traza polar de la función de transferencia $1 + j\omega T$ es simplemente la mitad superior de la recta que pasa por el punto (1,0) en el plano complejo y paralelo al eje imaginario, como se observa en la figura 8-29. La traza polar de $1 + j\omega T$ tiene un aspecto completamente diferente del de $1/(1 + j\omega T)$.

Factores cuadráticos $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{\mp 1}$. Las partes de frecuencia baja y alta de la traza polar de la función de transferencia senoidal

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}, \qquad \text{para } \zeta > 0$$

se obtienen, respectivamente, mediante

$$\lim G(j\omega) = 1\angle 0° \qquad \text{y} \qquad \lim_{\omega\to\infty} G(j\omega) = 0\angle -180°$$

La traza polar de esta función de transferencia senoidal empieza en $1\angle 0°$ y termina en $0\angle -180°$ conforme ω aumenta de cero a infinito. Por tanto, la parte de frecuencia alta de $G(j\omega)$ es tangente al eje real negativo. Los valores de $G(j\omega)$ en el rango de frecuencia que interesa se calculan directamente, mediante las trazas de Bode o MATLAB.

La figura 8-30 contiene ejemplos de las trazas polares de la función de transferencia que se acaba de considerar. La forma exacta de una traza polar depende del valor del factor de amortiguamiento relativo ζ, pero la forma general de la traza es igual tanto para el caso subamortiguado ($1 > \zeta > 0$) como para el caso sobreamortiguado ($\zeta > 1$).

Para el caso subamortiguado en $\omega = \omega_n$, tenemos que $G(j\omega_n) = 1/(j2\zeta)$, y el ángulo de fase en $\omega = \omega_n$ es de -90°. Por tanto, se observa que la frecuencia en la que el lugar geo-

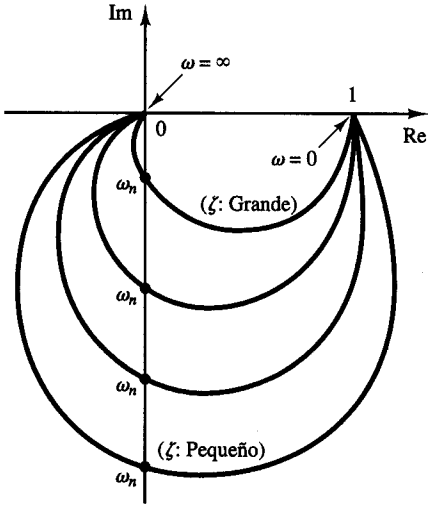


Figura 8-30
Trazas polares de
$\dfrac{1}{1 + 2\zeta\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$,
para $\zeta > 0$.

métrico $G(j\omega)$ intersecta el eje imaginario es la frecuencia natural no amortiguada ω_n. En la traza polar, el punto de frecuencia cuya distancia al origen es la máxima, corresponde a la frecuencia de resonancia ω_r. El valor pico de $G(j\omega)$ se obtiene como el cociente entre la magnitud del vector en la frecuencia de resonancia ω_r y la magnitud del vector en $\omega = 0$. La frecuencia de resonancia ω_r se señala en la traza polar de la figura 8-31.

Para el caso sobreamortiguado, conforme ζ aumenta mucho más allá de la unidad, el lugar geométrico $G(j\omega)$ tiende a un semicírculo. Esto se observa pues, para un sistema muy amortiguado, las raíces características son reales y una es mucho más pequeña que la otra. Dado que para un ζ suficientemente grande el efecto de la raíz mayor (mayor en su valor absoluto) sobre la respuesta se vuelve muy pequeño, el sistema se comporta como uno de primer orden.

A continuación, considere la siguiente función de transferencia senoidal:

$$G(j\omega) = 1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

$$= \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)$$

La parte de frecuencia baja de la curva es

$$\lim_{\omega \to 0} G(j\omega) = 1 \angle 0°$$

y la parte de frecuencia alta es

$$\lim_{\omega \to \infty} G(j\omega) = \infty \angle 180°$$

Dado que la parte imaginaria de $G(j\omega)$ es positiva para $\omega > 0$ y aumenta en forma monotónica, además de que la parte real de $G(j\omega)$ se decrementa en forma monotónica a partir de la unidad, la forma general de la traza polar de $G(j\omega)$ es la que aparece en la figura 8-32. El ángulo de fase está entre 0" y 180".

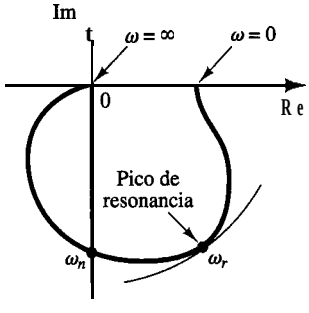


Figura 8–31
Traza polar que muestra el pico de resonancia y la frecuencia de resonancia ω_r.

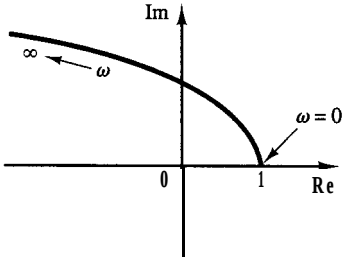


Figura 8–32
Traza polar de $1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$, para $\zeta > 0$.

EJEMPLO 8–7 Considere la siguiente función de transferencia de segundo orden:

$$G(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)}$$

Grafique la traza polar de esta función de transferencia.

Dado que la función de transferencia senoidal se escribe como

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega T)} = -\frac{T}{1 + \omega^2 T^2} - j\frac{1}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$$

la parte de frecuencia baja de la traza polar se convierte en

$$\lim_{\omega \to \infty} G(j\omega) = -T - j\infty = \infty \angle -90°$$

y la parte de frecuencia alta se vuelve

$$\lim_{\omega \to \infty} G(j\omega) = 0 - j0 = 0 \angle -180°$$

La forma general de la traza polar de $G(j\omega)$ aparece en la figura 8–33. La traza de $G(j\omega)$ es asintótica para la línea vertical que pasa por el punto $(-T, 0)$. Dado que esta función de transferencia contiene un integrador $(1/s)$, la forma general de la traza polar difiere sustancialmente de las funciones de transferencia de segundo orden que no poseen un integrador.

Retardo de transporte. El retardo de transporte

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T}$$

se puede escribir como

$$G(j\omega) = 1 \angle \cos \omega T - j \operatorname{sen} \omega T$$

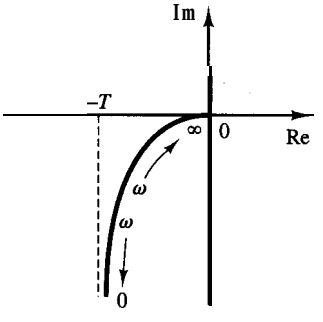


Figura 8-33
Traza polar de $1/[j\omega(1 + j\omega T)]$.

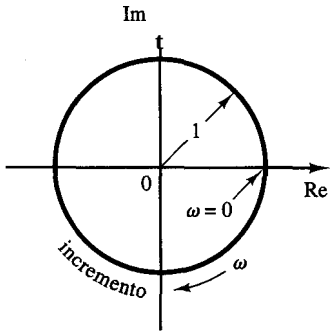


Figura 8-34
Traza polar de un retardo de transporte.

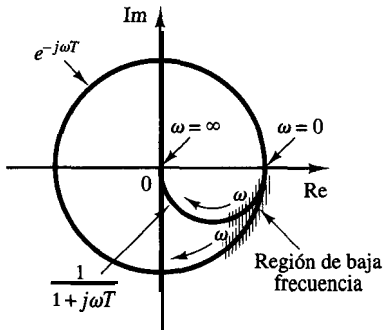


Figura 8-35
Trazas polares de $e^{-j\omega T}$ y $1/(1 + j\omega T)$.

Dado que la magnitud de $G(j\omega)$ siempre es unitaria y el ángulo de fase varía en forma lineal con ω, la traza polar del retardo de transporte es un círculo unitario, como se aprecia en la figura 8-34.

Para frecuencias bajas, el retardo de transporte $e^{-j\omega T}$ y el atraso de primer orden $1/(1 + j\omega T)$ se comportan en forma similar, como se aprecia en la figura 8-35. Las trazas polares de $e^{-j\omega T}$ y $1/(1 + j\omega T)$ son tangentes entre sí en $\omega = 0$. Esto se observa a partir del hecho de que, para $\omega \ll 1/T$,

$$e^{-j\omega T} \doteqdot 1 - j\omega T \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{1 + j\omega T} \doteqdot 1 - j\omega T$$

Sin embargo, para $\omega \gg 1/T$ existe una diferencia esencial entre $e^{-j\omega T}$ y $1/(1 + j\omega T)$, como también se aprecia en la figura 8-35.

EJEMPLO 8-8 Obtenga la traza polar de la siguiente función de transferencia:

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega T}$$

Dado que $G(j\omega)$ se escribe como

$$G(j\omega) = (e^{-j\omega L})\left(\frac{1}{1 + j\omega T}\right)$$

la magnitud y el ángulo de fase son, respectivamente,

$$|G(j\omega)| = |e^{-j\omega L}| \cdot \left|\frac{1}{1 + j\omega T}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

Y

$$\angle G(j\omega) = \angle e^{-j\omega L} + \angle \frac{1}{1 + j\omega T} = -\omega L - \tan^{-1} \omega T$$

Dado que la magnitud disminuye en forma monotónica a partir de la unidad y el ángulo de fase disminuye en forma monotónica e indefinida, la traza polar de la función de transferencia determinada es una espiral, como se observa en la figura 8-36.

Formas generales de las trazas polares. Las trazas polares de una función de transferencia de la forma

$$G(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega T_a)(1 + j\omega T_b)\cdots}{(j\omega)^{\lambda}(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)\cdots} = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \cdots}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \cdots}$$

en donde $n > m$, o el grado del polinomio del denominador es mayor que el del numerador, tendrá las formas generales siguientes:

1. *Para* $\lambda = 0$ *o sistemas* de tipo 0: el punto inicial de la traza polar (que corresponde a $\omega = 0$) es finito y está sobre el eje real positivo. La tangente para la traza polar en $\omega = 0$ es perpendicular al eje real. El punto terminal, que corresponde a $\omega = \infty$, está en el origen y la curva es tangente a uno de los ejes.
2. ***Para*** $\lambda = 1$ o sistemas ***de*** tipo 1: el término $(j\omega)$ del denominador contribuye -90" al ángulo de fase total de $G(j\omega)$ para $0 \leq \omega \leq \infty$. En $\omega = 0$, la magnitud de $G(j\omega)$ es infinita y el ángulo de fase se convierte en -90". En frecuencias bajas, la traza polar es asintótica para una línea paralela al eje imaginario negativo. En $\omega = \infty$, la magnitud se vuelve cero y la curva converge hacia el origen y es tangente a uno de los ejes.
3. ***Para*** $\lambda = 2$ ***o sistemas de tipo*** 2: el término $(j\omega)^2$ del denominador contribuye -180" al ángulo de fase total de $G(j\omega)$ para $0 \leq \omega \leq \infty$. En $\omega = 0$, la magnitud de $G(j\omega)$ es infinita y el ángulo de fase es igual a -180". En frecuencias bajas, la traza polar es asintótica para una línea paralela al eje real negativo. En $\omega = \infty$, la magnitud se vuelve cero y la curva es tangente a uno de los ejes.

Las formas generales de las partes de frecuencia baja de las trazas polares de los sistemas de tipo 0, tipo 1 y tipo 2 aparecen en la figura 8-37. Se observa que, si el grado del polinomio del denominador de $G(j\omega)$ es mayor que el del denominador, entonces los lu-

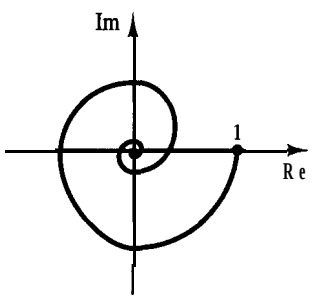


Figura 8-36
Traza polar de $e^{-j\omega L}/(1 + j\omega T)$.

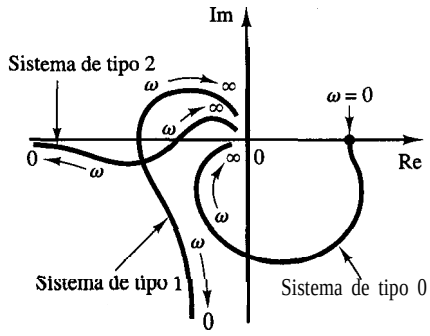


Figura 8-37
Trazas polares de los sistemas de tipo 0, tipo 1 y tipo 2.

gares geométricos $G(j\omega)$ convergen al origen en el sentido de las manecillas del reloj. En $\omega = \infty$, los lugares geométricos son tangentes a uno u otro de los ejes, como se observa en la figura 8-38.

Observe que las formas complicadas de las curvas de trazas polares se deben a la dinámica del numerador, es decir, a las constantes de tiempo del numerador de la función de transferencia. La figura 8-39 muestra dos ejemplos de trazas polares de funciones de transferencia con una dinámica del numerador. Al analizar los sistemas de control, debe determinarse con precisión la traza polar de $G(j\omega)$ en el rango de frecuencia que interesa.

La tabla 8-1 muestra gráficas de las trazas polares de varias funciones de transferencia.

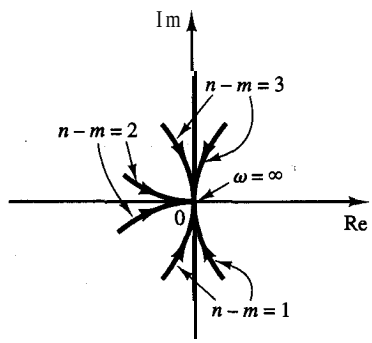


Figura 8-38
Trazas polares en el rango de frecuencias altas.

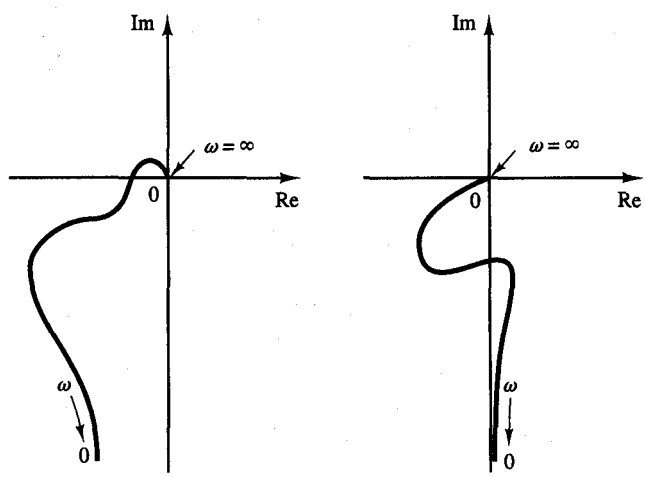
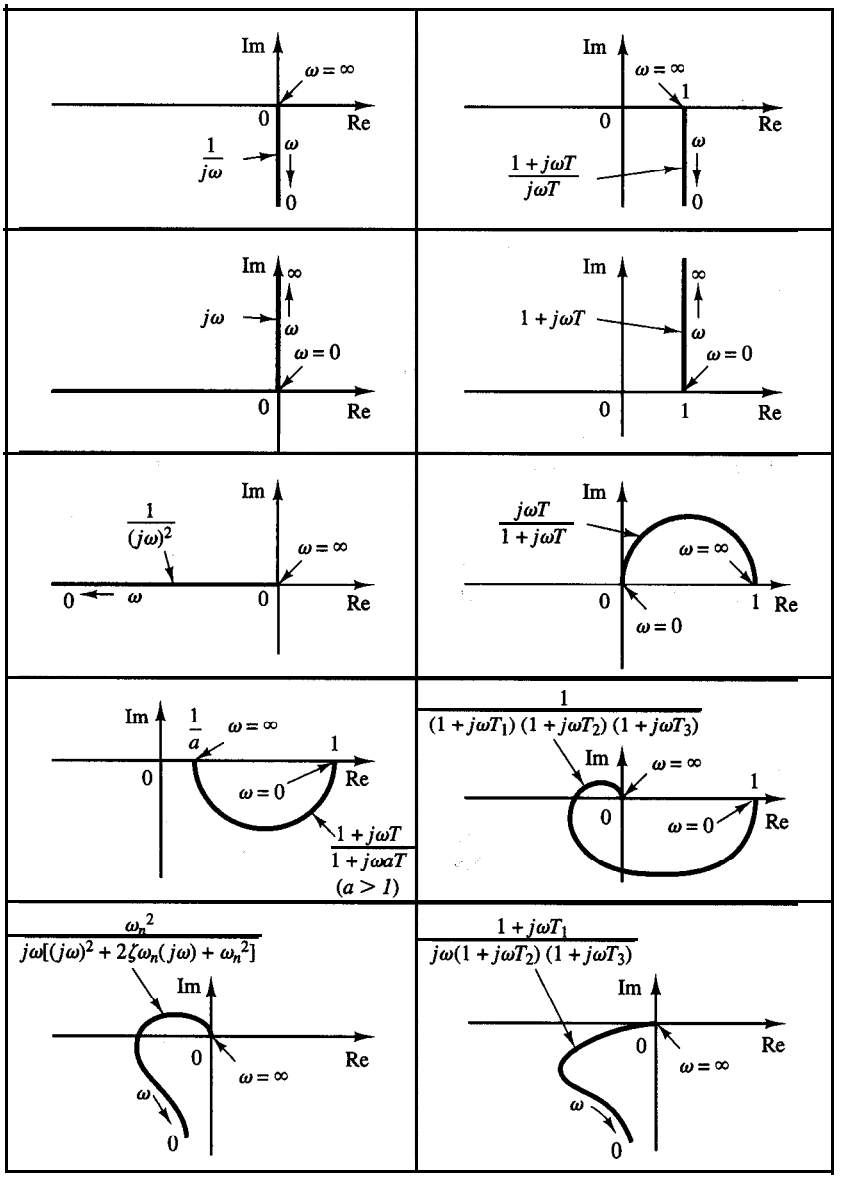


Figura 8-39
Trazas polares de funciones de transferencia con dinámica en el numerador.

Tabla 8-1 Trazas polares de funciones de transferencia simples



8-5 OBTENCIÓN DE TRAZAS DE NYQUIST CON MATLAB

Las trazas de Nyquist, al igual que las trazas de Bode, suelen usarse en la representación de la respuesta en frecuencia de sistemas de control lineales realimentados e invariantes con el tiempo. Las trazas de Nyquist son gráficas polares, en tanto que las trazas de Bode son gráficas rectangulares. Una u otra traza puede ser más conveniente para una operación específica, pero determinada operación siempre puede realizarse en cualquier traza.

El comando nyquist calcula la respuesta en frecuencia para sistemas en tiempo continuo, lineales e invariantes con el tiempo. Cuando se invoca con argumentos del lado izquierdo, nyquist produce una traza de Nyquist en la pantalla.

El comando

```
nyquist(num,den)
```

dibuja la traza de Nyquist de la función de transferencia

$$G(s) = \frac{num(s)}{den(s)}$$

en la que num y den contienen los coeficientes del polinomio en potencias descendentes de s.

El comando

```
nyquist(num,den,w)
```

usa el vector de frecuencia w especificado por el usuario. El vector w determina los puntos de frecuencia, en radianes por segundo, en los cuales se calculará la respuesta en frecuencia.

Cuando se invoca con los argumentos del lado izquierdo

```
[re,im,w] = nyquist(num,den)
```

o bien

```
[re,im,w] = nyquist(num,den,w)
```

MATLAB retorna la respuesta en frecuencia del sistema en las matrices re, im y w. No aparece una gráfica en la pantalla. Las matrices re e im contienen las partes real e imaginaria de respuesta en frecuencia del sistema cuyo valor se calculó en los puntos de frecuencia especificados en el vector w. Observe que re e im tienen tantas columnas como salidas y un renglón para cada elemento en w.

EJEMPLO 8-9 Considere la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s) \quad \frac{1}{s^2 + 0.8s + 1}$$

Dibuje una traza de Nyquist con MATLAB.

Dado que el sistema se obtiene en la forma de la función de transferencia, el comando

```
nyquist(num,den)
```

puede usarse para dibujar una traza de Nyquist. El programa MATLAB 8-8 produce la traza de Nyquist que aparece en la figura 8–40. En esta gráfica, los rangos para el eje real y el eje imaginario se determinan automáticamente.

Si se quiere dibujar la traza de Nyquist usando los rangos determinados en forma manual, por ejemplo de -2 a 2 en el eje real y de -2 a 2 en el eje imaginario, debe introducirse el comando siguiente en la computadora:

```
Programa MATLAB 8–8

num = [0  0  1];
den = [1  0.8  1];
nyquist(num,den)
grid
title('Traza de Nyquist de G(s) = 1/(s^2+0.8s+1)')
```

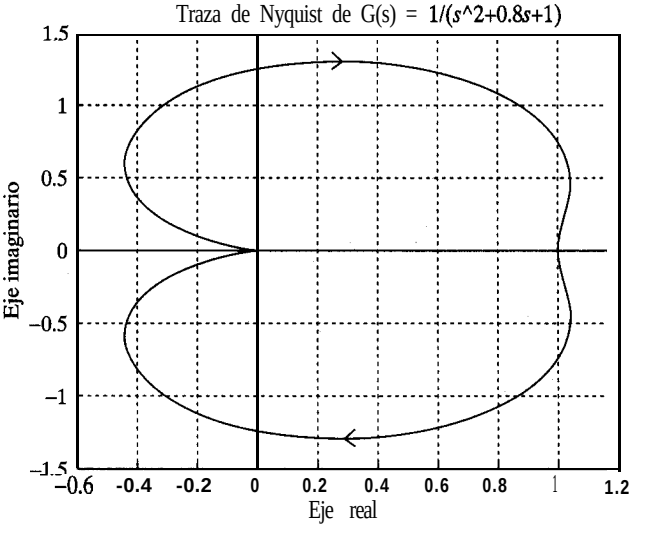


Figura 8-40
Traza de Nyquist de G(s) $= \dfrac{1}{s^2 + 0.8s + 1}$.

```
v = [−2  2  -2  2];
axis(v);
```

o, combinando estas dos líneas en una,

```
axis([−2  2  -2  2]);
```

Véase el programa MATLAB 8-9 y la traza de Nyquist resultante que aparece en la figura 8–41.

```
Programa MATLAB 8–9

% ---------- Traza de Nyquist ----------

num = [0  0  1];
den = [1  0.8  1];
nyquist(num,den)
v = [−2  2  −2  2]; axis(v)
grid
title('Traza de Nyquist de G(s) = 1/(s^2 + 0.8s + 1)')
```

Advertencia. Si se dibuja una traza de Nyquist, en la que una operación de MATLAB implica "dividir entre 0", la traza de Nyquist puede resultar errónea. Por ejemplo, si la función de transferencia G(s) se obtiene mediante

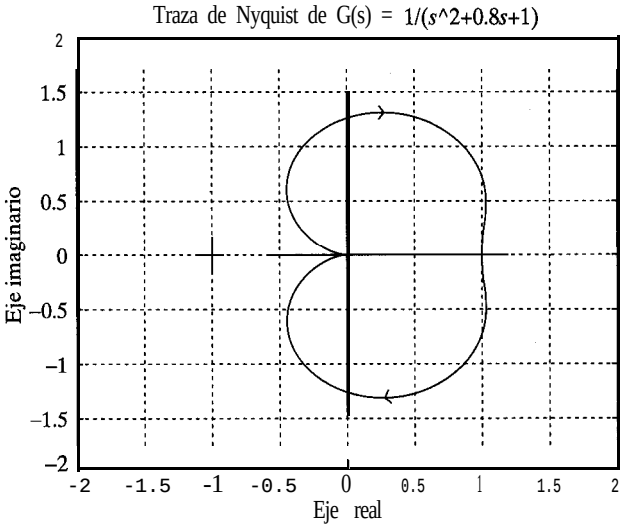


Figura 8-41
Traza de Nyquist de G(s) $= \dfrac{1}{s^2 + 0.8s + 1}$.

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 1)}$$

entonces, el comando MATLAB

```
num = [0 0 1];
den = [1 1 0];
nyquist(num,den)
```

produce una traza de Nyquist errónea. Un ejemplo de una traza de Nyquist errónea aparece en la figura 8-42. Si una traza de Nyquist como ésta aparece en la computadora, puede corregirse especificando el eje (v). Por ejemplo, si introducimos en la computa; dora el comando de axis

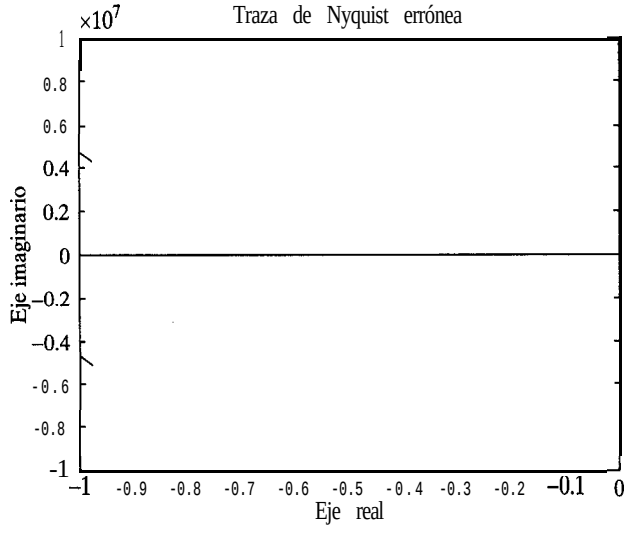


Figura 8-42
Traza de Nyquist errónea.

```
v = [−2 2−5 5]; axis(v)
```

se obtiene una traza de Nyquist correcta. Véase el ejemplo 8–10.

EJEMPLO 8-10 Dibuje una traza de Nyquist para la siguiente G(s):

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

El programa MATLAB 8-10 producirá una traza de Nyquist correcta en la computadora aunque aparezca un mensaje de advertencia "Divide by zero" (dividir entre 0). La traza de Nyquist resultante aparece en la figura 8-43.

Programa MATLAB 8–10

```
% ---------- Traza de Nyquist ----------
num = [0  0  1];
den = [1  1  0];
nyquist(num,den)
v = [−2  2  −5  5]; axis(v)
grid
title('Traza de Nyquist de G(s) = 1/[s(s + 1)]')
```

Observe que la traza de Nyquist de la figura 8–43 incluye los lugares geométricos para $\omega > 0$ y $\omega < 0$. Si queremos dibujar la traza de Nyquist sólo para la región de frecuencia positiva ($\omega > 0$), necesitamos usar el comando

```
[re,im,w] = nyquist(num,den,w)
```

El programa MATLAB 8-11 usa este comando nyquist. La traza de Nyquist resultante se presenta en la figura 8–44.

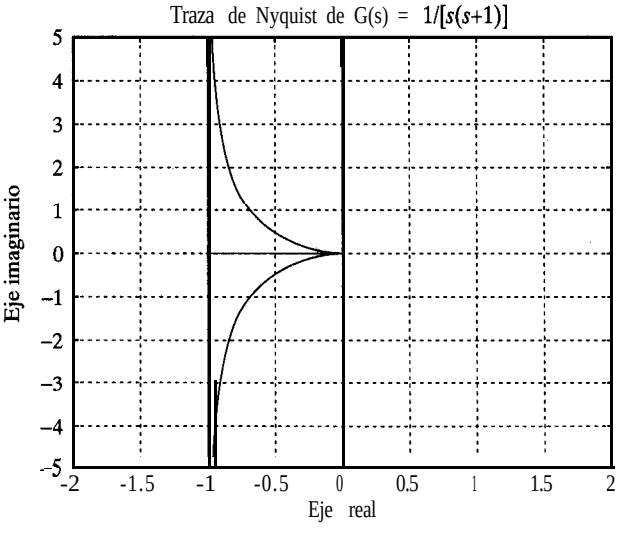


Figura 8-43
Traza de Nyquist de $G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$.

```
Programa MATLAB 8–11

% ---------- Traza de Nyquist ----------

num = [0   0   1];
den = [1   1   0];
w = 0.1:0.1:100;
[re,im,w] = nyquist(num,den,w);
plot(re,im)
v = [−2   2   −5   5]; axis(v)
grid
title('Traza de Nyquist de G(s) = 1/[s(s + 1)]')
xlabel('Eje real')
ylabel('Eje imaginario')
```

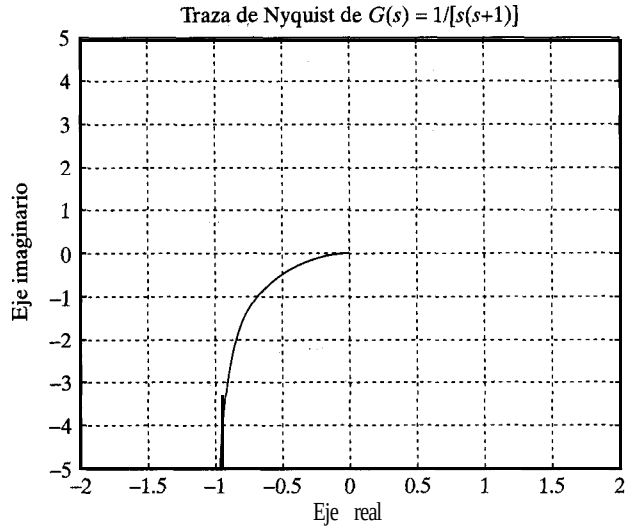


Figura 8-44
Traza de Nyquist de $G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$.

Obtención de trazas de Nyquist de un sistema definido en el espacio de estados. Considere el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

en donde $\mathbf{x}$ = vector de estado (vector n)
y = vector de salida (vector m)
u = vector de control (vector r)
A = matriz de estado (matriz n X n)
B = matriz de control (matriz n X r)
C = matriz de salida (matriz m X n)
D = matriz de transmisión directa (matriz m X r)

Las trazas de Nyquist para este sistema se obtienen mediante el comando

```
nyquist(A,B,C,D)
```

Este comando produce una serie de trazas de Nyquist, una para cada combinación de entrada y salida del sistema. El rango de frecuencia se determina automáticamente.

El comando

```
nyquist(A,B,C,D,iu)
```

produce una traza de Nyquist a partir de la única entrada iu para todas las salidas del sistema, con el rango de frecuencia determinado automáticamente. La iu escalar es un índice dentro de las entradas del sistema y especifica cuál entrada debe usarse para la respuesta en frecuencia.

El comando

```
nyquist(A,B,C,D,iu,w)
```

usa el vector de frecuencia w proporcionado por el usuario. El vector w especifica las frecuencias, en radianes por segundo, en las cuales debe calcularse la respuesta en frecuencia.

EJEMPLO 8-11 Considere el sistema definido mediante

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -25 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 25\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + [0]u$$

Dibuje una traza de Nyquist.

Este sistema tiene una sola entrada u y una sola salida y. La traza de Nyquist se obtiene introduciendo el comando

```
nyquist(A,B,C,D)
```

o bien

```
nyquist(A,B,C,D,1)
```

El programa MATLAB 8-12 producirá la traza de Nyquist. (Observe que el mismo resultado se obtiene con cualquiera de estos comandos.) La figura 8–45 muestra la traza de Nyquist producida por el programa MATLAB 8-12.

Programa MATLAB 8–12

```
A = [0   1;-25   -4];
B = [0;25];
C = [1   0];
D = [0];
nyquist(A,B,C,D)
grid
title('Traza de Nyquist')
```

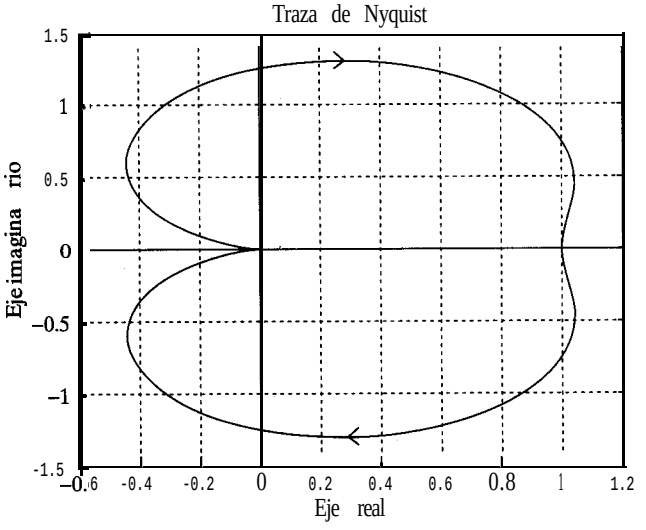


Figura 8-45
Baza de Nyquist del sistema considerado en el ejemplo 8-11.

EJEMPLO 8-12 Considere el sistema definido mediante

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -1\\ 6.5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

Este sistema contiene dos entrada y dos salidas. Hay cuatro relaciones senoidales salida-entrada: $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$, $Y_2(j\omega)/U_1(j\omega)$, $Y_1(j\omega)/U_2(j\omega)$ y $Y_2(j\omega)/U_2(j\omega)$. Dibuje las trazas de Nyquist para el sistema. (Cuando se considera la entrada u_1, suponemos que la entrada u_2 es cero y viceversa.)

Las cuatro trazas de Nyquist individuales se obtienen a partir del comando

```
nyquist(A,B,C,D)
```

El programa MATLAB 8-13 produce las cuatro trazas de Nyquist, mismas que se presentan en la figura 8-46.

Programa MATLAB 8-13

```
A = [-1 -1; 6.5 0];
B = [1 1; 1 0];
C = [1 0; 0 1];
D = [0 0; 0 0];
nyquist(A,B,C,D)
```

8-6 TRAZAS DE MAGNITUD LOGARÍTMICA CONTRA LA FASE

Otro enfoque para representar gráficamente la característica de la respuesta en frecuencia es usar la traza de la magnitud logarítmica contra la fase, que es una traza de la magnitud logarítmica en decibeles contra el ángulo de fase o el margen de fase para un rango de frecuencia que interesa. [El margen de fase es la diferencia entre el ángulo de fase real ϕ y

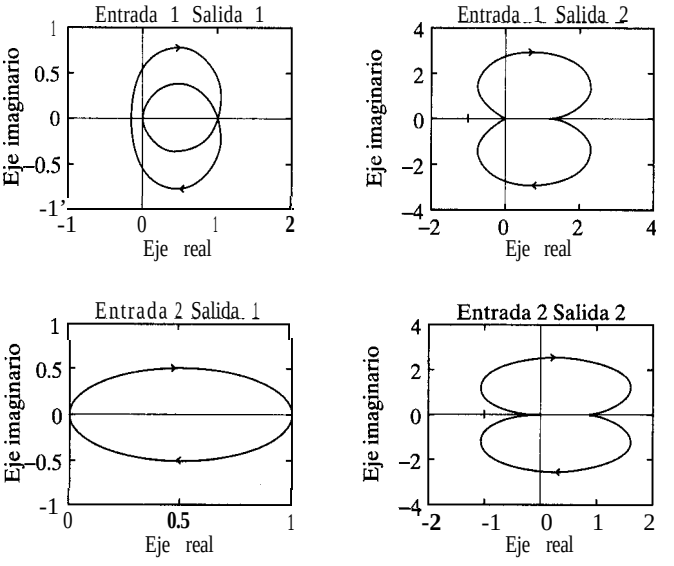


Figura 8–46
Traza de Nyquist del sistema considerado en el ejemplo 8–12.

-180"; es decir, $\phi - (-180") = 180" + \phi$.] La curva se gradúa en términos de la frecuencia ω. Estas trazas de la magnitud logarítmica contra la fase se denominan trazas de Nichols.

En las trazas de Bode, las características de la respuesta en frecuencia de $G(j\omega)$ aparecen en papel semilogarítmico mediante dos curvas separadas, la curva de magnitud logarítmica y la curva de ángulo de fase; en la traza de magnitud logarítmica contra la fase, en cambio, las dos curvas de las trazas de Bode se combinan en una. La traza de la magnitud logarítmica contra la fase se construye fácilmente si se leen los valores de la magnitud logarítmica y del ángulo de fase de las trazas de Bode. Observe que en la traza de magnitud logarítmica contra la fase, un cambio en la constante de ganancia de $G(j\omega)$ simplemente altera la curva hacia arriba (al incrementar la ganancia) o hacia abajo (al decrementar la ganancia), pero que la forma de la curva permanece igual.

Las ventajas de la traza de magnitud logarítmica contra la fase son que la estabilidad relativa del sistema en lazo cerrado se determina con rapidez y que la compensación se obtiene con facilidad.

Las trazas de magnitud logarítmica contra la fase para la función de transferencia senoidal $G(j\omega)$ y $1/G(j\omega)$ tienen una inclinación simétrica con respecto al origen, dado que

$$\left|\frac{1}{G(j\omega)}\right| \text{en dB} = -\left|G(j\omega)\right| \text{ en dB}$$

y

$$\angle\frac{1}{G(j\omega)} = -\angle G(j\omega)$$

La figura 8-47 compara las curvas de respuesta en frecuencia de

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)}$$

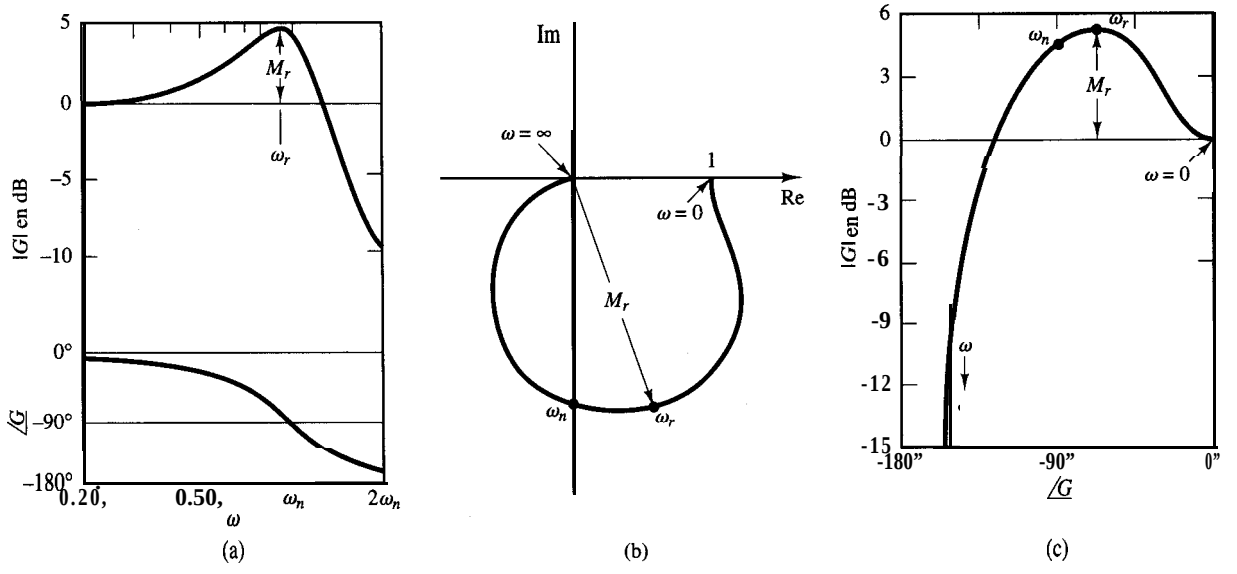


Figura 8-47
Tres representaciones de respuesta en frecuencia de $\dfrac{1}{1 + 2\zeta\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$, para $\zeta > 0$.

(a) Trazas de Bode; (b) traza polar; (c) traza de magnitud logarítmica contra la fase.

en tres diferentes representaciones. En la traza de magnitud logarítmica contra la fase, la distancia vertical entre los puntos $\omega = 0$ y $\omega = \omega_r$, en donde ω_r es la frecuencia de resonancia, es el valor pico de $G(j\omega)$, en decibeles.

Dado que las características de magnitud logarítmica y de ángulo de fase de las funciones de transferencia básicas se han analizado con detalle en las secciones 8-2 y 8-3, aquí será suficiente con proporcionar ejemplos de algunas trazas de magnitud logarítmica contra la fase. La tabla 8-2 contiene tales ejemplos.

8-7 CRITERIO DE ESTABILIDAD DE NYQUIST

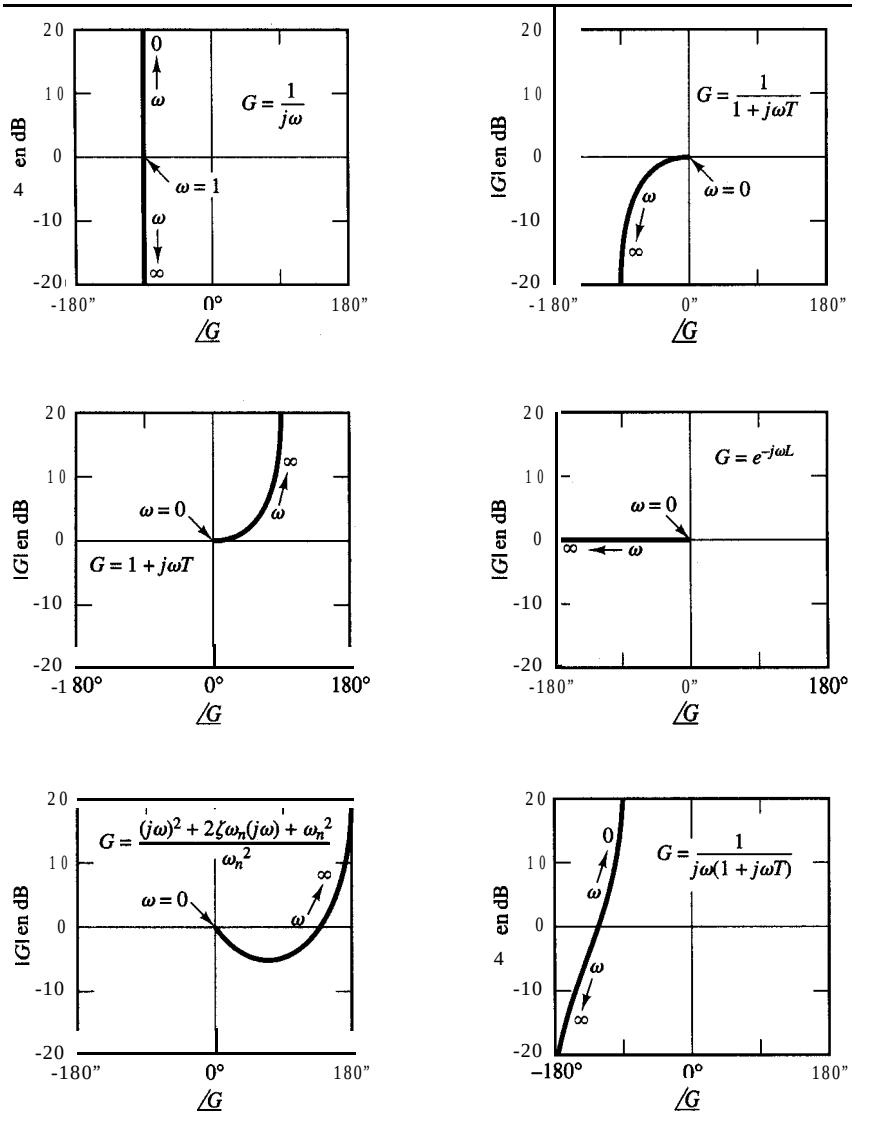
Esta sección presenta el criterio de estabilidad de Nyquist y su base matemática. Considere el sistema en lazo cerrado de la figura 8-48. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Para la estabilidad, todas las raíces de la ecuación característica

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

Tabla 8-2 Trazas de la magnitud logarítmica contra la fase de funciones de transferencia simples



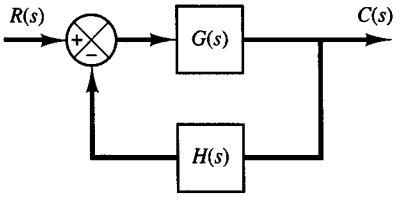


Figura 8–48
Sistema en lazo cerrado.

debep estar en el semiplano izquierdo del plano s. [Se debe señalar que, aunque los polos y ceros de la función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$ pueden estar en el semiplano derecho del plano s, el sistema sólo es estable si todos los polos de la función de transferencia en lazo cerrado (es decir, las raíces de la ecuación característica) están en el semiplano izquierdo del plano s.] El criterio de estabilidad de Nyquist relaciona la respuesta en frecuencia en lazo abierto $G(j\omega)H(j\omega)$ con el número de ceros y polos de $1 + G(s)H(s)$ que se encuentran en el semiplano derecho del plano s. Este criterio, obtenido por H. Nyquist, es útil en la ingeniería de control, debido a que permite determinar gráficamente la estabilidad absoluta del sistema en lazo cerrado a partir de las curvas de respuesta en frecuencia en lazo abierto, sin que sea necesario determinar los polos en lazo cerrado. Para el análisis de estabilidad se usan tanto las curvas de respuesta en frecuencia en lazo abierto obtenidas en forma analítica, como las obtenidas en forma experimental. Es decir conveniente pues, al diseñar un sistema de control, suele suceder que se desconocen las expresiones matemáticas para algunos de los componentes y sólo se cuenta con sus datos de respuesta en frecuencia.

El criterio de estabilidad de Nyquist se basa en un teorema de la teoría de la variable compleja. Para comprenderlo, analizaremos primero el mapeo de los contornos en el plano complejo.

Supondremos que la función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$ se representa como un cociente de polinomios en s. Para un sistema que puede materializarse, el grado del polinomio del denominador de la función de transferencia en lazo cerrado debe ser mayor o igual que el del polinomio del denominador. Esto significa que el límite de $G(s)H(s)$, cuando s tiende a infinito, es cero o una constante para cualquier sistema que pueda materializarse.

Estudio preliminar. La ecuación característica del sistema de la figura 8-48 es

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$$

Demostraremos que para una trayectoria cerrada continua determinada en el plano s, que no pasa por ningún punto singular, le corresponde una curva cerrada en el plano F(s). El número y la dirección de los encierros del origen del plano $F(s)$ para la curva cerrada representan una función en particular importante en lo que sigue, pues después correlacionaremos el número y la dirección de los encierros con la estabilidad del sistema.

Por ejemplo, considere la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s)H(s) = \frac{6}{(s + 1)(s + 2)}$$

La ecuación característica es

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{6}{(s + 1)(s + 2)}$$

$$= \frac{(s + 1.5 + j2.4)(s + 1.5 - j2.4)}{(s + 1)(s + 2)} = 0$$

La función $F(s)$ es analítica en todas las partes del planos, excepto en sus puntos singulares. A cada punto de análisis en el plano s le corresponde un punto en el plano F(s); por ejemplo, si $s = 1 + j2$, entonces $F(s)$ se convierte en

$$F(1 + j2) = 1 + \frac{6}{(2 + j2)(3 + j2)} = 1.115 - j0.577$$

Así, el punto $s = 1 + j2$ en el plano s se mapea en el punto 1.115 – jo.577 en el plano F(s).

En esta forma, como se planteó antes, a determinada trayectoria cerrada continua en el plano s, que no pase por ningún punto singular, le corresponde una curva cerrada en el plano F(s). La figura 8–49(a) muestra mapeos conformes dentro del plano $F(s)$ de las líneas $\omega = 0, 1, 2, 3$ y las líneas $\sigma = 1, 0, -1, -2, -3, -4$ en la mitad superior del plano F(s). Por ejemplo, la líneas $= j\omega$ en la mitad superior del planos $(\omega \geq 0)$ se mapea dentro de la curva representada por $\sigma = 0$ en el plano F(s). La figura 8–49(b) muestra mapeos conformes de las líneas $\omega = 0, -1, -2, -3$ y las líneas $\sigma = 1, 0, -1, -2, -3, -4$ en la mitad inferior del plano s dentro del plano F(s). Observe que, para una σ determinada, la curva de frecuencias negativas es simétrica con respecto al eje real con la curva para frecuencias positivas. Remitiéndonos a las figuras 8–49(a) y (b), vemos que, para la trayectoria ***ABCD*** en el plano s recorrida en el sentido de las manecillas del reloj, la curva correspondiente en el plano $F(s)$ es ***A'B 'C'D '***. Las flechas en las curvas indican las direcciones del recorrido. Asimismo, la trayectoria ***DEFA*** en el plano s se mapea dentro de la curva ***D 'E'F'A*** en el plano $F(s)$. Debido a la propiedad de mapeos conformes, los ángulos correspondientes en el plano s y en el plano ***F(s)*** son iguales y tienen el mismo sentido. [Por ejemplo, dado que las líneas ***AB y BC se*** cortan en un ángulo recto en el plano s, las curvas ***A 'B*** y ***B*** 'C' también se cortan en ángulo recto en el punto ***B'*** en el plano $F(s)$.] Remitiéndonos a la figura 8–49(c), vemos que, en el contorno cerrado ***ABCDEFA*** en el plano s, la variable s empieza en el punto ***A*** y supone valores en esta trayectoria en sentido de las manecillas del reloj hasta que regresa al punto inicial. La curva correspondiente en el plano ***F(s)*** se representa como ***A 'B 'C'D 'E'F'A '***. Si definimos el área de la derecha de este contorno, como su interior, cuando un punto representativo s se mueve en el sentido de las manecillas del reloj, y el área de la izquierda como el exterior, el área sombreada de la figura 8–49(c) está encerrada por el contorno ***ABCDEFA*** y está dentro de él. En la figura 8–49(c) se observa que, cuando el contorno que está en el plano s encierra dos polos de ***F(s),*** el lugar geométrico de ***F(s)*** encierra el origen del plano ***F(s)*** dos veces en sentido contrario a las manecillas del reloj.

La cantidad de encierros del origen del plano ***F(s)*** depende del contorno cerrado en el plano s. Si este contorno encierra dos ceros y dos polos de ***F(s),*** el lugar geométrico de ***F(s)*** correspondiente no encierra el origen, como se aprecia en la figura 8–49(d). Si este contorno encierra sólo un cero, el lugar geométrico correspondiente de ***F(s)*** encierra el origen una vez en sentido de las manecillas del reloj. Esto se aprecia en la figura 8–49(e). Por último, si el contorno cerrado en el plano s no encierra ceros ni polos, el lugar geométrico de $F(s)$ no encierra en absoluto el origen del plano ***F(s).*** Esto también se observa en la figura 8–49(e).

Observe que, para cada punto en el plano s, excepto para los puntos singulares, sólo hay un punto correspondiente en el plano ***F(s);*** es decir, el mapeo del plano s dentro del plano ***F(s)*** es uno a uno. Sin embargo, tal vez el mapeo del plano ***F(s)*** dentro del plano s no sea uno a uno, por lo que un punto determinado en el plano ***F(s)*** puede corresponder a más de un punto en el plano s. Por ejemplo, el punto ***B '*** en el plano ***F(s)*** de la figura 8–49(d) corresponde a los puntos $(-3, 3)$ y (0, -3) en el plano s.

A partir del análisis anterior, observamos que la dirección del encierro en el origen del plano $F(s)$ depende de si el contorno en el plano s encierra un polo o un cero. Observe que la ubicación de un polo o un cero en el planos, ya sea en su semiplano derecho o en el semiplano izquierdo, no produce ninguna diferencia, pero el que se encierre un polo o un cero sí la genera. Si el contorno en el plano s encierra k ceros y k polos $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, es decir, cantidades iguales de ellos, la curva cerrada correspondiente en el plano ***F(s)*** no encerrará

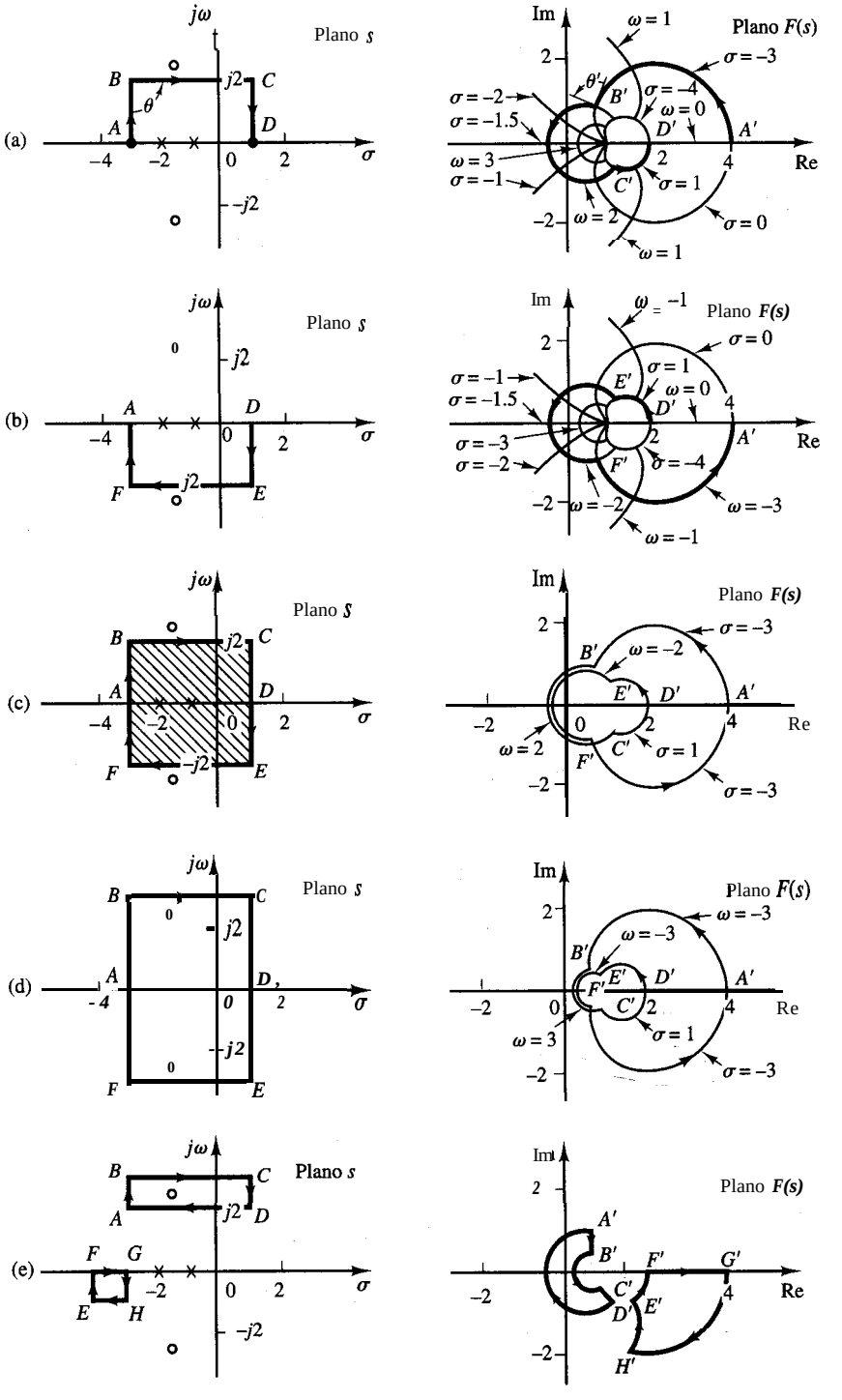


Figura 8-49
Mapeos conformes de las retículas en el plano *s* dentro del plano F(s).

el origen del plano F(s). El análisis anterior es una explicación gráfica del teorema del mapeo, que es la base del criterio de estabilidad de Nyquist.

Teorema del mapeo. Suponga que $F(s)$ es el cociente de dos polinomios en s. Suponga también que P es el número de polos y Z el número de ceros de $F(s)$ que se encuentran en cierto contorno cerrado en el plano s, considerada una multiplicidad de polos y ceros. Suponga, por último, que este contorno es tal que no pasa a través de ningún polo ni cero de F(s). Este contorno cerrado en el plano s se mapea después dentro del plano $F(s)$ como una curva cerrada. El número total N de encierros del origen del plano $F(s)$ en el sentido de las manecillas del reloj, conforme un punto representativo traza el contorno completo en el sentido de las manecillas del reloj, es igual a $Z - P$. (Observe que, mediante este teorema del mapeo, no se encuentra el número de ceros y de polos sino su diferencia.)

No presentaremos una prueba formal de este teorema, pues la dejaremos para el problema A-8-10. Observe que un número positivo N indica que hay más ceros que polos en la función $F(s)$ y un número N negativo indica que hay más polos que ceros. En las aplicaciones de un sistema de control, el número P se determina con facilidad para $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ a partir de la función $G(s)H(s)$. Por tanto, si N se determina a partir de la gráfica de F(s), es fácil determinar el número de ceros en el contorno cerrado en el plano s. Observe que las formas exactas del contorno en el planos y el lugar geométrico de $F(s)$ no son importantes en lo que respecta a los encierros del origen, dado que éstos sólo dependen de que se encierren los polos y/o los ceros de $F(s)$ mediante el contorno en el plano s.

Aplicación del teorema del mapeo al análisis de la estabilidad de los sistemas en lazo cerrado. Para analizar la estabilidad de los sistemas de control lineales, suponemos que el contorno cerrado en el plano s encierra todo el semiplano derecho de éste. El contorno está formado por el eje $j\omega$ completo, de $\omega = -\infty$ a $+\infty$, y una trayectoria semicircular de radio infinito en el semiplano derecho del plano s. Dicho contorno se conoce como trayectoria de Nyquist. (La trayectoria se forma en el sentido de las manecillas del reloj.) La trayectoria de Nyquist encierra el semiplano derecho del plano s así como todos los ceros y polos de $1 + G(s)H(s)$ que tienen partes reales positivas. [Si no hay ceros de $1 + G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s, no hay ahí polos en lazo cerrado, y el sistema es estable.] Es necesario que el contorno cerrado, o la trayectoria de Nyquist, no pase por ningún cero ni polo de $1 + G(s)H(s)$. Si $G(s)H(s)$ tiene uno o más polos en el origen del plano s, el mapeo del puntos = 0 se vuelve indeterminado. En estos casos, se evita pasar por el origen mediante una desviación. (Más adelante se ofrece un análisis detallado de este caso especial.)

Si el teorema del mapeo se aplica al caso especial en el que $F(s)$ es igual a $1 + G(s)H(s)$, podemos plantear el siguiente enunciado: si el contorno cerrado en el plano s encierra el semiplano derecho del planos, como se aprecia en la figura 8-50, el número de ceros en el semiplano derecho del plano de la función $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ es igual al número de polos de la función $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s, más el número de encierros del origen del plano $1 + G(s)H(s)$ en el sentido de las manecillas del reloj por la curva cerrada correspondiente en este último plano.

Debido a la condición supuesta de que

$$\lim_{s\to\infty} [1 + G(s)H(s)] = \text{constante}$$

la función de $1 + G(s)H(s)$ permanece constante conforme s recorre el semicírculo de radio infinito. Por esta razón, se determina si el lugar geométrico de $1 + G(s)H(s)$ encierra el

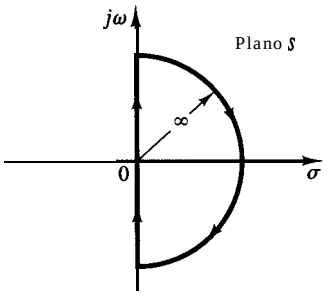


Figura 8–50
Contorno cerrado en el plano s.

origen del plano $1 + G(s)H(s)$ considerando sólo una parte del contorno cerrado en el plano s, es decir, el eje $j\omega$. Encerrar el origen, si llega a suceder, sólo ocurre mientras un punto representativo se mueve de $-j\infty$ a $+j\infty$ a lo largo del eje jo, siempre y cuando no se encuentren ceros ni polos sobre el eje $j\omega$.

Observe que la parte del contorno $1 + G(s)H(s)$ de $\omega = -\infty$ a $\omega = \infty$ es simplemente $1 + G(j\omega)H(j\omega)$. Dado que $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ es la suma de vectores del vector unitario y el vector $G(j\omega)H(j\omega)$, $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ es idéntico al vector dibujado del punto $-1 + j0$ al punto terminal del vector $G(j\omega)H(j\omega)$, como se aprecia en la figura 8-51. Encerrar el origen mediante la gráfica de $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ es equivalente a encerrar el punto $-1 + j0$ mediante el puro lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$. Por tanto, la estabilidad del sistema en lazo cerrado se averigua examinando los encierros del punto $-1 + j0$ mediante el lugar geométrico de $G(j\omega)H(j\omega)$. El numero de encierros en el sentido de las manecillas del reloj del punto $-1 + j0$ se encuentra dibujando un vector del punto $-1 + j0$ al lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$, a partir de $\omega = -\infty$, pasando por $\omega = 0$ y hasta llegar a $\omega = +\infty$, o bien contando el número de rotaciones en el sentido de las manecillas del reloj del vector.

Es sencillo graficar $G(j\omega)H(j\omega)$ para la trayectoria de Nyquist. El mapeo del eje $j\omega$ negativo es la imagen reflejada del mapeo del eje jo positivo con respecto al eje real. Es decir, la gráfica de $G(j\omega)H(j\omega)$ y la gráfica de $G(-j\omega)H(-j\omega)$ son simétricas con respecto al eje real. El semicírculo con radio infinito se mapea en el origen del plano GH o en un punto del eje real del plano GH.

En el análisis anterior, se ha supuesto que $G(s)H(s)$ es el cociente de dos polinomios en s. Por tanto, el retardo de transporte e^{-Ts} se ha excluido del análisis. Sm embargo, observe que un análisis similar es pertinente para los sistemas con un retardo de transporte, aunque aquí no se ha aportado una prueba de esto. La estabilidad de un sistema con retardo de transporte se determina a partir de las curvas de respuesta en frecuencia en lazo abierto exa-

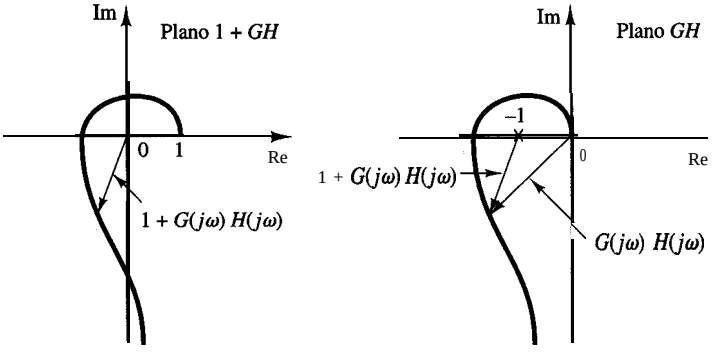


Figura 8–51
Gráficas de $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ en el plano $1 + GH$ y en el plano GH.

minando el número de encierros en el punto $-1 + j0$, al igual que en el caso de un sistema cuya función de transferencia en lazo abierto es un cociente de dos polinomios en s.

Criterio de estabilidad de Nyquist. El análisis anterior, en el que se utilizaron los encierros del punto $-1 + j0$ mediante el lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$, se resume en el siguiente criterio de estabilidad de Nyquist:

> ***Criterio de estabilidad de Nyquist [para un caso especial cuando $G(s)H(s)$ no tiene polos ni ceros sobre el eje jw.]:*** en el sistema de la figura 8-48, si la función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$ tiene k polos en el semiplano derecho del plano s y $\lim_{s\to\infty} G(s)H(s)$ = constante, para la estabilidad, el lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$, conforme ω **varía** de $-\infty$ a ∞, debe encerrar k veces el punto $-1 + j0$ en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Observaciones sobre el criterio de estabilidad de Nyquist

1. Este criterio se expresa como

$$Z = N + P$$

en donde Z = número de ceros de $1 + G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s
N = número de encierros en el sentido de las manecillas del reloj del punto $-1 + j0$
P = número de polos de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s

Si P no es cero, para un sistema de control estable, debemos tener Z = 0 o $N = -P$, lo cual significa que debemos tener P encierros del punto $-1 + j0$ en el sentido de las manecillas del reloj.

Si $G(s)H(s)$ no tiene polos en el semiplano derecho del plano s, entonces Z = N. Por tanto, para la estabilidad no se debe encerrar el punto $-1 + j0$ mediante el lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$. En este caso no es necesario considerar el lugar geométrico para el eje jo completo, sino sólo para la parte de frecuencia positiva. La estabilidad de este sistema se determina observando si el punto $-1 + j0$ se encierra mediante la traza de Nyquist de $G(j\omega)H(j\omega)$. La región encerrada mediante la traza de Nyquist aparece en la figura 8-52. Para la estabilidad, el punto $-1 + j0$ debe encontrarse fuera de la región sombreada.

2. Debe tenerse cuidado en el momento de probar la estabilidad de sistemas multilazo, dado que pueden incluir polos en el semiplano derecho del plano s. (Observe que, aunque un lazo interno puede ser inestable, el sistema en lazo cerrado completo se estabiliza mediante un diseño adecuado.) Una simple revisión de los encierros del punto $-1 + j0$ median-

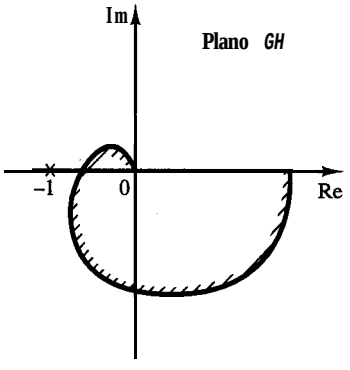


Figura 8–52
Región encerrada mediante una traza de Nyquist.

te el lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$ no es suficiente para detectar la inestabilidad en los sistemas multilazo. Sin embargo, en tales casos, si un polo de $1 + G(s)H(s)$ está en el semiplano derecho del plano s, se determina con facilidad aplicando el criterio de estabilidad de Routh al denominador de $G(s)H(s)$.

Si se incluyen en $G(s)H(s)$ funciones trascendentes, tales como el retardo de transporte e^{-Ts}, deben aproximarse mediante una expansión en serie antes de aplicar el criterio de estabilidad de Routh. En el capítulo 5 se obtuvo la siguiente forma de una expansión en serie de e-r?

$$e^{-Ts} = \frac{1 - \frac{Ts}{2} + \frac{(Ts)^2}{8} - \frac{(Ts)^3}{48} + \cdots}{1 + \frac{Ts}{2} + \frac{(Ts)^2}{8} + \frac{(Ts)^3}{48} + \cdots}$$

Como primera aproximación, sólo tomamos los primeros dos términos del numerador y el denominador, o bien

$$e^{-Ts} \doteq \frac{1 - \frac{Ts}{2}}{1 + \frac{Ts}{2}} = \frac{2 - Ts}{2 + Ts}$$

Esto proporciona una buena aproximación al retardo de transporte para el rango de frecuencia $0 \leq \omega \leq (0.5/T)$. [Observe que la magnitud de $(2 - j\omega T)(2 + j\omega T)$ siempre es unitaria y que el atraso de fase de $(2 - j\omega T)/(2 + j\omega T)$ se aproxima estrechamente al retardo de transporte dentro del rango de frecuencia planteado.]

3. Si el lugar geométrico de $G(j\omega)H(j\omega)$ pasa por el punto -1 + $j0$, entonces los ceros de la ecuación característica, o los polos en lazo cerrado, se ubican sobre el eje $j\omega$. Esto no es conveniente para sistemas de control prácticos Para un sistema en lazo cerrado bien diseñado, ninguna de las raíces de la ecuación característica debe encontrarse sobre el eje jw.

Caso especial cuando $G(s)H(s)$ tiene polos y/o ceros sobre el eje jo. En el análisis anterior, supusimos que la función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$ no tenía polos ni ceros en el origen.Ahora consideraremos el caso en el que $G(s)H(s)$ contiene polos y/o ceros sobre el eje jo.

Dado que la trayectoria de Nyquist no debe pasar por polos o ceros de $G(s)H(s)$, si la función $G(s)H(s)$ tiene polos o ceros en el origen (o sobre el eje $j\omega$ para puntos diferentes del origen), debe modificarse el contorno en el plano s. La forma usual de modificar el contorno cerca del origen es mediante un semicírculo con el radio infinitesimal ϵ, como se aprecia en la figura 8-53. Un punto representativo se mueve a lo largo del eje jo negativo de $-j\infty$ a $j0-$. De $s = j0-$ a $s = j0+$, el punto se mueve a lo largo del semicírculo con radio ϵ (en donde $\epsilon \ll 1$), y después se mueve a lo largo del eje $j\omega$ positivo de jO+ a $j\infty$. A partir de $s = j\infty$, el contorno sigue un semicírculo con radio infinito y el punto representativo regresa al punto inicial. El área que evita el contorno cerrado modificado es muy pequeña y tiende a cero conforme el radio ϵ tiende a cero. Por tanto, todos los polos y ceros en el semiplano derecho del plano s, si existen, están encerrados por este contorno.

Considere, por ejemplo, un sistema en lazo cerrado cuya función de transferencia en lazo abierto se obtiene mediante

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

Los puntos correspondientes a s = jO+ y s = $j0-$ en el lugar geométrico de $G(s)H(s)$ en el plano $G(s)H(s)$ son $-j\infty$ y $j\infty$, respectivamente. En la trayectoria semicircular con radio ϵ (en donde $\epsilon \ll 1$), la variable compleja s se escribe

$$s = \epsilon e^{j\theta}$$

en donde θ varía de -90" a $+90°$. A continuación, $G(s)H(s)$ se convierte en

$$G(\epsilon e^{j\theta})H(\epsilon e^{j\theta}) = \frac{K}{\epsilon e^{j\theta}} = \frac{K}{\epsilon} e^{-j\theta}$$

El valor K/ϵ tiende a infinito conforme ϵ tiende a cero, y $-\theta$ varía de 90" a $-90°$ conforme un punto representativo s se mueve a lo largo del semicírculo. Por tanto, los puntos $G(j0-)H(j0-) = j\infty$ y $G(j0+)H(j0+) = -j\infty$ se unen mediante un semicírculo de radio infinito en el semiplano derecho del plano ***GH.*** La desviación semicircular infinitesimal alrededor del origen se mapea dentro del plano GH como un semicírculo de radio infinito. La figura 8-54 muestra el contorno en el planos y el lugar geométrico $G(s)H(s)$ en el plano ***GH.*** Los puntos ***A, B*** y C en el contorno del plano s se mapean en los puntos respectivos ***A '***, ***B'*** y C' en el lugar geométrico $G(s)H(s)$. Como se observa en la figura 8-54, los puntos ***D, E*** y ***F*** en el semicírculo de radio infinito en el plano s se mapean dentro del origen del plano ***GH.*** Dado que no hay un polo en el semiplano derecho del plano s y el lugar geométrico $G(s)H(s)$ no encierra el punto -1 + $j0$, no hay ceros de la función 1 + $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s. Por tanto, el sistema es estable.

Para una función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$ que contiene un factor $1/s^n$ (en donde $n = 2, 3, \ldots$), la gráfica de $G(s)H(s)$ tiene n semicírculos en el sentido de las manecillas del reloj de radio infinito con respecto al origen, conforme un punto representativo s se mueve a lo largo del semicírculo de radio ϵ (en donde $\epsilon \ll 1$). Por ejemplo, considere la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^2(Ts + 1)}$$

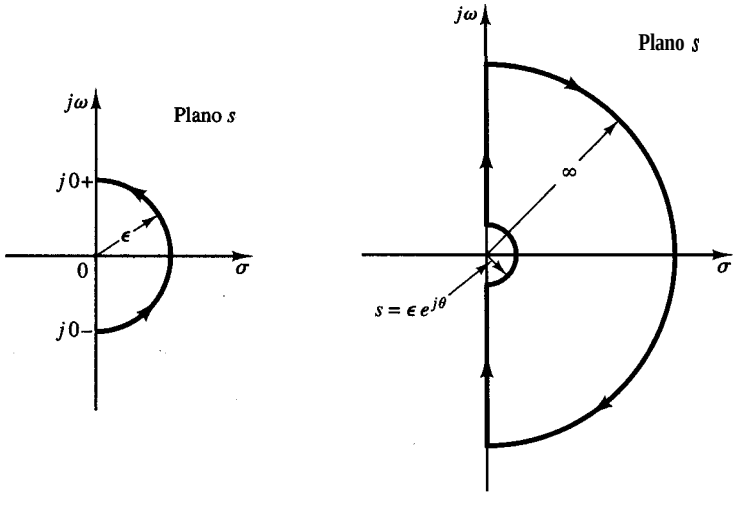


Figura **8–53** Contornos cerrados en el plano s evitando los polos y los ceros en el origen.

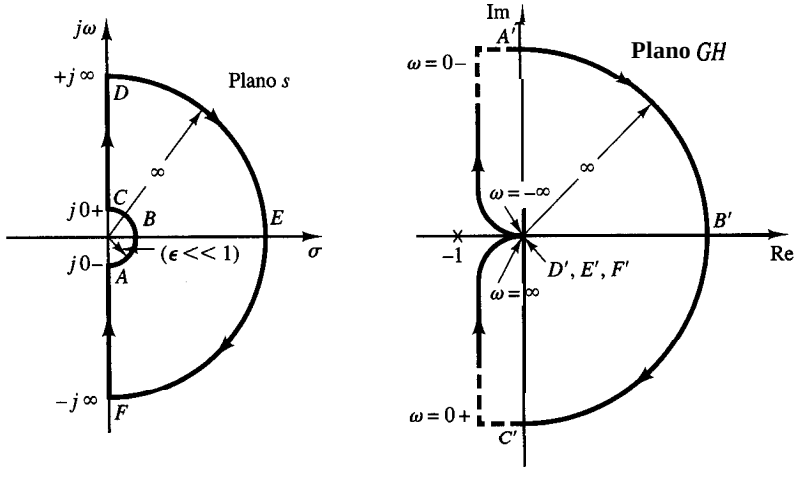


Figura 8–54
Contorno en el plano s y el lugar geométrico $G(s)H(s)$ en el plano GH, en donde $G(s)H(s) = K/[s(Ts + 1)]$.

Así,

$$\lim_{s \to \epsilon e^{j\theta}} G(s)H(s) = \frac{K}{\epsilon^2 e^{2j\theta}} = \frac{K}{\epsilon^2} e^{-2j\theta}$$

Conforme θ varía de -90" a 90" en el planos, el ángulo de $G(s)H(s)$ varía de 180" a $-180°$, como aparece en la figura 8-55. Dado que no hay un polo en el semiplano derecho del plano s y dado que el lugar geométrico encierra el punto -1 + $j0$ dos veces en sentido de las manecillas del reloj, para cualquier valor positivo de K, hay dos ceros de 1 + $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s. Por tanto, este sistema siempre es inestable.

Observe que un análisis similar es necesario si $G(s)H(s)$ contiene polos y/o ceros sobre el eje jo. El criterio de estabilidad de Nyquist se generaliza ahora del modo siguiente:

Criterio de estabilidad de Nyquist ***[para un caso general cuando*** $G(s)H(s)$ ***tiene polos y/o*** ceros ***sobre*** el eje $j\omega$]: en el sistema de la figura 8-48, si la función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$ tiene k polos en el semiplano derecho del plano s, para ser estable, el lugar geométrico $G(s)H(s)$ debe encerrar k veces el punto -1 + $j0$ en

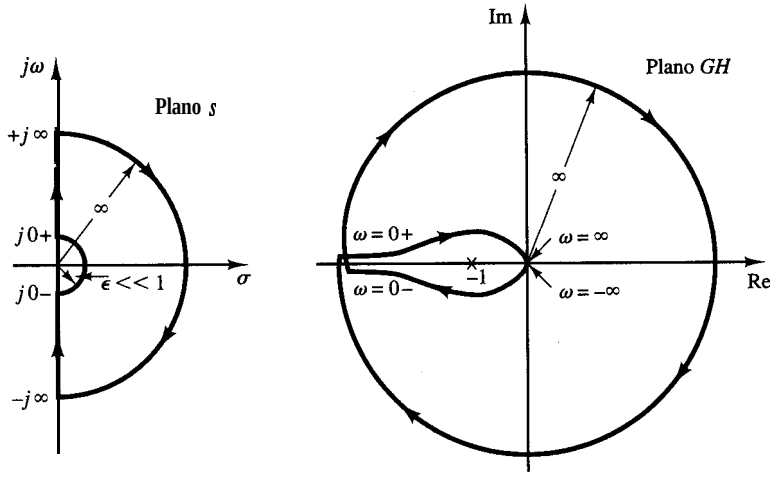


Figura 8–55
Contorno en el plano s y lugar geométrico $G(s)H(s)$ en el plano GH, en donde $G(s)H(s) = K/[s^2(Ts + 1)]$.

sentido contrario a las manecillas del reloj, conforme un punto representativo s se traza en la trayectoria de Nyquist modificada en sentido de las manecillas del reloj.

8-8 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

En esta sección presentaremos varios ejemplos del análisis de estabilidad de los sistemas de control mediante el criterio de estabilidad de Nyquist.

Si la trayectoria de Nyquist en el plano s encierra Z ceros y P polos de $1 + G(s)H(s)$ y no pasa por los polos ni los ceros de $1 + G(s)H(s)$ conforme un punto representativo s se mueve en sentido de las manecillas del reloj a lo largo de la trayectoria de Nyquist, el contorno correspondiente en el plano $G(s)H(s)$ encierra en un círculo $N = Z - P$ veces el punto $-1 + j0$ en sentido de las manecillas del reloj. (Los valores negativos de N implican encierros en sentido contrario de las manecillas del reloj.)

Al examinar la estabilidad de los sistemas de control lineales mediante el criterio de estabilidad de Nyquist, vemos que se pueden presentar tres posibilidades.

1. El punto $-1 + j0$ no está encerrado. Esto implica que el sistema es estable si no hay polos de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s; de lo contrario, el sistema es inestable.
2. El punto $-1 + j0$ queda encerrado una o varias veces en sentido contrario de las manecillas del reloj. En este caso, el sistema es estable si la cantidad de encierros en sentido contrario de las manecillas del reloj es igual a la cantidad de polos $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s; de lo contrario, el sistema es inestable.
3. El punto $-1 + j0$ queda encerrado una o varias veces en sentido de las manecillas del reloj. En este caso el sistema es inestable.

En los ejemplos siguientes, suponemos que todos los valores de la ganancia K y las constantes de tiempo (tales como T, T_1 y T_2) son positivos.

EJEMPLO 8-13 Considere un sistema en lazo cerrado cuya función de transferencia en lazo abierto se obtiene mediante

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

Examine la estabilidad del sistema.

La figura 8-56 contiene una traza de $G(j\omega)H(j\omega)$. Dado que $G(s)H(s)$ no tiene polos en el semiplano derecho del plano s y el punto $-1 + j0$ no está encerrado por el lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$, este sistema es estable para cualesquiera valores positivos de K, T_1 y T_2.

EJEMPLO 8-14 Considere el sistema con la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

Determine la estabilidad del sistema para dos casos: (1) la ganancia K es pequeña, y (2) K es grande.

Las trazas de Nyquist de la función de transferencia en lazo abierto para un valor pequeño de K y un valor grande de K aparecen en la figura 8-57. El número de polos de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s es cero. Por tanto, para que este sistema sea estable, es necesario que $N = Z = 0$ o que el lugar geométrico $G(s)H(s)$ no encierre el punto $-1 + j0$.

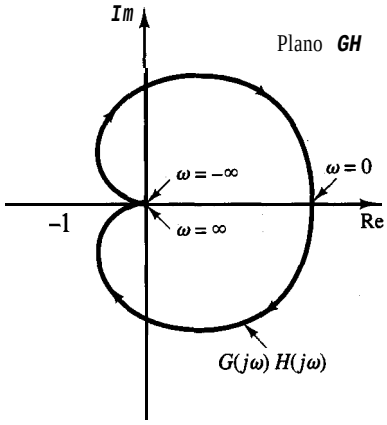


Figura 8–56
Traza polar de $G(j\omega)H(j\omega)$ considerada en el ejemplo 8– 13.

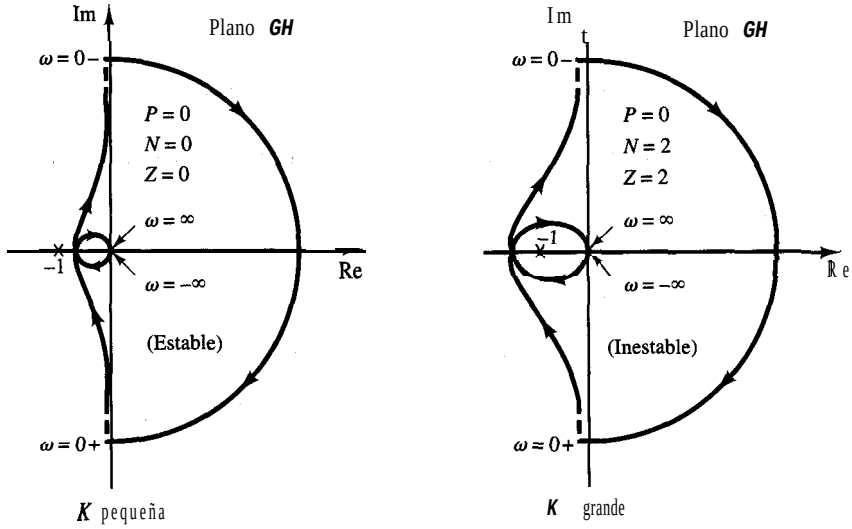


Figura 8–57
Trazas polares del sistema considerado en el ejemplo 8-14.

Para valores pequeños de K, el punto $-1 + j0$ no queda encerrado. Por tanto, este sistema es estable para valores pequeños de K. Para valores grandes de K, el lugar geométrico de $G(s)H(s)$ encierra el punto $-1 + j0$ dos veces en sentido de las manecillas del reloj, lo cual indica que hay dos polos en lazo cerrado en el semiplano derecho del plano s y que el sistema es inestable. (Para lograr una buena precisión, K debe ser grande. Sin embargo, desde el punto de vista de la estabilidad, un valor grande de K provoca una estabilidad deficiente o incluso la inestabilidad. Para obtener un equilibrio entre la precisión y la estabilidad, es necesario incluir una red de compensación en el sistema. Las técnicas de compensación en el dominio de la frecuencia se analizan en el capítulo 9.)

EJEMPLO 8-15 La estabilidad de un sistema en lazo cerrado con la siguiente función de transferencia en lazo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_2 s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)}$$

depende de las magnitudes relativas de T_1 y T_2. Dibuje las trazas de Nyquist y determine la estabilidad del sistema.

La figura 8-58 contiene las gráficas del lugar geométrico $G(s)H(s)$ para los tres casos en que $T_1 < T_2$, $T_1 = T_2$ y $T_1 > T_2$. Para $T_1 < T_2$, el lugar geométrico de $G(s)H(s)$ no encierra el punto $-1 + j0$ y el sistema en lazo cerrado es estable. Para $T_1 = T_2$ el lugar geométrico $G(s)H(s)$ pasa por el punto $-1 + j0$, lo cual indica que hay polos de lazo cerrado sobre el eje $j\omega$. Para $T_1 > T_2$,

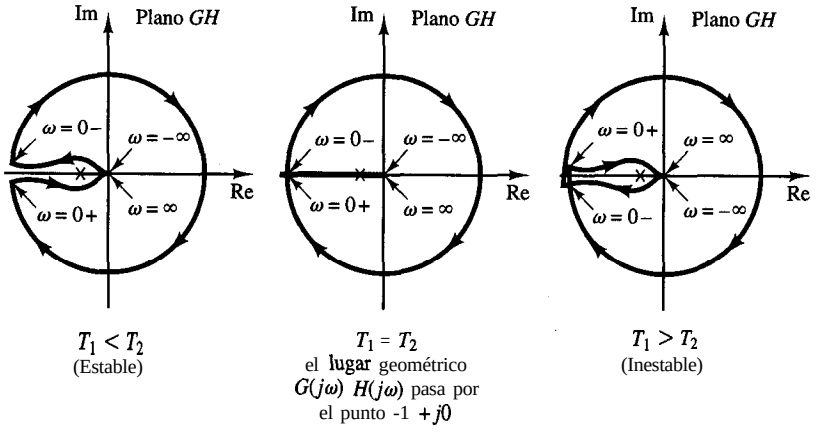


Figura 8–58
Trazas polares del sistema considerado en el ejemplo 8-15.

el lugar geométrico de $G(s)H(s)$ encierra en un círculo el punto -1 + $j0$ dos veces en sentido de las manecillas del reloj. Por tanto, el sistema en lazo cerrado tiene dos polos en lazo cerrado en el semiplano derecho del plano s y el sistema es inestable.

EJEMPLO 8-16 Considere el sistema en lazo cerrado que tiene la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts - 1)}$$

Determine la estabilidad del sistema.

La función $G(s)H(s)$ tiene un polo ($s = 1/T$) en el semiplano derecho del plano s. Por tanto, $T = 1$. La traza de Nyquist de la figura 8-59 indica que la traza $G(s)H(s)$ encierra el punto -1 + $j0$ una vez en sentido de las manecillas del reloj. Por tanto, N = 1. Dado que Z = N + P, encontramos que Z = 2. Esto significa que el sistema en lazo cerrado tiene dos polos en lazo cerrado en el semiplano derecho del plano s y que es inestable.

EJEMPLO 8-17 Investigue la estabilidad de un sistema en lazo cerrado con la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + 3)}{s(s - 1)} \qquad (K > 1)$$

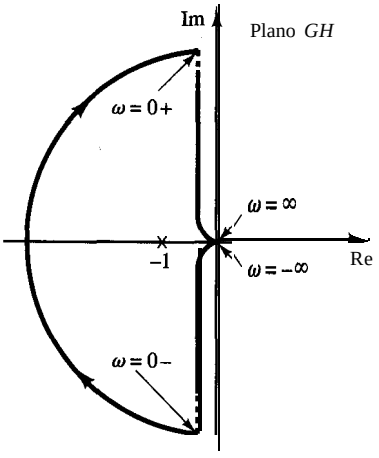


Figura 8–59
Traza polar del sistema considerado en el ejemplo 8-16.

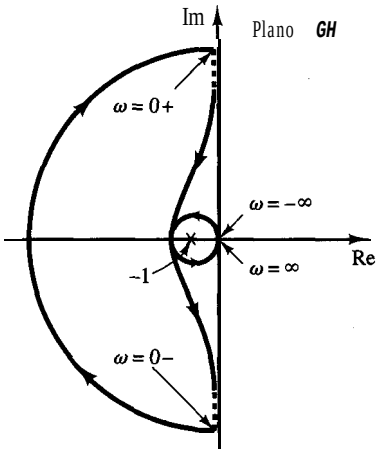


Figura 8–60
Traza polar del sistema considerado en el ejemplo 8-17.

La función de transferencia en lazo abierto tiene un polo (s = 1) en el semiplano derecho del planos, o P = 1. El sistema en lazo abierto es inestable. La traza de Nyquist de la figura 8–60 indica que el lugar geométrico $G(s)H(s)$ encierra el punto $-1 + j0$ una vez en sentido contrario de las manecillas del reloj. Por tanto, N = -1. De esta forma se encuentra que Z es cero a partir de que Z = N + P, lo cual indica que no hay un cero de $1 + G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del planos y que el sistema en lazo cerrado es estable. Éste es uno de los ejemplos para los cuales un sistema en lazo abierto se vuelve estable cuando se cierra el lazo.

Sistemas condicionalmente estables. La figura 8-61 muestra un ejemplo de un lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$ para el cual el sistema en lazo cerrado se vuelve inestable cuando se varía la ganancia en lazo abierto. Si el incremento de la ganancia en lazo abierto es suficiente, el lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$ encierra el punto $-1 + j0$ dos veces, y el sistema se vuelve inestable. Si la ganancia en lazo abierto disminuye lo suficiente, una vez más el lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$encierra el punto -1 + $j0$ dos veces. Para una operación estable del sistema considerado aquí, el punto crítico -1 + $j0$ no debe aparecer en las regiones comprendidas entre OA y BC en la figura 8-61. Un sistema que sólo es estable para rangos limitados del valor de la ganancia en lazo abierto tales que el punto -1 + $j0$ está completamente fuera del lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$es condicionalmente estable.

Un sistema condicionalmente estable es estable para el valor de la ganancia en lazo abierto que se encuentra entre valores críticos, y es inestable si la ganancia en lazo abierto se incrementa o decrementa en forma suficiente. Un sistema semejante se vuelve inestable

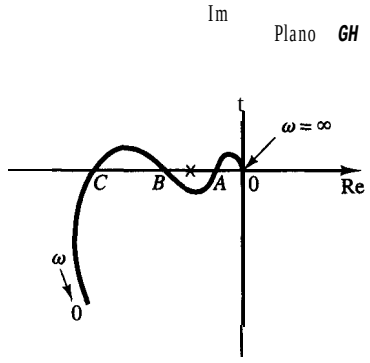


Figura 8-61
Traza polar de un sistema condicionalmente estable.

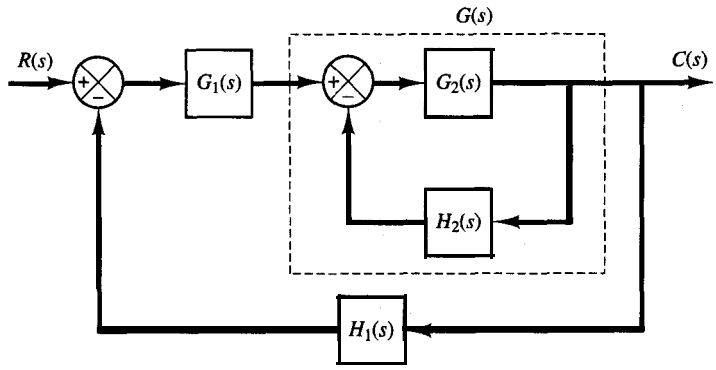


Figura 8-62
Sistema multilazo.

cuando las señales de entrada son grandes, dado que una señal grande puede provocar una saturación, y ésta, a su vez, reduce la ganancia en lazo abierto del sistema. Es aconsejable evitar una situación como ésta.

Sistema multilazo. Considere el sistema de la figura 8-62. Se trata de un sistema multilazo. El lazo interno tiene la función de transferencia

$$\mathbf{G(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)H_2(s)}$$

Si G(s) es inestable, los efectos de la inestabilidad generan uno o más polos en el semiplano derecho del plano s. Entonces, la ecuación característica del lazo interno, $1 + G_2(s)H_2(s) = 0$, tiene uno o más ceros en esta parte del plano. Si $G_2(s)$ y $H_2(s)$ tienen P_1 polos aquí, el numero Z_1 de ceros en el semiplano derecho del plano de $1 + G_2(s)H_2(s)$ se encuentra a partir de $Z_1 = N_1 + P_1$, en donde N_1 es el número de encierros en sentido de las manecillas del reloj del punto $-1 + j0$ mediante el lugar geométrico $G_2(s)H_2(s)$. Dado que la función de transferencia en lazo abierto de todo el sistema se obtiene mediante $G_1(s)G(s)H_1(s)$, la estabilidad de este sistema en lazo cerrado se encuentra a partir de la traza de Nyquist de $G_1(s)G(s)H_1(s)$ y el conocimiento de los polos del semiplano derecho del plano de $G_1(s)G(s)H_1(s)$.

Observe que, si se elimina un lazo de realimentación por medio de reducciones de un diagrama de bloques, existe una posibilidad de que se introduzcan polos inestables; si se elimina la rama de la trayectoria directa por medio de reducciones del diagrama de bloques, existe una posibilidad de que se introduzcan ceros en el semiplano derecho del plano por tanto, debemos considerar todos los polos y ceros en el semiplano derecho del plano conforme aparecen de las reducciones de lazos subsidiarios. Este conocimiento es necesario para determinar la estabilidad de sistemas multilazo.

EJEMPLO 8-18 Considere el sistema de control de la figura 8-63. El sistema contiene dos lazos. Determine el rango de la ganancia K para la estabilidad del sistema mediante el criterio de estabilidad de Nyquist. (La ganancia K es positiva.)

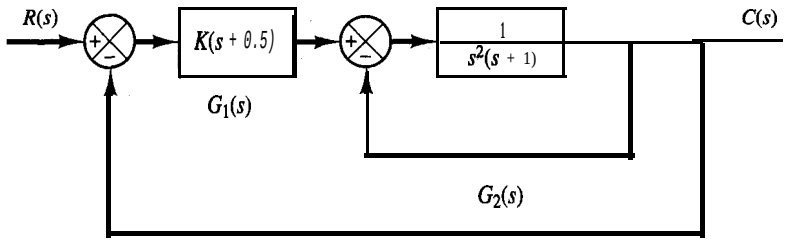


Figura 8-63
Sistema de control.

Para examinar la estabilidad del sistema de control, necesitamos trazar el lugar geométrico de Nyquist de G(s), en donde

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)$$

Sin embargo, no se conocen los polos de G(s) en este punto. Por tanto, si hay polos en el semiplano derecho del plano s es necesario examinar el lazo menor. Esto es fácil con el criterio de estabilidad de Routh. Dado que

$$G_2(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 + 1}$$

el arreglo de Routh queda:

s^3	1	0
s^2	1	1
s^1	-1	0
s^0	1	

Observe que hay dos cambios de signo en la primera columna. Por tanto, existen dos polos de $G_2(s)$ en el semiplano derecho del plano s.

Una vez que encontramos el número de polos del semiplano derecho del plano s de $G_2(s)$, procedemos a trazar el lugar geométrico de Nyquist de G(s), en donde

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{K(s + 0.5)}{s^3 + s^2 + 1}$$

Nuestro problema es determinar el rango de la ganancia K para la estabilidad. Por tanto,no graficamos los lugares geométricos de Nyquist de $G(j\omega)$ para diversos valores de K, sino que trazamos el lugar geométrico de Nyquist de $G(j\omega)/K$. La figura 8-64 muestra la traza de Nyquist o la traza polar de $G(j\omega)/K$.

Dado que G(s) tiene dos polos en el semiplano derecho del planos, tenemos que $P_1 = 2$. Considerando que

$$Z_1 = N_1 + P_1$$

para la estabilidad requerimos que $Z_1 = 0$ o que $N_1 = -2$. Es decir, el lugar geométrico de Nyquist de $G(j\omega)$ debe encerrar el punto $-1 + j0$ dos veces en sentido contrario de las manecillas del reloj. En la figura 8-64 vemos que, si el punto crítico se encuentra entre 0 y -0.5, el lugar geomátrico $G(j\omega)/K$ encierra el punto critico dos veces en sentido contrario de las manecillas del reloj. Por tanto, requerimos que

$$-0.5K < -1$$

El rango de la ganancia K para la estabilidad es

$$2 < K$$

El criterio de estabilidad de Nyquist aplicado a las trazas polares inversas. En los análisis anteriores, se aplicó el criterio de estabilidad de Nyquist a las trazas polares de la función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$.

Al analizar los sistemas multilazo, en ocasiones se usa la función de transferencia inversa para permitir análisis gráficos; esto evita gran parte del cálculo numérico. (El criterio de estabilidad de Nyquist también es adecuado para las trazas polares inversas, para las cuales la obtención matemática del criterio de estabilidad de Nyquist es igual a la que se hace para las trazas polares directas.)

La traza polar inversa de $G(j\omega)H(j\omega)$ es una traza de $1/[G(j\omega)H(j\omega)]$ como una función de ω. Por ejemplo, si $G(j\omega)H(j\omega)$ es

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{j\omega T}{1 + j\omega T}$$

entonces

$$\frac{1}{G(j\omega)H(j\omega)} = \frac{1}{j\omega T} + 1$$

La traza polar inversa para $\omega \geq 0$ es la mitad inferior de la línea vertical que empieza en el punto (1,0) sobre el eje real.

El criterio de estabilidad de Nyquist aplicado a las trazas inversas se plantea del modo siguiente: para que un sistema en lazo cerrado sea estable, el encierro, si existe, del punto $-1 + j0$ mediante el lugar geométrico $1/[G(s)H(s)]$ (conforme s se mueve a lo largo de la trayectoria de Nyquist) debe ser en el sentido contrario de las manecillas del reloj y el número de veces que queda encerrado debe ser igual al número de polos de $1/[G(s)H(s)]$ [es decir, de ceros de $G(s)H(s)$] que se encuentran en el semiplano derecho del plano s. [El número de ceros de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s se determina mediante el criterio de estabilidad de Routh.] Si la función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$

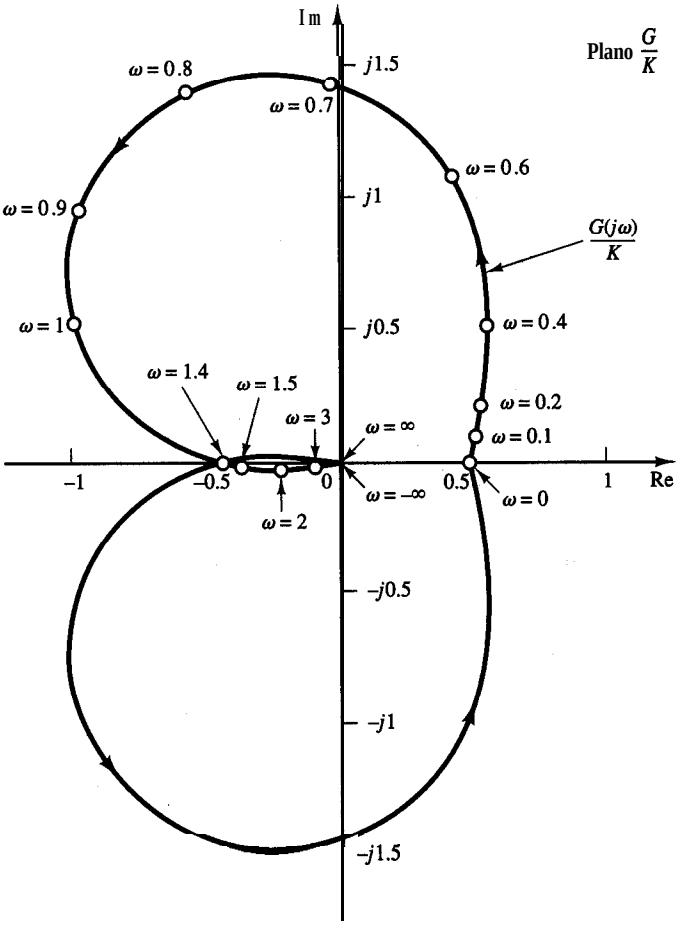


Figura 8-64
Traza polar de $G(j\omega)/K$.

no tiene ceros en el semiplano derecho del plano s, y con el fin de que el sistema en lazo cerrado sea estable el número de encierros del punto $-1 + j0$ por el lugar geométrico $1/[G(s)H(s)]$ debe ser cero.

Observe que, aunque el criterio de estabilidad de Nyquist se puede aplicar a las trazas polares inversas, si se incorporan datos experimentales de la respuesta en frecuencia, puede ser difícil contar el número de encierros del lugar geométrico $1/[G(s)H(s)]$, debido a que es difícil medir el cambio de fase correspondiente a la trayectoria semicircular infinita en el plano s. Por ejemplo, si la función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$ implica un retardo de transporte tal que

$$G(s)H(s) = \frac{Ke^{-j\omega L}}{s(Ts + 1)}$$

entonces la cantidad de encierros del punto $-1 + j0$ mediante el lugar geométrico $1/[G(s)H(s)]$ se vuelve infinita y no es posible aplicar el criterio de estabilidad de Nyquist a la traza polar inversa de tal función de transferencia en lazo abierto.

En general, si los datos experimentales de la respuesta en frecuencia no pueden expresarse en forma analítica, deben graticarse los lugares geométricos $G(j\omega)H(j\omega)$ y $1/[G(j\omega)H(j\omega)]$, además de determinarse el número de ceros de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano. Es más difícil determinar los ceros de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano (en otras palabras determinar si un componente especifico es de fase mínima) que determinar los polos de $G(s)H(s)$ en la misma parte del plano (en otras palabras, determinar si el componente es estable).

Dependiendo de si los datos son gráficos o analíticos y de si se incluyen componentes de fase no mínima, debe usarse una prueba de estabilidad apropiada para sistemas multilazo. Si los datos se proporcionan en forma analítica, o si se conocen expresiones matemáticas para todos los componentes, la aplicación del criterio de estabilidad de Nyquist para trazas polares inversas no presenta dificultades y-es posible analizar y diseñar los sistemas multilazo en el plano GH inverso.

EJEMPLO 8-19 Considere el sistema de control de la figura 8-63. (Consulte el ejemplo 8-18.) Usando la traza polar inversa, determine el rango de la ganancia K para la estabilidad.

Dado que

$$G_2(s) \quad \frac{1}{s^3 + s^2 + 1}$$

tenemos que

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{K(s + 0.5)}{s^3 + s^2 + 1}$$

Por tanto,

$$\frac{1}{G(s)} = \frac{s^3 + s^2 + 1}{K(s + 0.5)}$$

Considere que $1/G(s)$ tiene un polo en $s = -0.5$ y ninguno en el semiplano derecho del plano s. Por tanto, la ecuación de estabilidad de Nyquist

$$Z = N + P$$

se reduce a Z = N, dado que P = 0. La ecuación reducida plantea que el número Z de los ceros de $1 + [1/G(s)]$ en el semiplano derecho del plano s es igual a N, que es el número de encierros

en sentido de las manecillas del reloj del punto -1 + $j0$. Para que el sistema sea estable, N debe ser igual a cero o no debe formar ningún encierro. La figura 8-65 muestra la traza de Nyquist o la traza polar de $K/G(j\omega)$.

Observe que, dado que

$$\frac{K}{G(j\omega)} = \left[\frac{(j\omega)^3 + (j\omega)^2 + 1}{j\omega + 0.5}\right]\left(\frac{0.5 - j\omega}{0.5 - j\omega}\right)$$

$$= \frac{0.5 - 0.5\omega^2 - \omega^4 + jw(-1 + 0.5\omega^2)}{0.25 + \omega^2}$$

el lugar geométrico $K/G(j\omega)$ cruza el eje real negativo en $\omega = \sqrt{2}$, y el punto de cruce en el eje real negativo es -2.

En la figura 8-65 vemos que, si el punto crítico se encuentra en la región entre -2 y $-\infty$ el punto crítico no queda encerrado. Por tanto, para que haya estabilidad es necesario que

$$-1 < \frac{-2}{K}$$

Así, el rango de la ganancia K para la estabilidad es

$$2 < K$$

que es el mismo resultado que obtuvimos en el ejemplo 8-18.

Análisis de estabilidad relativa a través de trazas de Nyquist modificadas. La trayectoria de Nyquist para pruebas de estabilidad puede modificarse a fin de investigar la estabilidad relativa de los sistemas en lazo cerrado. Para la siguiente ecuación característica de segundo orden,

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \qquad (0 < \zeta < 1)$$

las raíces son complejas conjugadas y son

$$s_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}, \qquad s_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

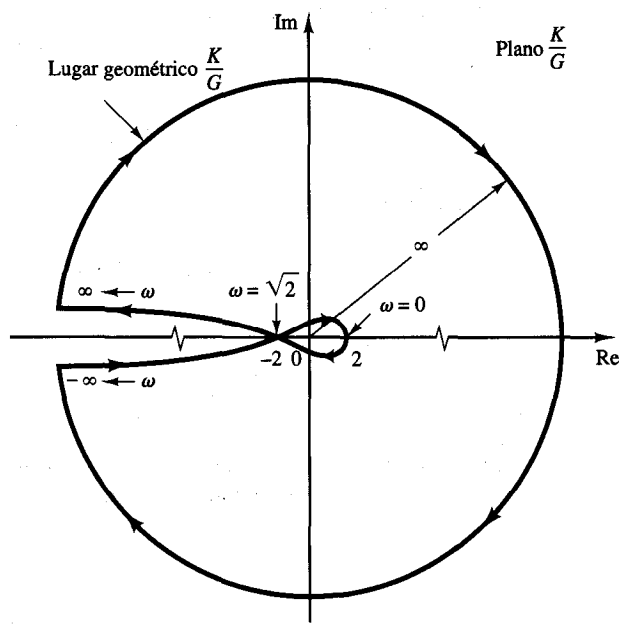


Figura 8-65
Traza polar de $K/G(j\omega)$.

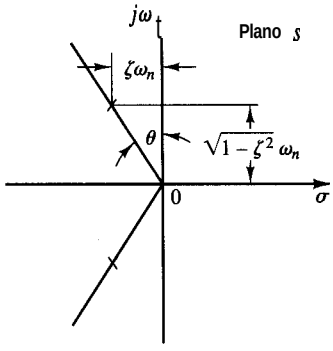


Figura 8-66
Gráfica de las raíces complejas conjugadas en el plano s.

Si se grafican estas raíces en el plano s, como se aprecia en la figura 8-66, vemos que sen $\theta = \zeta$, o el ángulo θ es indicativo del factor de amortiguamiento relativo ζ. Conforme θ se hace más pequeño, ocurre lo mismo con el valor de ζ.

Si modificamos la trayectoria de Nyquist y usamos líneas radiales con un ángulo θ_x, en lugar del eje $j\omega$, como se observa en la figura 8-67, podemos afirmar, siguiendo el mismo razonamiento que en el caso del criterio de estabilidad de Nyquist, que si el lugar geométrico $G(s)H(s)$ corresponde al contorno del plano s modificado, no encierra el punto -1 + $j0$ y ninguno de los polos de $G(s)H(s)$ se encuentra dentro del contorno del plano s cerrado, entonces este contorno no encierra ningún cero de 1 + $G(s)H(s)$. La ecuación característica, 1 + $G(s)H(s)$ = 0, no tiene, entonces, ninguna raíz dentro del contorno del plano s modificado. Si los polos en lazo cerrado de un sistema de orden superior no quedan encerrados en este contorno, podemos decir que el factor de amortiguamiento relativo de cada par de polos conjugados complejos del sistema en lazo cerrado es mayor que sen θ_x.

Suponga que el contorno del planos está formado por una línea a la izquierda del y paralela al eje jo a una distancia $-\sigma_o$ (o la líneas = $-\sigma_o$ + jo) y el semicírculo de radio infinito que encierra el semiplano derecho del plano s y la parte del semiplano izquierdo del plano s comprendida entre las líneas $s = -\sigma_o + j\omega$ y $s = j\omega$, como se observa en la figura 8−68(a). Si el lugar geométrico $G(s)H(s)$ que corresponde a este contorno del plano s no encierra el punto $-1 + j0$, y $G(s)H(s)$ no tiene polos dentro del contorno del plano s encerrado, entonces la ecuación característica no tiene ceros en la región encerrada por el contorno del planos modificado.Todas las raíces de la ecuación característica se encuentran ala izquierda de la línea $s = -\sigma_o + j\omega$. Un ejemplo de un lugar geométrico $G(-\sigma_o + j\omega)H(-\sigma_o + j\omega)$, junto con un lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$, aparece en la figura 8−68(b). La magnitud $1/\sigma_o$ es indicativa de la constante de tiempo de los polos dominantes en lazo cerrado. Si todas las

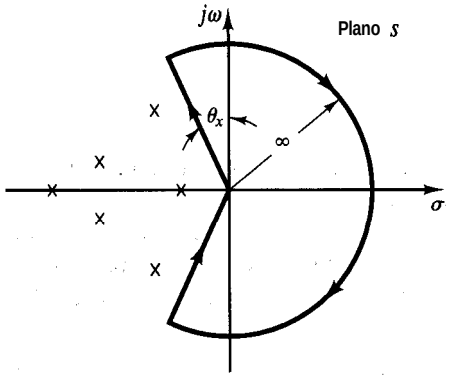


Figura 8-67
Trayectoria de Nyquist modificada.

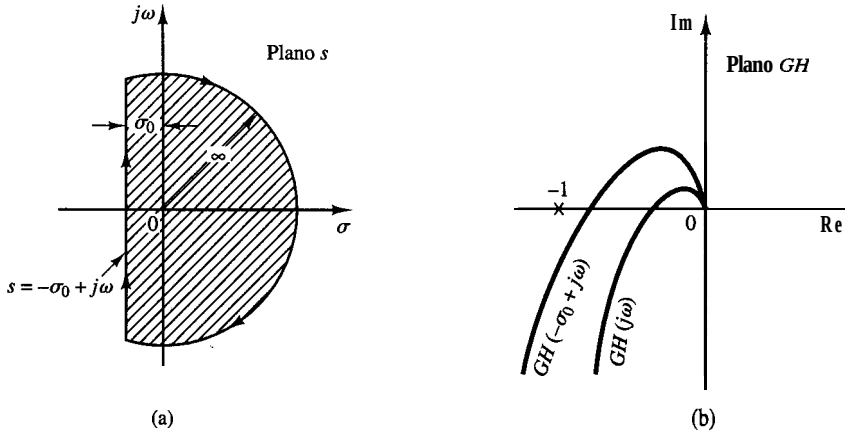


Figura 8-68
(a) Trayectoria de Nyquist modificada; (b) trazas polares del lugar geométrico $G(-\sigma_o + j\omega)H(-\sigma_o + jo)$ y el lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$ en el plano GH.

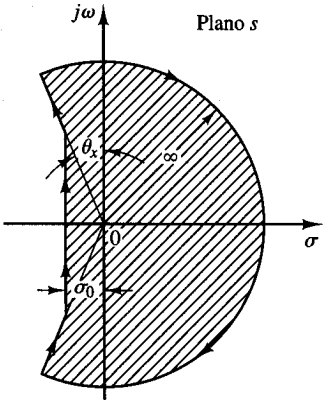


Figura 8-69
Trayectoria de Nyquist modificada.

raíces se encuentran fuera del contorno del planos, todas las constantes de tiempo de la función de transferencia en lazo cerrado son menores que $1/\sigma_o$. Si se selecciona el contorno del plano s como se aprecia en la figura 8-69, la prueba de encerrar el punto -1 + $j0$ revela la existencia o inexistencia de las raíces de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado dentro de este contorno del planos. Si la prueba revela que no hay raíces en el contorno del plano s, es evidente que todos los polos en lazo cerrado tienen factores de amortiguamiento relativo mayores que ζ_x y constantes de tiempo menores que $1/\sigma_o$. Por tanto, si se toma un contorno apropiado del plano s, pueden averiguarse las constantes de tiempo y los factores de amortiguamiento relativo de los polos en lazo cerrado a partir de la función de transferencia en lazo abierto.

8-9 ESTABILIDAD RELATIVA

Al diseñar un sistema de control, es necesario que sea estable. Además, es necesario que tenga una estabilidad relativa adecuada.

En esta sección demostraremos que la traza de Nyquist no sólo indica si un sistema es estable, sino también el grado de estabilidad de un sistema estable. La traza de Nyquist también proporciona información acerca de cómo mejorar la estabilidad, si se necesita. (Véase el capítulo 9.)

En el análisis siguiente supondremos que los sistemas considerados tienen realimentación unitaria. Observe que siempre es posible reducir un sistema con elementos de

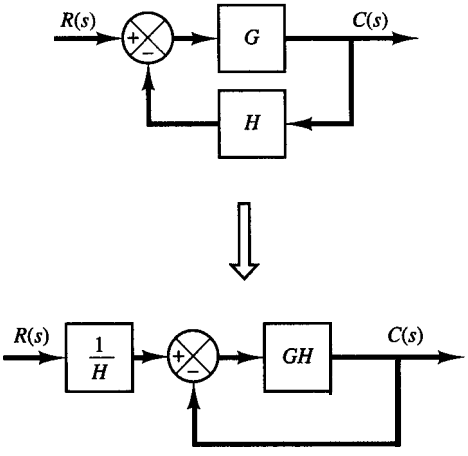


Figura 8–70
Modificación de un sistema con elementos de realimentación a un sistema con realimentación unitaria.

realimentación a un sistema con realimentación unitaria, como se aprecia en la figura 8-70. Por tanto, el análisis de la estabilidad relativa de un sistema con realimentación unitaria puede extenderse a los sistemas con realimentación no unitaria.

También supondremos, a menos que se mencione lo contrario, que los sistemas son de fase mínima; es decir, que la función de transferencia de lazo abierto $G(s)$ no tiene polos ni ceros en el semiplano derecho del plano s.

Análisis de la estabilidad relativa mediante un mapeo conforme. Uno de los problemas importantes al analizar un sistema de control es encontrar todos los polos en lazo cerrado, o al menos los más cercanos al eje $j\omega$ (o el par de polos dominantes en lazo cerrado). Si se conocen las características de la respuesta en frecuencia en lazo abierto de un sistema, es posible encontrar los polos en lazo cerrado más cercanos al eje jo. Obsérvese que el lugar geométrico de Nyquist $G(j\omega)$ no necesita ser una función de ω analíticamente conocida. El lugar geométrico de Nyquist completo se obtiene experimentalmente. La técnica que se va a presentar aquí es esencialmente gráfica y se basa en un mapeo apegado del planos dentro del plano G(s).

Considere el mapeo conforme de las lineas con σ constante (las líneas $s = \sigma$ + jo, en donde σ es una constante y ω varía) y las lfneas de ω constante (las líneas $s = \sigma$ + jo, en donde ω es una constante y σ varía) en el plano s. La línea $\sigma = 0$ (eje jo) en el plano s se mapea dentro de la traza de Nyquist en el plano G(s). Las líneas de σ constante en el plano s se mapean dentro de las curvas similares a la traza de Nyquist y son en un sentido, paralelas a la traza de Nyquist, como se observa en la figura 8-71. Las líneas de ω constante en el plano s se mapean dentro de las curvas, mismas que también se aprecian en la figura 8-71.

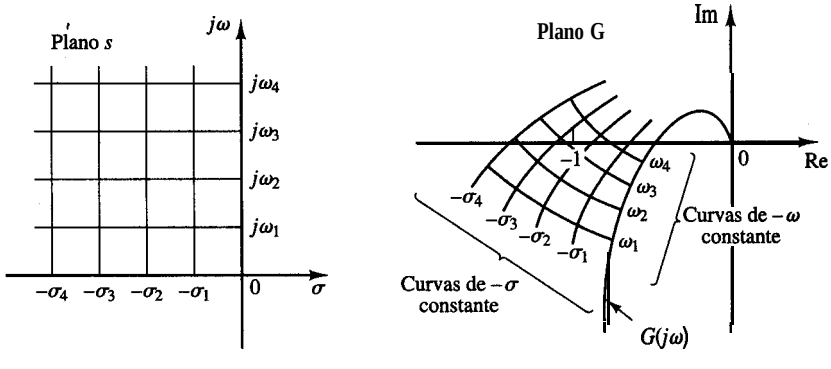


Figura 8–71
Mapeo conforme de las retículas del plano s dentro del plano G(s).

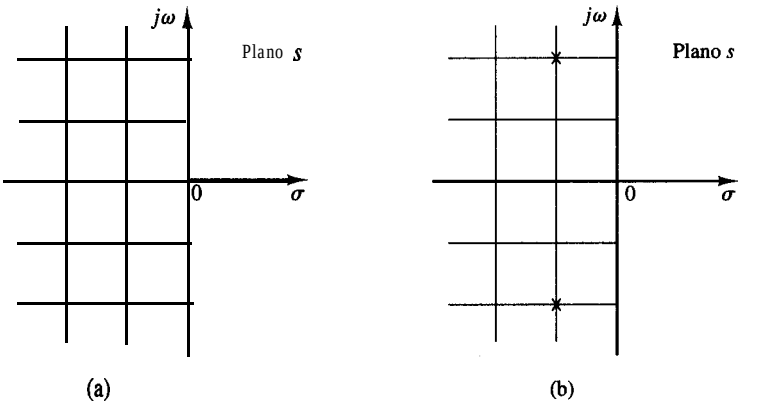


Figura 8-72
Dos sistemas con dos polos en lazo cerrado.

Aunque la forma de los lugares geométricos de σ constante y de ω constante en el plano $G(s)$ y la estrecha proximidad del lugar geométrico $G(j\omega)$ al punto $-1 + j0$ depende de un $G(s)$ específico, la estrecha proximidad del lugar geométrico $G(j\omega)$ al punto $-1 + j0$ es un indicio de la estabilidad relativa de un sistema estable. En general, podemos esperar que, entre más cerca esté el lugar geométrico $G(j\omega)$ del punto $-1 + j0$, más grande será el sobrepaso máximo en la respuesta transitoria escalón y más tiempo requerirá ésta para amortiguarse.

Considere los dos sistemas de las figuras 8–72(a) y (b). (En la figura 8-72, las x indican los polos en lazo cerrado.) El sistema (a) es obviamente más estable que el sistema (b), porque los polos en lazo cerrado del sistema (a) se ubican más lejos a la izquierda que los del sistema (b). Las figuras 8–73(a) y (b) muestran el mapeo conforme de las retículas del plano s dentro del plano G(s). Entre más cerca del eje $j\omega$ están los polos en lazo cerrado, más cerca del punto $-1 + j0$ está el lugar geométrico $G(j\omega)$.

Márgenes de fase y de ganancia. La figura 8-74 muestra las trazas polares de $G(j\omega)$ para tres valores diferentes de la ganancia K en lazo abierto. Para un valor grande de la ganancia K, el sistema es inestable. Conforme la ganancia se decrementa hacia cierto valor, el lugar geométrico $G(j\omega)$ pasa por el punto $-1 + j0$. Esto significa que, para este valor de la ganancia, el sistema está al borde de la inestabilidad y presenta oscilaciones sostenidas. Para un valor pequeño de la ganancia K, el sistema es estable.

En general, entre más se acerca el lugar geométrico $G(j\omega)$ a encerrar el punto $-1 + j0$, más oscilatoria es la respuesta del sistema. La proximidad del lugar geométrico $G(j\omega)$ al punto $-1 + j0$ se usa como una medida del margen de estabilidad. (Sin embargo, esto no

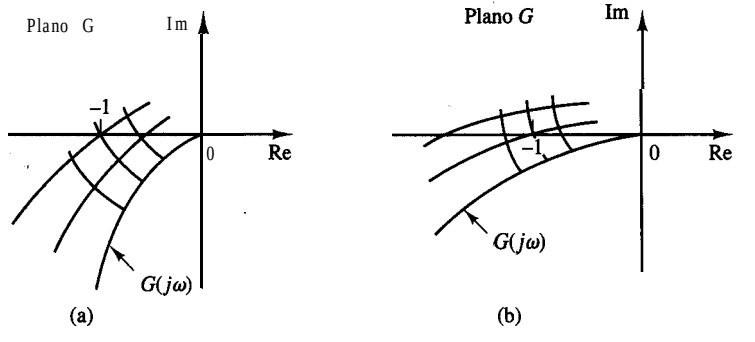


Figura 8–73
Mapeos conformes de las cuadrículas del plano s para los sistemas de la figura 8-72 dentro del plano G(s).

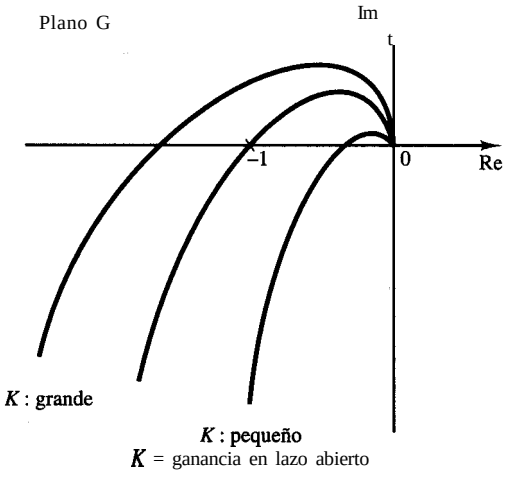


Figura 8-74
Trazas polares de
$\frac{K(1 + j\omega T_a)(1 + j\omega T_b)\cdots}{(j\omega)^{\lambda}(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)\ldots}$

se aplica a los sistemas condicionalmente estables.) Es una práctica común representar la proximidad en términos del margen de fase y el margen de ganancia.

Margen de *fase:* el margen de fase es la cantidad de atraso de fase adicional en la frecuencia de cruce de ganancia requerida para llevar el sistema al borde de la inestabilidad. La frecuencia de cruce de ganancia es la frecuencia en la cual $|G(j\omega)|$, magnitud de la función de transferencia en lazo **abierto, es** unitaria. El margen de fase γ es de 180° más el ángulo de fase ϕ de la función de transferencia en lazo abierto en la frecuencia de cruce de ganancia, o

$$\gamma = 180° + \phi$$

Las figuras 8−75(a), (b) y (c) ilustran el margen de fase de un sistema estable y de un sistema inestable en trazas de Bode, trazas polares y trazas de magnitud logarítmica contra fase. En la traza polar, se dibuja una línea del origen al punto en el que el círculo cruza el lugar geométrico $G(j\omega)$. El ángulo del eje real negativo para esta línea es el margen de fase. Éste es positivo para $\gamma > 0$ y negativo para $\gamma < 0$. Con el fin de que un sistema de fase mínima sea estable, el margen de fase debe ser positivo. En las trazas logarítmicas, el punto crítico en el plano complejo corresponde a las líneas 0 dB y − 180°.

Margen *de* ganancia: el margen de ganancia es el recíproco de la magnitud $|G(j\omega)|$ en la frecuencia a la cual el ángulo de fase es − 180°. Si definimos la frecuencia de cruce de fase ω_1 como la frecuencia a la cual el ángulo de fase de la función de transferencia en lazo abierto es igual a − 180°, se produce el margen de ganancia K_g:

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_1)|}$$

En términos de decibeles,

$$K_g \text{ dB} = 20 \log K_g = -20 \log |G(j\omega_1)|$$

El margen de ganancia expresado en decibeles es positivo si K_g es mayor que la unidad y negativo si K_g es menor que la unidad. Por tanto, un margen de ganancia positivo (en deci-

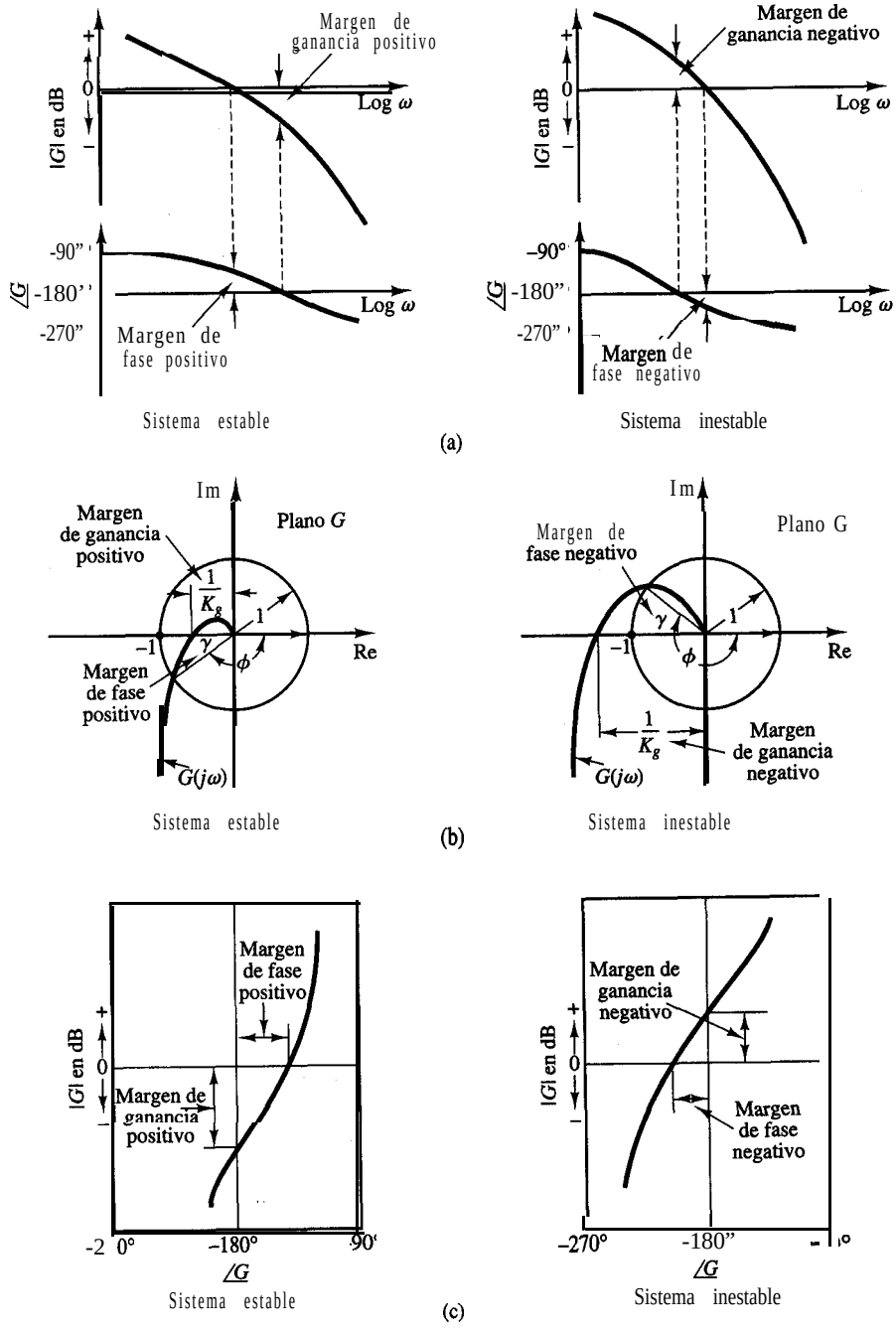


Figura 8-75
Márgenes de fase y de ganancia de sistemas inestable y estable. (a) Trazas de Bode; (b) trazas polares; (c) Trazas de magnitud logarítmica contra la fase.

beles) significa que el sistema es estable y un margen de ganancia negativo (en decibeles) quiere decir que el sistema es inestable. El margen de ganancia se aprecia en las figuras 8–75(a), (b) y (c).

Para un sistema estable de fase mínima, el margen de ganancia indica cuánto puede incrementarse la ganancia antes de que el sistema se vuelva inestable. Para un sistema inestable, el margen de ganancia indica cuánto debe disminuir la ganancia para que el sistema se vuelva estable.

El margen de ganancia de un sistema de primer o segundo órdenes es infinito, dado que las trazas polares para tales sistemas no cruzan el eje real negativo. Por tanto, los sistemas de primer y segundo órdenes en teoría no pueden ser inestables. (Sin embargo, observe que los denominados sistemas de primer y segundo órdenes son sólo aproximaciones, en el sentido de que, al obtener las ecuaciones del sistema, no se consideran los pequeños atrasos de tiempo y, por tanto, no se trata, en verdad, de sistemas de primer o segundo órdenes Si se consideran estos atrasos pequeños, los supuestos sistemas de primer o segundo órdenes se vuelven inestables)

Observe que, para un sistema de fase no mínima con un lazo abierto inestable, la condición de estabilidad no se satisface a menos que la gráfica $G(j\omega)$ encierre el punto $-1 + j0$. Por tanto, un sistema estable de fase no mínima tendrá márgenes de fase y de ganancia negativos.

También es importante señalar que los sistemas condicionalmente estables tienen dos o más frecuencias de cruce de fase y que algunos sistemas de orden superior con una dinámica complicada en el numerador también pueden tener dos o más frecuencias de cruce de ganancia, como se observa en la figura 8-76. Para que los sistemas estables tengan dos o más frecuencias de cruce de ganancia, se mide el margen de fase en la frecuencia de cruce de ganancia más alta.

Algunos comentarios sobre los márgenes de fase y de ganancia. Los márgenes de fase y de ganancia de un sistema de control son una medida de la proximidad de la traza polar al punto $-1 + j0$. Por tanto, pueden usarse como criterios de diseño.

Debe señalarse que el puro margen de ganancia o el puro margen de fase no aportan un indicio suficiente de la estabilidad relativa. Deben considerarse ambos en la determinación de la estabilidad relativa.

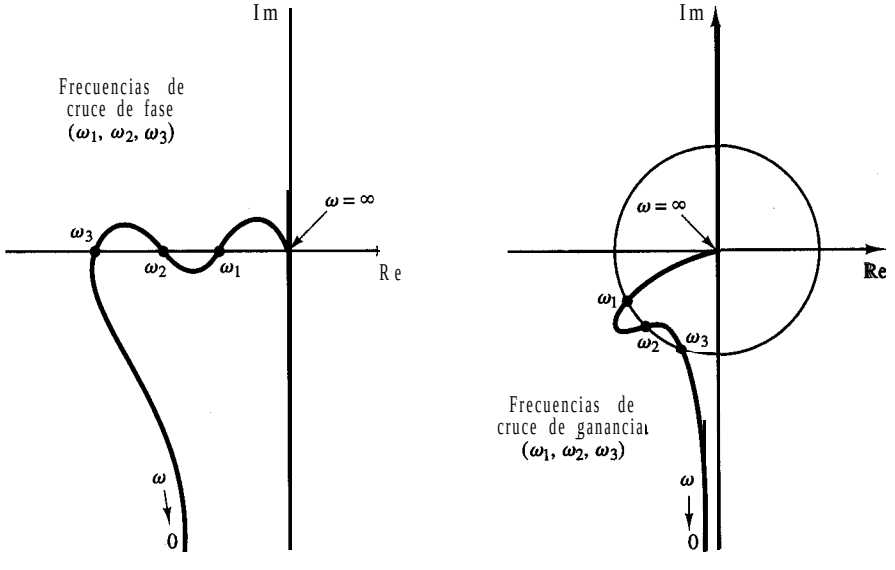


Figura 8-76
Trazas polares que muestran más de dos frecuencias de cruce de fase o de ganancia.

Para un sistema de fase mínima, los márgenes de fase y de ganancia deben ser positivos a fin de que el sistema sea estable. Los **márgenes** negativos indican inestabilidad.

Los márgenes adecuados de fase y de aumento nos aseguran contra las variaciones de los componentes del sistema y se especifican para valores de frecuencia definidos. Los dos valores delimitan el comportamiento del sistema en lazo cerrado cerca de la frecuencia de resonancia. Para obtener un desempeño satisfactorio, el margen de fase debe estar entre 30" y 60°, y el margen de ganancia debe ser mayor que 6 dB. Con estos valores, un sistema de fase mínima tiene una estabilidad garantizada, incluso si la ganancia en lazo abierto y las constantes de tiempo de los componentes varían en cierto grado. Aunque los márgenes de fase y de ganancia **sólo** proporcionan estimados globales del factor de amortiguamiento relativo efectivo del sistema en lazo cerrado, ofrecen un medio conveniente de diseñar los sistemas de control o ajustar las constantes de ganancia de los sistemas.

Para los sistemas de fase mínima, las características de magnitud y de fase de la función de transferencia en lazo abierto se relacionan en forma estrecha. El requerimiento de que el margen de fase esté entre 30" y 60" significa que, en las trazas de Bode, la pendiente de la curva de magnitud logarítmica en la frecuencia de cruce de ganancia debe ser más gradual que -40 dB/década. En la mayor parte de los casos prácticos, es conveniente para la estabilidad una pendiente de -20 dB/década en la frecuencia de cruce de ganancia. Si es de -40 dB/década, el sistema puede ser estable o inestable. (Sin embargo, incluso si el sistema es estable, el margen de fase es pequeño.) Si la pendiente de la frecuencia de cruce de ganancia tiene una pendiente de -60 dB/década o mayor, es muy probable que el sistema sea inestable.

EJEMPLO 8–20 Obtenga los márgenes de fase y de ganancia del sistema de la figura 8-77 para los casos en los que $K = 10$ y $K = 100$.

Los márgenes de fase y de ganancia se obtienen con facilidad de las trazas de Bode. La figura 8–78(a) contiene las trazas de Bode de la función de transferencia en lazo abierto determinada con $K = 10$. Los márgenes de fase y de ganancia para $K = 10$ son

$$\text{Margen de fase} = 21°, \qquad \text{Margen de ganancia} = 8\ \text{dB}$$

Por tanto, la ganancia del sistema se incrementa en 8 dB antes de que ocurra la inestabilidad.

Incrementar la ganancia de $K = 10$ a $K = 100$ mueve el eje 0 dB 20 dB hacia abajo, como se aprecia en la figura 8–78(b). Los márgenes de fase y de ganancia son

$$\text{Margen de fase} = -30°, \qquad \text{Margen de ganancia} = -12\ \text{dB}$$

Por tanto, el sistema es estable para $K = 10$, pero inestable para $K = 100$.

Observe que uno de los aspectos convenientes del enfoque de las trazas de Bode es la facilidad con la cual se evalúan los efectos de los cambios de ganancia.

Considere que, para obtener un desempeño satisfactorio, debemos incrementar el margen de fase a $30° \sim 60°$. Para ello se **decrementa** la ganancia K. *Sin* embargo, no es conveniente decrementar K, dado que un valor pequeño de K producirá un error grande para la entrada de la pendiente Esto sugiere que puede ser necesario volver a dar forma a la curva de respuesta en frecuencia en lazo abierto agregando una compensación. Las técnicas de compensación se analizan con detalle en el capítulo 9.

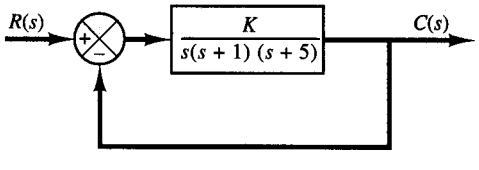


Figura 8–77
Sistema de control.

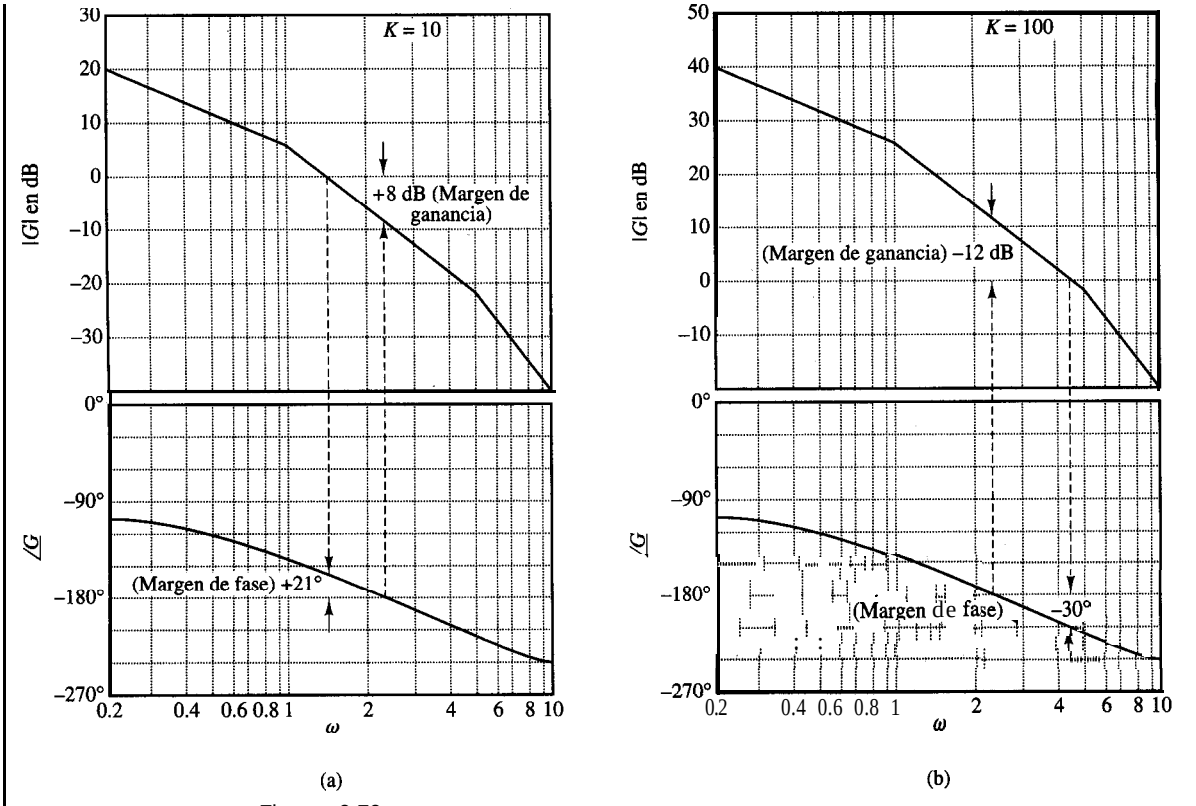


Figura 8-78
Trazas de Bode del sistema de la figura 8–77(a) con $K = 10$, y (b) con $K = 100$.

Magnitud del pico de resonancia M_r y frecuencia de pico de resonancia ω_r. Considere el sistema de la figura 8-79. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{8–9}$$

en donde ζ y ω_n son el factor de amortiguamiento relativo y la frecuencia natural no amortiguada, respectivamente. La respuesta en frecuencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}} = Me^{j\alpha}$$

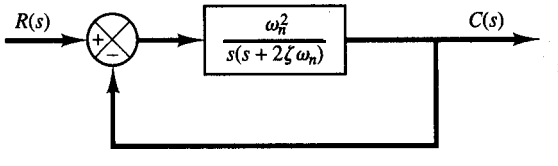


Figura 8–79
Sistema de control.

en donde

$$M = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}, \qquad \alpha = -\tan^{-1}\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Según lo obtenido mediante la ecuación (8−6), para $0 \leq \zeta \leq 0.707$, el valor máximo de M ocurre en la frecuencia ω_r, en la cual

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2} = \omega_n\sqrt{\cos 2\theta} \tag{8-10}$$

El ángulo θ se define en la figura 8-80. La frecuencia ω_r es la frecuencia de resonancia. En la frecuencia de resonancia, el valor de M es máximo y se obtiene a partir la ecuación (8−7), que se reescribe como

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{1}{\text{sen } 2\theta} \tag{8-11}$$

en donde M_r se define como la ***magnitud del pico de resonancia,*** valor que se relaciona con el amortiguamiento del sistema.

La magnitud del pico de resonancia proporciona un indicio de la estabilidad relativa del sistema. Una magnitud del pico de resonancia grande indica la presencia de un par de polos dominantes en laxo cerrado con un factor de amortiguamiento pequeño, lo cual produce una respuesta transitoria inconveniente. En cambio, una magnitud del pico de resonancia pequeña indica la ausencia de un par de polos dominantes en laxo cerrado con un factor de amortiguamiento relativo pequeño, lo que significa que el sistema está bien amortiguado.

Recuerde que ω_r es real sólo si $\zeta < 0.707$. Por tanto, no hay una resonancia en lazo cerrado si $\zeta > 0.707$. [El valor de M_r es unitario sólo si $\zeta > 0.707$. Véase la ecuación (8−8).] Dado que en un sistema físico es fácil medir los valores de M_r y ω_r, éstos son muy útiles para verificar que los análisis teórico y experimental coincidan.

Sin embargo, debe señalarse que, para problemas prácticos de diseño, es más común especificar el margen de fase y el margen de ganancia que la magnitud del pico de resonancia para indicar el grado de amortiguamiento de un sistema.

Correlación entre la respuesta transitoria a escalón y la respuesta en frecuencia en el sistema estándar de segundo orden. El sobrepaso máximo en la respuesta escalón unitario del sistema estándar de segundo orden, tal como se aprecia en la figura

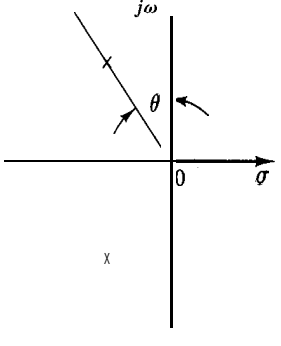


Figura **8–80**
Definición del ángulo θ.

8-79, se correlaciona en forma exacta con la magnitud del pico de resonancia en la respuesta en frecuencia. Por tanto, la respuesta en frecuencia contiene, en esencia, la misma información de la dinámica del sistema que la respuesta transitoria.

Para una entrada escalón unitario, la salida del sistema de la figura 8 -79 se obtiene mediante la ecuación (4−21), o bien

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_d t\right), \qquad \text{para } t \geq 0$$

en donde

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \omega_n \cos\theta \tag{8-12}$$

Por otra parte, el sobrepaso máximo M_p para la respuesta escalón unitario se obtiene mediante la ecuación (4−30), o bien

$$M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} \tag{8–13}$$

Este sobrepaso máximo ocurre en la respuesta transitoria que tiene la frecuencia natural amortiguada $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$. El sobrepaso máximo se vuelve excesivo para valores de $\zeta < 0.4$.

Dado que el sistema de segundo orden de la figura 8-79 tiene la función de transferencia en lazo abierto

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

para una operación senoidal, la magnitud de $G(j\omega)$ se vuelve unitaria cuando

$$\omega = \omega_n\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}$$

que se obtiene igualando $|G(j\omega)|$ con la unidad y despejando ω. En esta frecuencia, el ángulo de fase de $G(j\omega)$ es

$$\angle G(j\omega) = -\angle j\omega - \angle j\omega + 2\zeta\omega_n = -90^\circ - \tan^{-1}\frac{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}}{2\zeta}$$

Por tanto, el margen de fase γ es

$$\begin{aligned}\gamma &= 180^\circ + \angle G(j\omega) \\ &= 90^\circ - \tan^{-1}\frac{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}}{2\zeta} \\ &= \tan^{-1}\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}}\end{aligned} \tag{8–14}$$

La ecuación (8-14) presenta la relación entre el factor de amortiguamiento relativo ζ y el margen de fase γ. (Observe que el margen de fase γ es sólo una función del factor de amortiguamiento relativo ζ.)

A continuación resumiremos la correlación entre la respuesta transitoria a escalón y la respuesta en frecuencia del sistema de segundo orden obtenido mediante la ecuación (8-9):

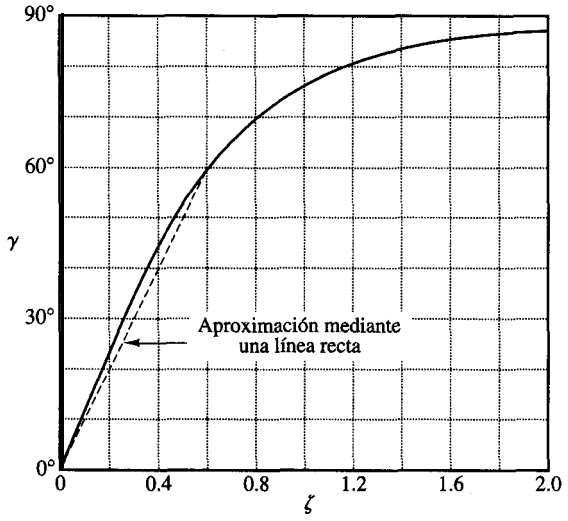


Figura 8-81
Curva γ (margen de fase) contra ζ para el sistema de la figura 8-79.

1. El margen de fase y el factor de amortiguamiento relativo se relacionan en forma directa. La figura 8-81 muestra una gráfica del margen de fase γ como una función del factor de amortiguamiento relativo ζ. Observe que, para el sistema estándar de segundo orden de la figura 8-79, el margen de fase γ y el factor de amortiguamiento relativo ζ se relacionan aproximadamente mediante una línea recta para $0 \leq \zeta \leq 0.6$, del modo siguiente:

$$\zeta = \frac{\gamma}{100}$$

Por tanto, un margen de fase de 60" corresponde a un factor de amortiguamiento relativo de 0.6. Para sistemas de orden superior que tienen un par de polos dominantes en lazo cerrado, esta relación se usa como una regla empírica para estimar la estabilidad relativa de la respuesta transitoria (es decir, el factor de amortiguamiento relativo) a partir de la respuesta en frecuencia.

2. Remitiéndonos a las ecuaciones (8− 10) y (8− 12) vemos que los valores de ω_r y ω_d son casi iguales para valores pequeños de ζ. Por tanto, para valores pequeños de ζ, el valor de ω_r es indicativo de la velocidad de respuesta transitoria del sistema.

3. En las ecuaciones (8-11) y (8−13), observamos que, entre más pequeño es el valor de ζ, más grandes son los valores de M_r y M_p. La correlación entre M_r y M_p como una función de ζ aparece en la figura 8-82. Se observa una relación estrecha entre M_r y M_p para $\zeta > 0.4$. Para valores muy pequeños de ζ, M_r se vuelve muy grande $(M_r \gg 1)$, en tanto que el valor de M_p no excede de 1.

Correlación entre la respuesta transitoria a escalón y la respuesta en frecuencia en sistemas generales. Es muy común que el diseño de los sistemas de control se realice con base en la respuesta en frecuencia. La razón principal de esto es la simplicidad relativa de este enfoque en comparación con otros. Dado que en muchas aplicaciones el in-

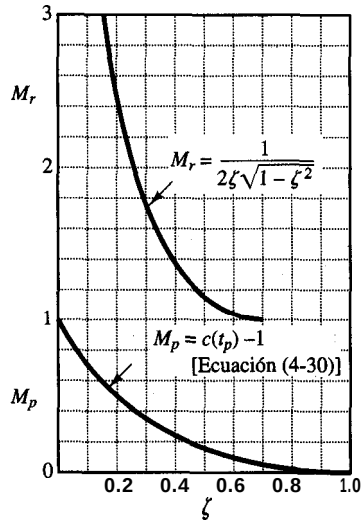


Figura 8–82
Curvas M_r contra ζ y M_p contra ζ para el sistema de la figura 8-79.

terés principal es la respuesta transitoria del sistema para entradas aperiódicas, en lugar de la respuesta en estado estable ante entradas senoidales, surge la cuestión de la correlación entre la respuesta transitoria y la respuesta en frecuencia.

Para el sistema de segundo orden de la figura 8-79, es fácil obtener las relaciones matemáticas que correlacionan la respuesta transitoria a escalón con la respuesta en frecuencia. La respuesta en tiempo de un sistema de segundo orden se predice con exactitud a partir del conocimiento de la M_r y la ω_r de su respuesta en frecuencia en lazo cerrado.

Para sistemas de orden superior, la correlación es más compleja y no es fácil predecir la respuesta transitoria a partir de la respuesta en frecuencia, porque los polos adicionales modifican la correlación entre la respuesta transitoria a escalón y la respuesta en frecuencia existentes para un sistema de segundo orden. Existen técnicas matemáticas que permiten obtener la correlación exacta, pero son muy laboriosas y de poco valor práctico.

La aplicabilidad de la correlación existente entre la respuesta transitoria y la respuesta en frecuencia para el sistema de segundo orden de la figura 8-79 en sistemas de orden superior depende de la presencia de un par de polos dominantes en lazo cerrado complejos conjugados en estos sistemas de orden superior. Es evidente que, si la respuesta en frecuencia de un sistema de orden superior es dominada por un par de polos en lazo cerrado complejos conjugados, la correlación entre la respuesta transitoria y la respuesta en frecuencia existente para el sistema de segundo orden se puede extender al sistema de orden superior.

Para sistemas de orden superior, lineales e invariantes con el tiempo, que tienen un par de polos dominantes en lazo cerrado complejos conjugados, por lo general existen las siguientes relaciones entre la respuesta transitoria a escalón y la respuesta en frecuencia:

1. El valor de M_r indica la estabilidad relativa. Por lo general se obtiene un desempeño transitorio satisfactorio si el valor de M_r está en el rango de $1.0 < M_r < 1.4$ ($0\ \text{dB} < M_r < 3\ \text{dB}$), que corresponde a un factor de amortiguamiento relativo efectivo de $0.4 < \zeta < 0.7$. Para valores de M_r mayores que 1.5, la respuesta transitoria a escalón puede pre-

sentar varios sobrepasos. (Observe que, en general, un valor grande de M_r corresponde a un sobrepaso grande en la respuesta transitoria a escalón. Si el sistema está sujeto a señales de ruido cuyas frecuencias están cerca de la frecuencia de resonancia ω_r, el ruido se amplifica en la salida y presenta problemas serios.)

2. La magnitud de la frecuencia de resonancia ω_r indica la velocidad de respuesta transitoria. Entre más grande es el valor de ω_r, más rápida es la respuesta en tiempo. En otras palabras, el tiempo de levantamiento varía inversamente con respecto a ω_r. En términos de respuesta en frecuencia en lazo abierto, la frecuencia natural amortiguada en la respuesta transitoria está en algún punto entre la frecuencia de cruce de ganancia y la frecuencia de cruce de fase.

3. La frecuencia del pico de resonancia ω_r y la frecuencia natural amortiguada ω_d para la respuesta transitoria a escalón están muy cercanas entre sí para sistemas ligeramente amortiguados.

Las tres relaciones que se acaban de listar son útiles para correlacionar la respuesta transitoria a escalón con la respuesta en frecuencia de sistemas de orden superior, siempre y cuando éstas se aproximen mediante un sistema de segundo orden o un par de polos complejos conjugados en lazo cerrado. Si un sistema de orden superior satisface esta condición, un conjunto de especificaciones en el dominio del tiempo se traduce en especificaciones en el dominio de la frecuencia. Esto simplifica enormemente el trabajo de diseño o de compensación de los sistemas de orden superior.

Además del margen de fase, el margen de ganancia, el pico de resonancia M_r y la frecuencia del pico de resonancia ω_r, existen otras cantidades en el dominio de frecuencia que se usan a menudo en las especificaciones de desempeño. Éstas son la frecuencia de corte, el ancho de banda y la razón de corte. A continuación se definirán todas ellas.

Frecuencia de corte y ancho de banda. Remitiéndonos a la figura 8-83, la frecuencia ω_b en la cual la magnitud de respuesta en frecuencia en lazo cerrado está 3 dB debajo de su valor de frecuencia cero se denomina frecuencia de corte. Por tanto

$$\left|\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}\right| < \left|\frac{C(j0)}{R(j0)}\right| - 3 \text{ dB}, \qquad \text{para } \omega > \omega_b$$

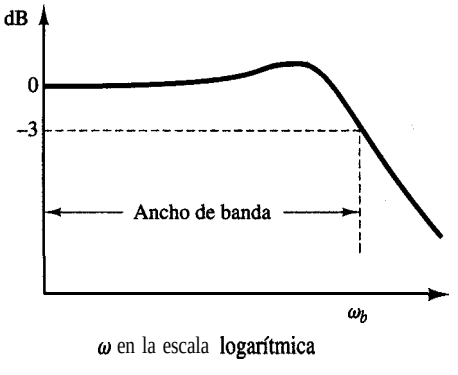


Figura 8–83
Traza logarítmica que muestra la frecuencia de corte ω_b y el ancho de banda.

Para los sistemas en los cuales $|C(j0)/R(j0)| = 0$ dB,

$$\left|\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}\right| < -3 \text{ dB}, \qquad \text{para } \omega > \omega_b$$

El sistema en lazo cerrado filtra las componentes de la señal cuyas frecuencias son mayores que la frecuencia de corte y permite el paso de aquellas con frecuencias menores que la frecuencia de corte.

El rango de la frecuencia $0 \leq \omega \leq \omega_b$ en el cual la magnitud en lazo cerrado no desciende a -3 dB se denomina ancho de ***banda*** del sistema. El ancho de banda indica la frecuencia a la cual la ganancia empieza a rebasar su valor de frecuencia baja. Por tanto, el ancho de banda indica qué tan bien registrará el sistema una senoide de entrada. Observe que, para una ω_n determinada, el tiempo de levantamiento aumenta con un factor de amortiguamiento relativo ζ creciente. En cambio, el ancho de banda disminuye con el decremento de ζ. Por tanto, el tiempo de levantamiento y el ancho de banda son inversamente proporcionales

La especificación del ancho de banda se determina mediante los factores siguientes:

1. La capacidad de reproducir la señal de entrada. Un ancho de banda grande corresponde a un tiempo de levantamiento pequeño o a una respuesta rápida. En términos generales, puede decirse que el ancho de banda es proporcional a la velocidad de respuesta.
2. Las características de filtrado necesarias para el ruido de alta frecuencia.

Para que el sistema siga las entradas arbitrarias con precisión, es necesario que tenga un ancho de banda grande. Sin embargo, desde el punto de vista del ruido, el ancho de banda no debe ser demasiado grande. Por tanto, existen requerimientos en conflicto con respecto al ancho de banda y, por lo general, el equilibrio es necesario para un buen diseño. Observe que un sistema con un ancho de banda grande requiere de componentes de alto desempeño. Así, el costo de los componentes suele incrementarse con el ancho de banda.

Razón de corte. La razón de corte es la pendiente de la curva de magnitud logarítmica cercana a la frecuencia de corte. La razón de corte indica la capacidad de un sistema para distinguir la señal del ruido.

Adviértase que una curva de respuesta en frecuencia en lazo cerrado con una característica de corte muy marcada tiene una magnitud grande del pico de resonancia, lo cual implica que el sistema tiene un margen de estabilidad relativamente pequeño.

EJEMPLO 8-21 Considere los dos sistemas siguientes:

$$\text{Sistema 1: } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+1}, \qquad \text{Sistema II: } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{3s+1},$$

Compare sus anchos de banda. Demuestre que el sistema con el ancho de banda mayor tiene una mayor velocidad de respuesta y puede seguir la entrada mucho mejor que el que tiene un ancho de banda menor.

La figura 8–84(a) muestra las curvas de respuesta en frecuencia en lazo cerrado para los dos sistemas. (Las curvas asintóticas se indican con líneas de guiones.) Encontramos que el ancho de banda del sistema 1 es $0 \leq \omega \leq 1$ rad/seg y que la del sistema II es $0 \leq \omega \leq 0.33$ rad/seg. Las figuras 8–84(b) y (c) muestran, respectivamente, las curvas de respuesta escalón unitario y de respuesta rampa unitaria para los dos sistemas. Es evidente que el sistema 1, cuyo ancho de banda es tres veces mayor que el del sistema II, tiene una mayor velocidad de respuesta y sigue la entrada mucho mejor.

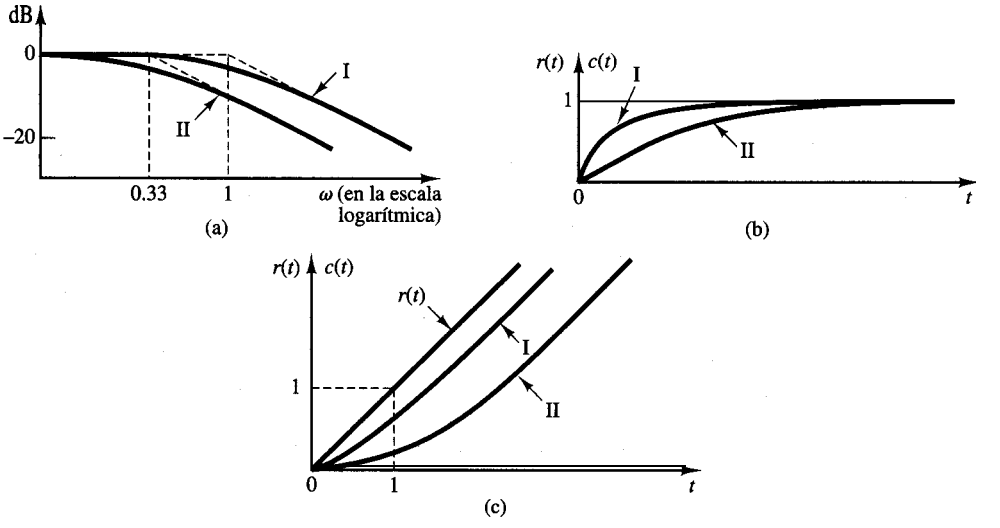


Figura 8–84
Comparación de las características dinámicas de los dos sistema considerados en el ejemplo 8–21. (a) Curvas de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado; (b) curvas de la respuesta escalón unitario; (c) curvas de la respuesta rampa unitaria.

8-10 RESPUESTA EN FRECUENCIA EN LAZO CERRADO

Respuesta en frecuencia en lazo cerrado de sistemas con realimentación unitaria. Para un sistema estable en lazo cerrado, es fácil obtener la respuesta en frecuencia a partir de la respuesta en lazo abierto. Considere el sistema con realimentación unitaria de la figura 8–85(a). La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

En la traza polar o de Nyquist que aparece en la figura 8–85(b), el vector $\vec{OA}$ representa a $G(j\omega_1)$, en donde ω_1 es la frecuencia en el punto A. La longitud del vector $\vec{OA}$ es $|G(j\omega_1)|$ y el ángulo del vector $\vec{OA}$ es $\angle G(j\omega_1)$. El vector $\vec{PA}$, vector que va del punto $-1 + j0$ al lugar geométrico de Nyquist, representa a $1 + G(j\omega_1)$. Por tanto, la razón entre $\vec{OA}$ y $\vec{PA}$ representa la respuesta en frecuencia en lazo cerrado, o

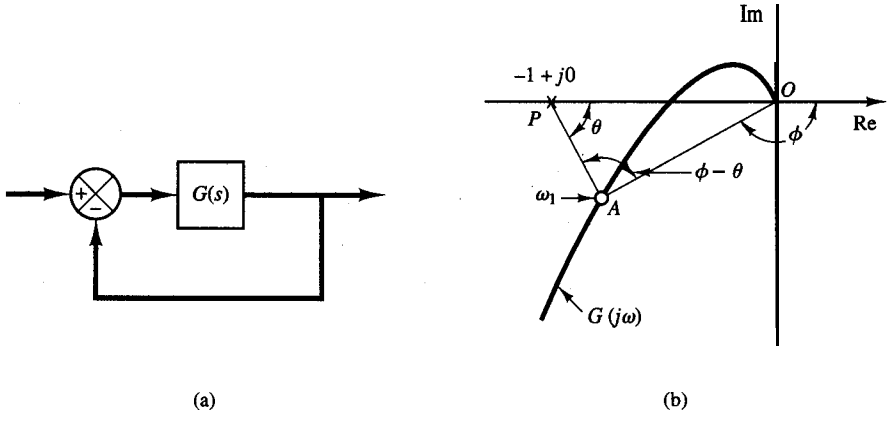


Figura 8-85
(a) Sistema con realimentación unitaria; (b) determinación de la respuesta-en frecuencia en lazo cerrado a partir de la respuesta en frecuencia en lazo abierto.

$$\frac{\vec{OA}}{\vec{PA}} = \frac{G(j\omega_1)}{1 + G(j\omega_1)} = \frac{C(j\omega_1)}{R(j\omega_1)}$$

La magnitud de la función de transferencia en lazo cerrado en $\omega = \omega_1$ es el cociente entre las magnitudes de $\vec{OA}$ y de $\vec{PA}$. El ángulo de fase de la función de transferencia en lazo cerrado en $\omega = \omega_1$ es el ángulo formado por los vectores $\vec{OA}$ a *Pd,* que es $\phi - \theta$, y que aparece en la figura 8−85(b). Midiendo la magnitud y el ángulo de fase en diferentes puntos de frecuencia, se obtiene la curva de respuesta en frecuencia en lazo cerrado.

Definamos la magnitud de respuesta en frecuencia en lazo cerrado como M y el ángulo de fase como a, o

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = Me^{j\alpha}$$

A continuación, encontraremos los lugares geométricos de magnitud constante y los lugares geométricos de ángulo de fase constante. Tales lugares geométricos son convenientes para determinar la respuesta en frecuencia en lazo cerrado a partir de la traza polar o de Nyquist.

Lugares geométricos de magnitud constante (círculos *M*). Para obtener los lugares geométricos de magnitud constante, primero consideremos que $G(j\omega)$ es una cantidad compleja que se escribe del modo siguiente:

$$G(j\omega) = \mathrm{X} + jY$$

en donde X y Y son cantidades reales. A continuación obtenemos *M* mediante

$$M = \frac{|X + jY|}{|1 + \mathrm{X} + jY|}$$

Y M^2 mediante

$$M^2 = \frac{X^2 + Y^2}{(1 + X)^2 + Y^2}$$

Por tanto

$$X^2(1 - M^2) - 2M^2X - M^2 + (1 - M^2)Y^2 = 0 \qquad (8\text{-}15)$$

Si $M = 1$, entonces, a partir de la ecuación (8−15), obtenemos $\mathrm{X} = -\frac{1}{2}$. Ésta es la ecuación de una recta paralela al eje Y y que pasa por el punto $(-\frac{1}{2}, 0)$.

Si $M \neq 1$, la ecuación (8-15) se escribe

$$X^2 + \frac{2M^2}{M^2 - 1}X + \frac{M^2}{M^2 - 1} + Y^2 = 0$$

Si se agrega el término $M^2/(M^2 - 1)^2$ a ambos miembros de esta última ecuación, obtenemos

$$\left(X + \frac{M^2}{M^2 - 1}\right)^2 + Y^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2} \qquad (8\text{–}16)$$

La ecuación (8-16) es la de un círculo con centro en $\mathrm{X} = -M^2/(M^2 - 1)$, Y = 0 y con radio $|M/(M^2 - 1)|$.

Vemos así que los lugares geométricos de *M* constante sobre el plano G(s) forman una familia de círculos. El centro y el radio del círculo para un valor determinado de *M* se calcu-

lan con facilidad. Por ejemplo, para $M = 1.3$, el centro está en $(-2.45, 0)$ y el radio es de 1.88. La figura 8-86 muestra una familia de círculos de M constante. Se observa que, conforme M aumenta con respecto a 1, los círculos M se reducen y convergen en el punto $-1 + j0$. Para $M > 1$, los centros de los círculos M se encuentran a la izquierda del punto $-1 + j0$. Asimismo, conforme M disminuye con respecto a 1, el círculo M se vuelve más pequeño y converge en el origen. Para $0 < M < 1$, los centros de los círculos M se encuentran a la derecha del origen. $M = 1$ corresponde al lugar geométrico de los puntos equidistantes del origen y el punto $-1 + j0$. Como se planteó antes, se trata de una recta que pasa por el punto $(-\frac{1}{2}, 0)$, paralela al eje imaginario. (Los círculos de M constante que corresponden a $M > 1$ se encuentran a la izquierda de la recta $M = 1$ y los que corresponden a $0 < M < 1$ se encuentran a la derecha de la misma.) Los círculos M son simétricos con respecto a la recta que corresponde a $M = 1$ y al eje real.

Lugares geométricos de ángulo de fase constante (círculos N). Obtendremos el ángulo de fase α en términos de X y Y. Dado que

$$\angle e^{j\alpha} = \angle \frac{X + jY}{1 + X + jY}$$

el ángulo de fase α es

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{Y}{1 + X}\right)$$

Si definimos

$$\text{tana} = N$$

entonces

$$\text{N} = \tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{Y}{1 + X}\right)\right]$$

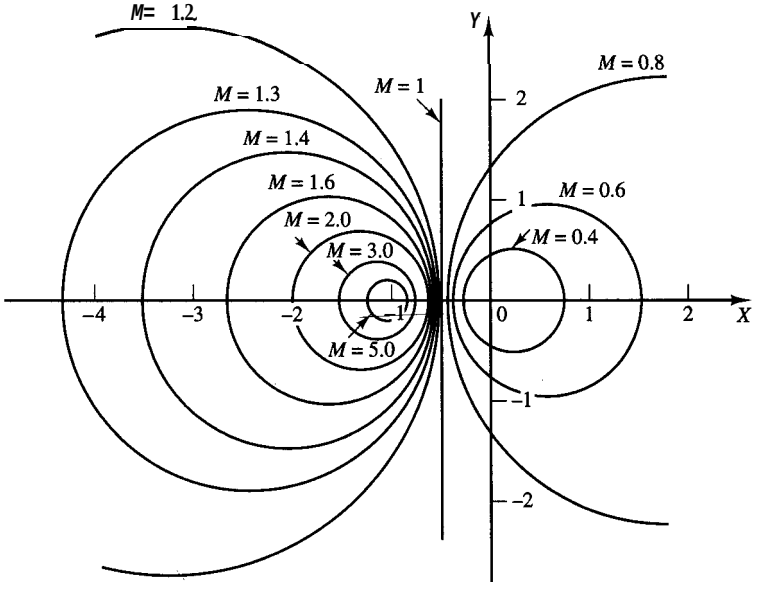


Figura 8-86
Una familia de círculos de M constante.

Dado que

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

obtenemos

$$N = \frac{\dfrac{Y}{X} \quad \dfrac{Y}{1+X}}{1 + \dfrac{Y}{X}\left(\dfrac{Y}{1+X}\right)} = \frac{Y}{X^2 + X + Y^2}$$

o bien

$$X^2 + X + Y^2 - \frac{1}{N}Y = 0$$

La adición de $(\frac{1}{4}) + 1/(2N)^2$ a ambos miembros de esta ultima ecuación nos lleva a

$$\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N}\right)^2 \tag{8-17}$$

Ésta es la ecuación de un cfrculo con centro en X = $-\frac{1}{2}$, Y = $1/(2N)$ y radio de $\sqrt{(\frac{1}{4}) + 1/(2N)^2}$. Por ejemplo, si $\alpha = 30°$, N = tan α = 0.577 y el centro y el radio del círculo correspondiente a $\alpha = 30°$ son $(-0.5, 0.866)$ y la unidad, respectivamente. Dado que la ecuación (8− 17) se satisface para X = Y = 0 y X = -1, Y = 0 sin considerar el valor de N, cada círculo pasa por el origen y el punto -1 + $j0$. Los lugares geométricos de α constantes se trazan con facilidad una vez obtenido el valor de N. La figura 8-87 contiene una familia de cfrculos de N constantes con a como parámetro.

Debe señalarse que el lugar geométrico de N constante para un valor determinado de α no es en realidad el círculo completo, sino sólo un arco. En otras palabras, los arcos a = 30" y a = -150" son partes de un mismo cfrculo. Esto es así porque la tangente de un ángulo no cambia si se agregan al ángulo $\pm 180°$ (o múltiplos del mismo).

El uso de los cfrculos M y N nos permite encontrar toda la respuesta en frecuencia en lazo cerrado a partir de la respuesta en frecuencia en lazo abierto $G(j\omega)$, sin necesidad de calcular la magnitud y la fase de la función de transferencia en lazo cerrado en todas las frecuencias. Las intersecciones del lugar geométrico $G(j\omega)$ y los círculos M y N producen los valores de M y N en los puntos de frecuencia sobre el lugar geométrico $G(j\omega)$.

Los círculos N tienen valores múltiples en el sentido de que el círculo para $a = \alpha_1$ y aquél para $\alpha = \alpha_1 \pm 180\%$ $(n = 1, 2, \ldots)$ son iguales. Al usar los círculos N para la determinación del ángulo de fase de los sistemas en lazo cerrado debemos interpretar el valor correcto de CC. Para evitar un error, empiece en la frecuencia cero, que corresponde a $a = 0°$, y avance a frecuencias más altas. La curva del ángulo de fase debe ser continua.

Gráficamente, las intersecciones del lugar geométrico $G(j\omega)$ y los círculos M producen los valores de M para las frecuencias representadas en el lugar geométrico $G(j\omega)$. Por tanto, el círculo de M constante con el radio más pequeño tangente al lugar geométrico $G(j\omega)$ produce el valor de la magnitud del pico de resonancia M_r. Si se quiere conservar el valor del pico de resonancia menor que cierto valor, el sistema no debe encerrar el punto crítico (-1 + $j0$), ni debe haber intersecciones con el círculo M determinado y el lugar geométrico $G(j\omega)$.

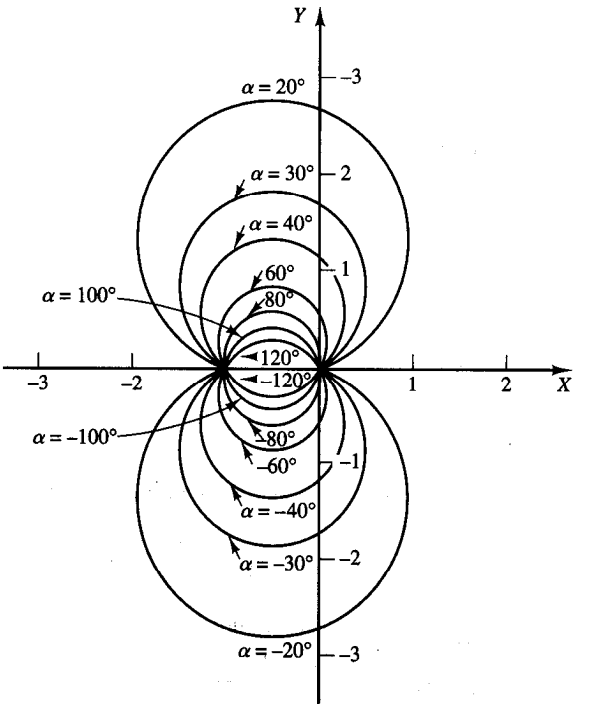


Figura *8-87*
Una familia de círculos de N constante.

La figura 8−88(a) muestra el lugar geométrico $G(j\omega)$ sobrepuesto a una familia de círculos *M*. La figura 8−88(b) muestra el mismo lugar geométrico $G(j\omega)$ sobrepuesto auna familia de círculos *N*. A partir de estas gráficas, es posible obtener, mediante inspección, la respuesta en frecuencia en lazo cerrado. Observe que el circulo $M = 1.1$ intersecta el lugar geométrico $G(j\omega)$ en el punto de frecuencia $\omega = \omega_1$. Esto significa que, en esta frecuencia, la magnitud de la función de transferencia en lazo cerrado es 1.1. En la figura 8−88(a), el círculo $M = 2$ es tangente al lugar geométrico $G(j\omega)$. Por tanto, sólo hay un punto en el lugar geométrico de $G(j\omega)$ para el cual $|C(j\omega)/R(j\omega)|$ es igual a 2. La figura 8−88(c) muestra la curva de respuesta en frecuencia en lazo cerrado para el sistema. La curva superior es la curva *M* contra la frecuencia ω y la curva inferior es el ángulo de fase α contra la curva de frecuencia ω.

El valor del pico de resonancia es el valor de *M* correspondiente al cfrculo *M* de radio más pequeño tangente al lugar geométrico $G(j\omega)$. Por tanto, en la traza de Nyquist, el valor del pico de resonancia M_r y la frecuencia de resonancia ω_r se encuentran a partir de la tangencia entre el cfrculo *M* y el lugar geométrico $G(j\omega)$. (En el ejemplo actual, $M_r = 2$ y $\omega_r = \omega_4$.)

Carta de Nichols. Al abordar problemas de diseño, encontramos conveniente construir los lugares geométricos *M y* N en el plano de la magnitud logarítmica contra la fase. El diagrama formado por estos lugares geométricos se denomina carta de Nichols Esta carta aparece en la figura 8-89, para los ángulos de fase entre 0° y -240".

Observe que el punto crítico (punto $-1 + j0$) se mapea para la carta de Nichols como el punto (0 dB, −180°). La carta de Nichols contiene las curvas de magnitud y ángulo de fase en lazo cerrado constantes. El diseñador puede determinar gráficamente el margen de fase, el margen de ganancia, la magnitud del pico de resonancia, la frecuencia del pico de resonancia y el ancho de banda del sistema en lazo cerrado a partir de la traza del lugar geométrico en lazo abierto, $G(j\omega)$.

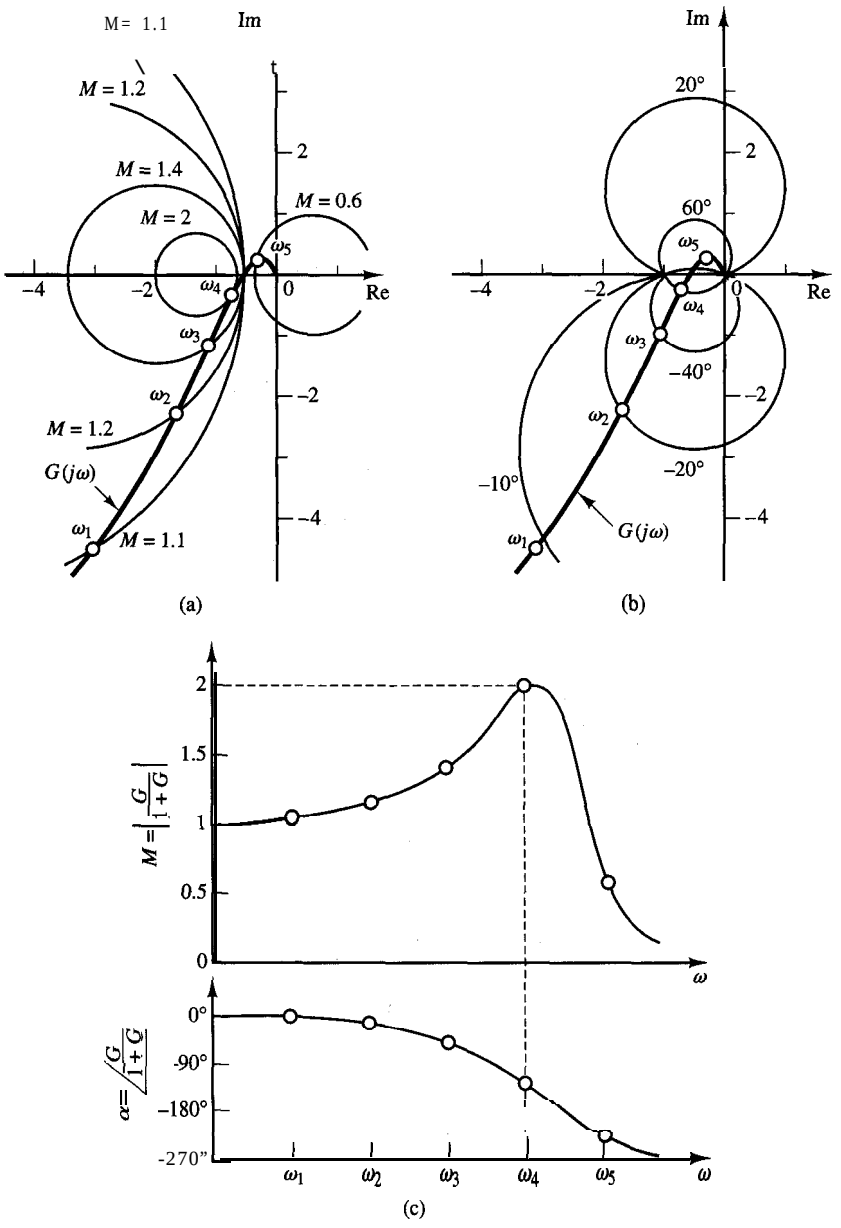


Figura 8–88
(a) Lugar geométrico $G(j\omega)$ sobrepuesto a una familia de círculos M; (b) lugar geométrico $G(j\omega)$ sobrepuesto a una familia de círculos N; (c) curvas de respuesta en frecuencia en lazo cerrado.

La carta de Nichols es simétrica con respecto al eje −180°. Los lugares geométricos M y N se repiten cada 360° y presentan una simetría en cada intervalo de 180°. Los lugares geométricos M están centrados con respecto al punto crítico (0 dB, -180°). La carta de Nichols es muy útil para determinar la respuesta en frecuencia en lazo cerrado a partir de la de lazo abierto. Si la curva de la respuesta en frecuencia en lazo abierto $G(j\omega)$ se sobrepone a la carta de Nichols, los puntos en los que interseca los lugares geométricos M y N proporcionan los valores de la magnitud M y el ángulo de fase α de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado en cada punto de frecuencia. Si el lugar geométrico $G(j\omega)$ no intersecta el lugar geo-

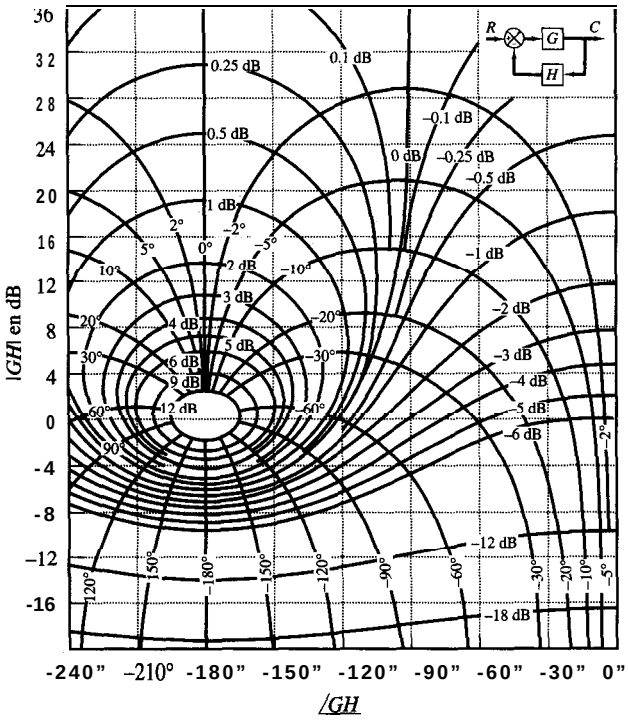


Figura 8–89
Carta de Nichols.

métrico $M = M_r$, pero es tangente a él, el valor del pico de resonancia de M de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado se obtiene de *Mr*. La frecuencia del pico de resonancia se obtiene a partir de la frecuencia en el punto de tangencia.

Como ejemplo, considere el sistema con realimentación unitaria con la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(j\omega) = \frac{K}{s(s + 1)(0.5s + 1)}, \qquad K = 1$$

Para encontrar la respuesta en frecuencia en lazo cerrado mediante la carta de Nichols, se construye el lugar geométrico $G(j\omega)$ en el plano de la magnitud logarítmica contra la fase, a partir de las trazas de Bode. El uso de las trazas de Bode elimina el extenso cálculo numérico de $G(j\omega)$. La figura 8−90(a) muestra el lugar geométrico $G(j\omega)$ junto con los lugares geométricos *My* N. Para construir las curvas de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado se leen las magnitudes y los ángulos de fase en diversos puntos de la frecuencia sobre el lugar geométrico $G(j\omega)$ a partir de los lugares geométricos *M* y N, como se aprecia en la figura 8−90(b). Dado que el contorno de mayor magnitud que toca el lugar geométrico $G(j\omega)$ es 5 dB, la magnitud del pico de resonancia M_r es 5 dB. La frecuencia del pico de resonancia correspondiente es de 0.8 rad/seg.

Observe que el punto de cruce de fase es el punto en el cual el lugar geométrico $G(j\omega)$ interseca el eje -180" (para el sistema actual, ω = 1.4 rad/seg), y el punto de cruce de la ganancia es el punto en el cual el lugar geométrico interseca el eje 0 dB (para el sistema

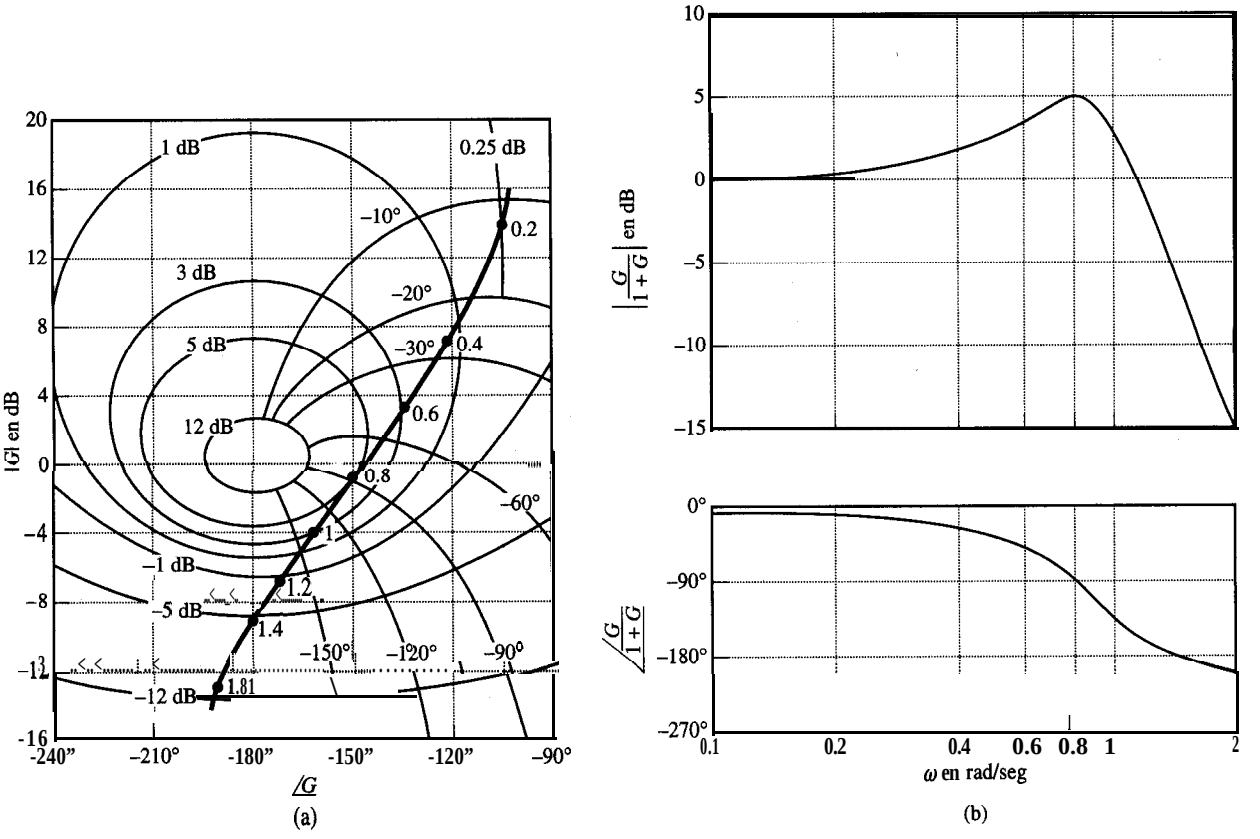


Figura 8-90
(a) Traza de $G(j\omega)$ sobrepuesta a la carta de Nichols; (b) curvas de respuesta en frecuencia en lazo cerrado.

actual, ω = 0.76 rad/seg). El margen de fase es la distancia horizontal (medida en grados) entre el punto de cruce de ganancia y el punto crítico (0 dB, -180”). El margen de ganancia es la distancia (en decibeles) entre el punto de cruce de fase y el punto crítico.

El ancho de banda del sistema en lazo cerrado se encuentra con facilidad a partir del lugar geométrico $G(j\omega)$ en la carta de Nichols. La frecuencia en la intersección del lugar geométrico $G(j\omega)$ y el lugar geométrico M = -3 dB proporciona el ancho de banda.

Si la ganancia en lazo abierto K varía, la forma del lugar geométrico $G(j\omega)$ en la traza de la magnitud logarítmica contra la fase no cambia, pero se mueve hacia arriba (al incrementar K) o hacia abajo (al decrementar K, a lo largo del eje vertical). Por tanto, el lugar geométrico $G(j\omega)$ interseca los lugares geométricos M y N en forma diferente, y genera una curva de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado distinta. Para un valor pequeño de la ganancia K, el lugar geométrico $G(j\omega)$ no es tangente a ninguno de los lugares geométricos M, lo cual significa que no hay resonancia en la respuesta en frecuencia en lazo cerrado.

Respuesta en frecuencia en lazo cerrado para sistemas con realimentación no unitaria. En las secciones anteriores, nuestro análisis se limitó a los sistemas en lazo cerra-

do con realimentación unitaria. Los lugares geométricos constantes M y N y la carta de Nichols no se aplican directamente a los sistemas de control con realimentación no unitaria, sino más bien, requieren de una ligera modificación.

Si el sistema en lazo cerrado contiene una función de transferencia con realimentación no unitaria, la función de transferencia en lazo cerrado se escribe

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

en donde G(s) es la función de transferencia de la trayectoria directa y $H(s)$ es la función de transferencia realimentada. En este caso, $C(j\omega)/R(j\omega)$ se escribe

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)H(j\omega)}{H(j\omega)\,1 + G(j\omega)H(j\omega)}$$

La magnitud y el ángulo de fase de

$$\frac{G_1(j\omega)}{1 + G_1(j\omega)}$$

en donde $G_1(j\omega) = G(j\omega)H(j\omega)$, se obtienen fácilmente graficando el lugar geométrico $G_1(j\omega)$ en la carta de Nichols y leyendo los valores de M y N en diversos puntos de la frecuencia. La respuesta en frecuencia en lazo cerrado $C(j\omega)/R(j\omega)$ se obtiene, entonces, multiplicando $G_1(j\omega)/[1 + G_1(j\omega)]$ por $1/H(j\omega)$. Esta multiplicación se lleva a cabo sin dificultad, si se dibujan trazas de Bode para $G_1(j\omega)/[1 + G_1(j\omega)]$ y $H(j\omega)$ y después se resta gráficamente la magnitud de $H(j\omega)$ de la de $G_1(j\omega)/[1 + G_1(j\omega)]$ y también se resta gráficamente el ángulo de fase de $H(j\omega)$ del de $G_1(j\omega)/[1 + G_1(j\omega)]$. De esta manera, la curva de magnitud logarítmica y la curva de ángulo de fase producen la respuesta en frecuencia en lazo cerrado $C(j\omega)/R(j\omega)$.

Con el propósito de obtener valores aceptables de M_r, ω_r, y ω_b, para $|C(j\omega)/R(j\omega)|$, puede ser necesario realizar un proceso de prueba y error. En cada prueba, se varía la forma del lugar geométrico $G_1(j\omega)$, se dibujan trazas de Bode para $G_1(j\omega)/[1 + G_1(j\omega)]$ y $H(j\omega)$, y se obtiene la respuesta en frecuencia en lazo cerrado $C(j\omega)R(j\omega)$. Deben verificarse los valores de M_r, ω_r y ωb hasta que sean aceptables.

Ajustes de la ganancia. El concepto de los círculos M no se aplicará ahora al diseño de los sistemas de control. En la obtención de un desempeño conveniente, por lo general la primera consideración es el ajuste de la ganancia. Éste se basa en un valor conveniente para el pico de resonancia.

A continuación mostraremos un método para determinar la ganancia K tal que el sistema tenga cierto valor máximo M_r, no excedido durante el rango de frecuencia completo.

Remitiéndonos a la figura 8-91, vemos que la recta tangente que va del origen al círculo M_r deseado forma un ángulo ψ, tal como se aprecia, si M_r es mayor que la unidad. El valor de sen ψ es

$$\operatorname{sen}\psi = \left|\frac{\dfrac{M_r}{M_r^2 - 1}}{\dfrac{M_r^2}{M_r^2 - 1}}\right| \quad M_r \tag{8-18}$$

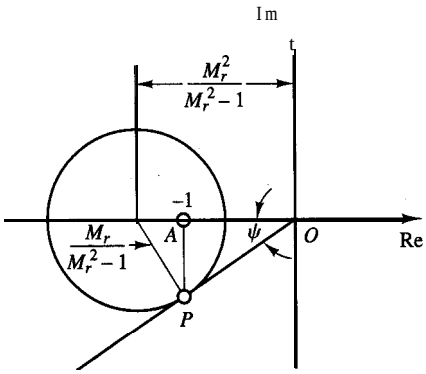


Figura 8-91
Círculo M.

Llamemos ***P*** al punto donde la recta tangente toca el círculo M_r. Es fácil comprobar que la recta dibujada desde el punto ***P,*** perpendicular al eje real negativo, interseca éste en el punto $-1 + j0$.

Considere el sistema de la figura 8-92. El procedimiento para determinar la ganancia K tal que $G(j\omega) = KG_1(j\omega)$ tenga el valor de M_r deseado (en donde $M_r > 1$) se resume del modo siguiente:

1. Dibuje la traza polar de la función de transferencia en lazo abierto normalizada $G_1(j\omega) = G(j\omega)/K$.
2. Dibuje a partir del origen la línea que forma un ángulo de $\psi = \text{sen}^{-1}(1/M_r)$ con el eje real negativo.
3. Trace un círculo con centro en el eje real negativo, tangente al lugar geométrico $G_1(j\omega)$ y a la línea ***PO.***
4. Dibuje una línea perpendicular al eje real negativo en el punto ***P,*** punto de tangencia de este círculo con la línea ***PO.*** La línea perpendicular ***PA*** interseca el eje real negativo en el punto ***A.***
5. Para que el círculo recién dibujado corresponda al círculo M_r deseado, el punto ***A*** debe ser el punto $-1 + j0$.
6. El valor deseado de la ganancia ***K*** es aquel valor que cambia la escala para que el punto ***A*** se convierta en el punto $-1 + j0$. Por tanto, $K = 1/\overline{OA}$.

Observe que la frecuencia de resonancia ω_r es la frecuencia del punto en el que el círculo es tangente al lugar geométrico $G_1(j\omega)$. El procedimiento actual tal vez no produzca un valor satisfactorio para ω_r. De ser así, debe compensarse el sistema a fin de incrementar el

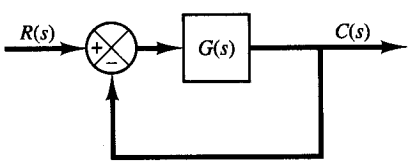


Figura 8–92
Sistema de control.

valor de ω_r sin cambiar el valor de M_r. (Para la compensación de los sistemas de control mediante los métodos de la respuesta en frecuencia, véase el capítulo 9.)

Observe también que si el sistema tiene una realimentación no unitaria el método requiere de algunos pasos de corte y prueba.

EJEMPLO 8-22 Considere el sistema de control con realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + j\omega)}$$

Determine el valor de la ganancia K tal que $M_r = 1.4$.

El primer paso para determinar la ganancia K es dibujar la traza polar de

$$\frac{G(j\omega)}{K} = \frac{1}{j\omega(1 + jw)}$$

como se aprecia en la figura 8-93. El valor de ψ que corresponde a $M_r = 1.4$ se obtiene de

$$\psi = \text{sen}^{-1}\frac{1}{M_r} = \text{sen}^{-1}\frac{1}{1.4} = 45.6°$$

El paso siguiente es dibujar la línea OP que forma un ángulo $\psi = 45.6°$ con el eje real negativo. Después, se dibuja un círculo tangente al lugar geométrico $G(j\omega)/K$ y a la línea OP. Defina como P el punto en el cual el círculo es tangente a la línea 45.6°. La línea perpendicular trazada desde el punto P interseca el eje real negativo en $(-0.63, 0°)$. Así, la ganancia K del sistema se determina del modo siguiente:

$$K = \frac{1}{0.63} = 1.59$$

Debe señalarse que tal determinación de la ganancia también se obtiene con facilidad de la traza de magnitud logarítmica contra la fase. A continuación mostraremos cómo se usa la traza de la magnitud logarítmica contra la fase para determinar la ganancia K, de modo que el sistema tenga el valor de M_r que se busca.

La figura 8-94 muestra el lugar geométrico $M_r = 1.4$ y el lugar geométrico $G(j\omega)/K$. Cambiar la ganancia no afecta el ángulo de fase, sino simplemente mueve la curva hacia arriba para $K > 1$ y hacia abajo para $K < 1$. En la figura 8-94, el lugar geométrico $G(j\omega)/K$ debe elevarse 4 dB para

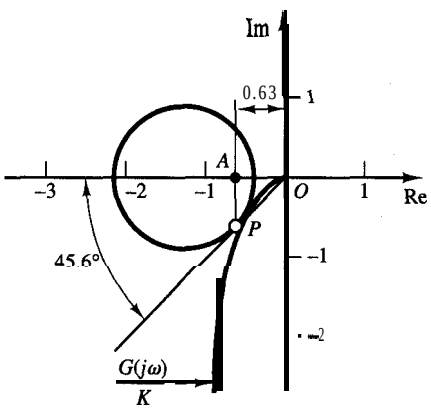


Figura 8-93
Determinación de la ganancia K mediante un círculo M.

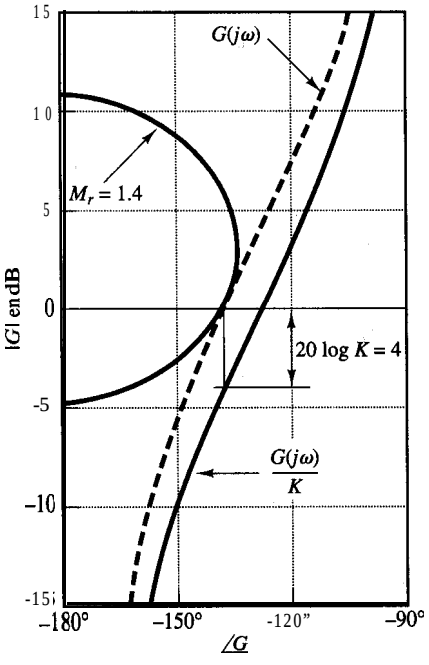


Figura 8-94
Determinación de la ganancia K mediante la carta de Nichols.

que sea tangente al lugar geométrico M_r deseado y para que el lugar geométrico $G(j\omega)/K$ completo esté fuera del lugar geométrico $Mr = 1.4$. La cantidad de cambio vertical del lugar geométrico $G(j\omega)/K$ determina la ganancia necesaria para producir el valor deseado de M_r. Por tanto, despejando

$$2010gK = 4$$

obtenemos

$$K = 1.59$$

Así, tenemos el mismo resultado que antes,

8-11 DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

El primer paso en el análisis y diseño de un sistema de control es obtener un modelo matemático de la planta que se considera. La obtención analítica de un modelo resulta ser bastante difícil. Puede lograrse mediante un análisis experimental. La importancia de los métodos de la respuesta en frecuencia es que la función de transferencia de la planta, o de cualquier otro componente del sistema, se determina mediante mediciones simples de la respuesta en frecuencia.

Si se han medido la razón de amplitudes y el cambio de fase de un número suficiente de frecuencias dentro del rango de frecuencias que interesa, pueden graficarse en las trazas de Bode. Luego se determina la función de transferencia mediante aproximaciones asintóticas. Se construyen curvas asintóticas de magnitud logarítmica con varios segmentos. Con cierto manejo de prueba y error de las frecuencias de esquina, por lo general es posible encontrar un ajuste muy cercano para la curva. (Observe que si se grafica la frecuencia

en ciclos por segundo, y no en radianes por segundo, las frecuencias de esquina deben convertirse en radianes por segundo antes de calcular las constantes de tiempo.)

Generadores de señales senoidales. Al desarrollar una prueba de la respuesta en frecuencia, debe contarse con generadores de señales senoidales. Es posible que la señal tenga que estar en forma mecánica, eléctrica o neumática. Los rangos de frecuencia necesarios para la prueba son, aproximadamente, 0.001 a 10 Hz para sistemas con constantes de tiempo grandes y 0.1 a 1000 Hz para sistemas con constantes de tiempo pequeñas. La señal senoidal debe estar razonablemente libre de armónicos o distorsión.

Para rangos de frecuencias muy bajas (debajo de 0.01 Hz), tal vez se use un generador de señales mecánicas (junto con un transductor neumático o eléctrico conveniente, si es necesario). Para el rango de frecuencias de 0.01 a 1000 Hz, puede requerirse de un generador de señales eléctricas conveniente (junto con un trasductor adecuado, si es necesario).

Determinación de las funciones de transferencia de fase mínima a partir de las trazas de Bode. Como se mencionó antes, es posible determinar a partir de las curvas de la respuesta en frecuencia si un sistema es de fase mínima examinando las características de alta frecuencia.

Para determinar la función de transferencia, primero se dibujan asíntotas para la curva de magnitud logarítmica obtenida en forma experimental. Las asíntotas deben tener pendientes de múltiplos de ±20 dB/década. Si la pendiente de la curva de magnitud logarítmica obtenida experimentalmente cambia de -20 a -40 dB/década en $\omega = \omega_1$, es evidente que existe un factor $1/[1 + j(\omega/\omega_1)]$ en la función de transferencia. Si la pendiente cambia -40 dB/década en $\omega = \omega_2$, debe haber un factor cuadrático de la forma

$$\frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_2}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}$$

en la función de transferencia. La frecuencia natural no amortiguada de este factor cuadrático es igual a la frecuencia de esquina ω_2. El factor de amortiguamiento relativo ζ se determina a partir de la curva de magnitud logarítmica obtenida en forma experimental de la medida de la cantidad del pico de resonancia cerca de la frecuencia de esquina ω_2 y la comparación de esto con las curvas de la figura 8-8.

Una vez determinados los factores de la función de transferencia $G(j\omega)$, la ganancia se establece a partir de la parte de la curva de la magnitud logarítmica con baja frecuencia. Dado que términos como $1 + j(\omega/\omega_1)$ y $1 + 2\zeta(j\omega/\omega_2) + (j\omega/\omega_2)^2$ se vuelven unitarios conforme ω tiende a cero, en frecuencias muy bajas, la función de transferencia senoidal $G(j\omega)$ se escribe

$$\lim_{\omega \to 0} G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2}$$

En muchos sistemas prácticos, λ es igual a 0, 1 o 2.

1. Para $\lambda = 0$, o sistemas de tipo 0,

$$G(j\omega) = K, \qquad \text{para } \omega \ll 1$$

o bien

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K, \qquad \text{para } \omega \ll 1$$

La asíntota de frecuencia baja es una línea horizontal en 20 log K dB. Por tanto, el valor de K se encuentra a partir de esta asíntota horizontal.

2. Para $\lambda = 1$, o sistemas de tipo 1,

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega}, \qquad \text{para } \omega \ll 1$$

o bien

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K - 20 \log \omega, \qquad \text{para } \omega \ll 1$$

lo cual indica que la asíntota de frecuencia baja tiene la pendiente -20 dB/década. La frecuencia a la cual esta asíntota de frecuencia baja (o su extensión) interseca la línea 0 dB es numéricamente igual a K.

3. Para $\lambda = 2$, o sistemas de tipo 2,

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2}, \qquad \text{para } \omega \ll 1$$

o bien

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K - 40 \log \omega, \qquad \text{para } \omega \ll 1$$

La pendiente de la asíntota de frecuencia baja es -40 dB/década. La frecuencia a la cual esta asíntota (o su extensión) interseca la línea 0 dB es numéricamente igual a K.

La figura 8-95 contiene ejemplos de las curvas de magnitud logarítmica para los sistemas de tipo 0, de tipo 1 y de tipo 2, junto con la frecuencia con la cual se relaciona la ganancia K.

La curva del ángulo de fase obtenida en forma experimental ofrece un medio de verificar la función de transferencia obtenida a partir de la curva de magnitud logarítmica. Para un sistema de fase mínima, la curva del ángulo de fase experimental debe coincidir con la curva del ángulo de fase teórico, obtenida de la función de transferencia recién determinada. Estas dos curvas del ángulo de fase deben coincidir en los rangos de frecuencia muy baja y muy alta. Si el ángulo de fase obtenido experimentalmente en frecuencias muy altas (en comparación con las frecuencias de esquina) no es igual a $-90°(q - p)$, en donde p y q son los grados de los polinomios del numerador y el denominador de la función de transferencia, respectivamente, la función de transferencia debe ser de fase no mínima.

Funciones de transferencia de fase no mínima. Si en el extremo de alta frecuencia, el atraso de fase calculado es 180" menor que el atraso de fase obtenido en forma experimental, uno de los ceros de la función de transferencia debe encontrarse en el semiplano derecho del plano s, y no en el semiplano izquierdo del plano s.

Si el atraso de fase calculado difiere del atraso de fase obtenido de manera experimental por una velocidad constante de cambio de fase, hay un retardo de transporte presente, o tiempo muerto. Si suponemos que la función de transferencia tiene la forma

$$G(s)e^{-Ts}$$

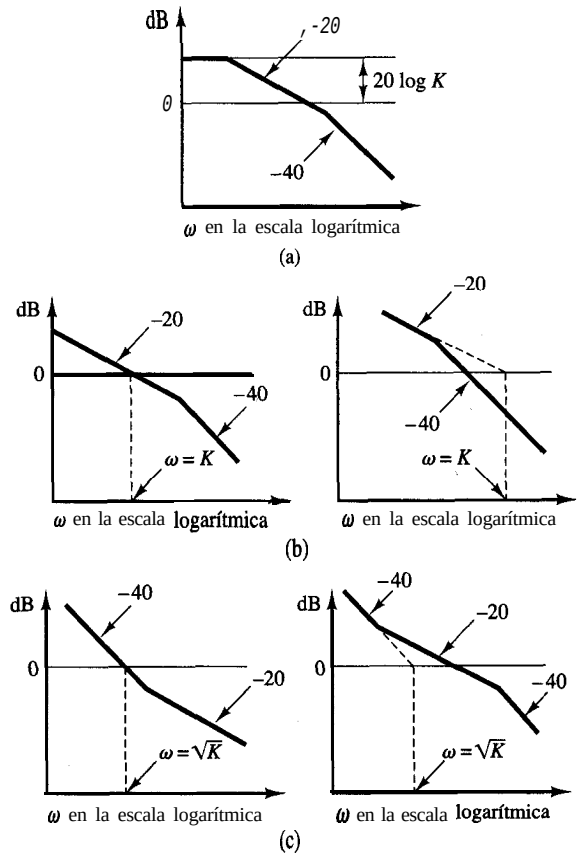


Figura 8-95
(a) Curva de magnitud logarítmica de un sistema de tipo 0; (b) curvas de magnitud logarítmica de sistemas de tipo 1; (c) curvas de magnitud logarítmica de sistemas de tipo 2. (Las pendientes que se muestran están en dB/década.)

en donde G(s) es un cociente de dos polinomios en s, por tanto

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{d}{d\omega}\underline{/G(j\omega)e^{-j\omega T}} = \lim_{\omega\to\infty}\frac{d}{d\omega}\left[\underline{/e^{-j\omega T}}\right] + \lim_{\omega\to\infty}\frac{d}{d\omega}\left[\underline{/G(j\omega)} - \omega T\right]$$
$$= 0 - T = -T$$

Así, a partir de esta ecuación, podemos evaluar la magnitud del retardo de transporte ***T.***

Algunos comentarios sobre la determinación experimental de las funciones de transferencia

1. Por lo general es más fácil obtener mediciones precisas de la amplitud que del corrimiento de fase. Las mediciones del corrimiento de fase pueden implicar errores debidos a la instrumentación o a la interpretación errónea de los registros experimentales.

2. La respuesta en frecuencia del equipo de medición usado para medir la salida del sistema debe tener una curva de magnitud contra frecuencia casi plana. Además, el ángulo de fase debe ser casi proporcional a la frecuencia.

3. Los sistemas físicos tienen varios tipos de no linealidades. Por tanto, es necesario considerar con cuidado la amplitud de las señales senoidales de entrada. Si la amplitud de la señal de entrada es demasiado grande, el sistema se saturará y la prueba de la respuesta en frecuencia producirá resultados imprecisos. En cambio, una señal pequeña provocará errores debidos a la zona muerta. Por tanto, debe hacerse una cuidadosa elección de la amplitud de la señal senoidal de entrada. Es necesario muestrear la forma de la onda de la salida del sistema para asegurarse que sea senoidal y de que el sistema opere en su región lineal durante el periodo de prueba. (La forma de la onda de la salida del sistema no es senoidal cuando el sistema opera en su región no lineal.)

4. Si el sistema que se considera opera en forma continua durante días y semanas, no es necesario detener la operación normal para las pruebas de la respuesta en frecuencia. La señal de prueba senoidal se sobrepone a las entradas normales. Después, para los sistemas lineales, la salida provocada por la señal de prueba se sobrepone a la salida normal. Para la determinación de la función de transferencia, conforme el sistema está en operación normal, también es común el uso de señales estocásticas (señales de ruido blanco). Mediante las funciones de correlación se determina la función de transferencia del sistema sin interrumpir la operación normal.

EJEMPLO 8-23 Determine la función de transferencia del sistema cuyas curvas de respuesta en frecuencia experimentales aparecen en la figura 8-96.

El primer paso para determinar la función de transferencia es aproximar la curva de magnitud logarítmica mediante asíntotas con pendientes de ± 20 dB/década y múltiplos de la misma, como se aprecia en la figura 8-96. Después, se estiman las frecuencias de esquina. Para el sistema de la figura 8-96, se estima la siguiente forma de la función de transferencia:

$$G(j\omega) = \frac{K(1 + 0.5j\omega)}{j\omega(1 + j\omega)\left[1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{8}\right) + \left(j\frac{\omega}{8}\right)^2\right]}$$

El valor del factor de amortiguamiento relativo ζ se estima examinando el pico de resonancia cerca de $\omega = 6$ rad/seg. Remitiendonos a la figura 8-8, se determina que ζ sea 0.5. La ganancia K es numéricamente igual a la frecuencia de la intersección de la extensión de la asintota de baja frecuencia con la línea 0 dB. Por tanto, el valor de K resulta ser 10. Así, $G(j\omega)$ se determina tentativamente como

$$G(j\omega) = \frac{10(1 + 0.5j\omega)}{j\omega(1 + j\omega)\left[1 + \left(j\frac{\omega}{8}\right) + \left(j\frac{\omega}{8}\right)^2\right]}$$

o bien

$$G(s) = \frac{320(s + 2)}{s(s + 1)(s^2 + 8s + 64)}$$

Esta función de transferencia es tentativa porque todavía no hemos examinado la curva del ángulo de fase.

Una vez que se señalan las frecuencias de esquina en la curva de magnitud logarítmica, es fácil dibujar la curva del ángulo de fase correspondiente para todos los factores que componen la

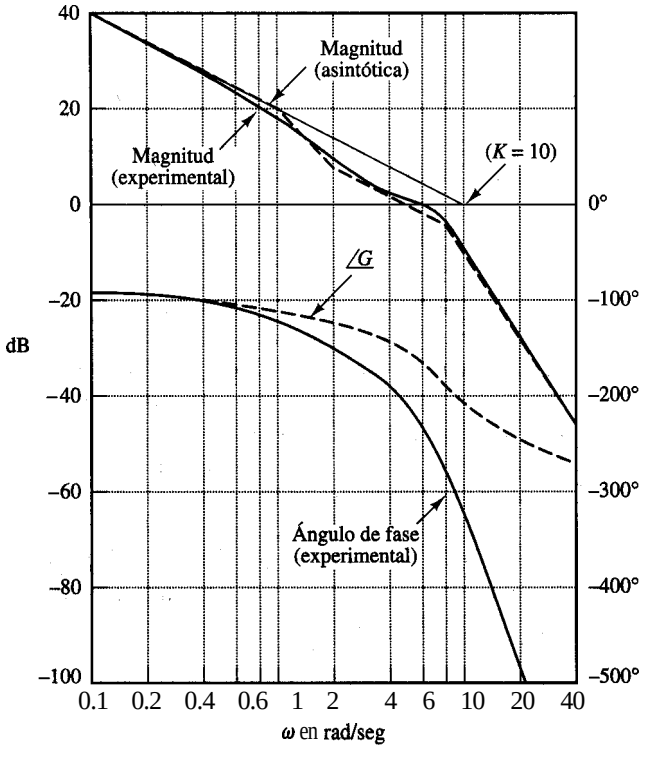


Figura 8–96
Trazas de Bode de un sistema. (Las curvas sólidas se obtuvieron experimentalmente.)

función de transferencia. La suma de estas curvas componentes del ángulo de fase es la suma de la función de transferencia supuesta. La curva del ángulo de fase para $G(j\omega)$ se representa mediante $\underline{/G}$ en la figura 8-96. Ahí se observa claramente una discrepancia entre la curva del ángulo de fase calculada y la curva del ángulo de fase obtenida en forma experimental. La diferencia entre las dos curvas para frecuencias muy altas parece ser una razón de cambio constante. Por tanto, la discrepancia en las curvas del ángulo de fase debe ser provocada por un retardo de transporte.

De esta manera, suponemos que la función de transferencia completa es $G(s)e^{-Ts}$. Dado que la discrepancia entre el ángulo de fase calculado y el experimental es de -0.2ω rad para frecuencias muy altas, determinamos el valor de T del modo siguiente

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{d}{d\omega} \underline{/G(j\omega)e^{-j\omega T}} = -T = -0.2$$

o bien

$$T = 0.2 \text{ seg}$$

Por tanto, puede determinarse la presencia de un retardo de transporte, y la función de transferencia completa obtenida de las curvas experimentales es

$$G(s)e^{-Ts} = \frac{320(s+2)e^{-0.2s}}{s(s+1)(s^2+8s+64)}$$

A-8-1. Considere un sistema cuya función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10(s + 1)}{(s + 2)(s + 5)}$$

(Se trata del mismo sistema considerado en el **problema A-6-9.)** Es evidente que los polos en lazo cerrado se ubican en s = -2 y s = -5 y que el sistema es no oscilatorio. (Sin embargo, la respuesta escalón unitario exhibe un sobrepaso debido a la presencia de un cero en s = — 1. Véase la figura 6-51.)

Demuestre que la respuesta en frecuencia en lazo cerrado de este sistema exhibe un pico de resonancia, aunque el factor de amortiguamiento relativo de los polos en lazo cerrado sea mayor que la unidad.

Solución. La figura 8-97 muestra las trazas de Bode para el sistema. El valor del pico de resonancia es, aproximadamente, de 3.5 **dB.** (Observe que, en la ausencia de un cero, el sistema de segundo orden con $\zeta > 0.7$ no exhibirá un pico de resonancia; sin embargo, la presencia de un cero en lazo cerrado provocará tal pico.)

A-8-2. Grafique las trazas de Bode para la siguiente función de transferencia en lazo abierto G(s):

$$G(s) = \frac{20(s^2 + s + 0.5)}{s(s + 1)(s + 10)}$$

Solución. Sustituyendo s por (jo) en G(s), tenemos que

$$G(j\omega) = \frac{20[(j\omega)^2 + (jw) + 0.5]}{j\omega(j\omega + 1)(j\omega + 10)}$$

Observe que ω_n y ζ del término cuadrático en el numerador son

$$\omega_n = \sqrt{0.5} \qquad \text{y} \qquad \zeta = 0.707$$

Este término cuadrático se escribe como

$$\omega_n^2\left[\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + 1\right] = (\sqrt{0.5})^2\left[\left(j\frac{\omega}{\sqrt{0.5}}\right)^2 + 2 \times 0.707\left(j\frac{\omega}{\sqrt{0.5}}\right) + 1\right]$$

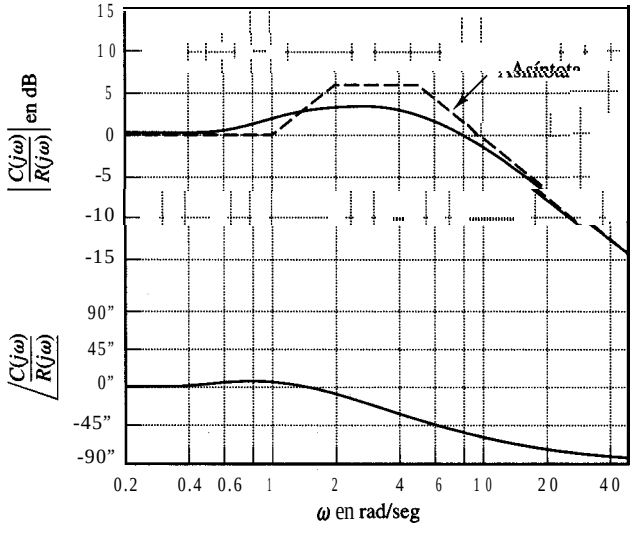


Figura 8-97
Trazas de Bode para $10(1 + j\omega)/[(2 + j\omega)(5 + j\omega)]$.

Observe que la frecuencia de esquina está en $\omega = \sqrt{0.5} = 0.707$ rad/seg. Ahora $G(j\omega)$ se escribe como

$$G(j\omega) = \frac{\left(j\frac{\omega}{\sqrt{0.5}}\right)^2 + 1.414\left(j\frac{\omega}{\sqrt{0.5}}\right) + 1}{j\omega(j\omega + 1)(0.1j\omega + 1)}$$

Las trazas de Bode para $G(j\omega)$ aparecen en la figura 8-98.

A-8-3. Dibuje las trazas de Bode del siguiente sistema de fase no mínima:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = 1 - Ts$$

Obtenga la respuesta rampa unitaria del sistema y grafique c(t) contra t.

Solución. Las trazas de Bode del sistema aparecen en la figura 8-99. Para una entrada rampa unitaria, $R(s) = 1/s^2$, tenemos que

$$C(s) = \frac{1-Ts}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s}$$

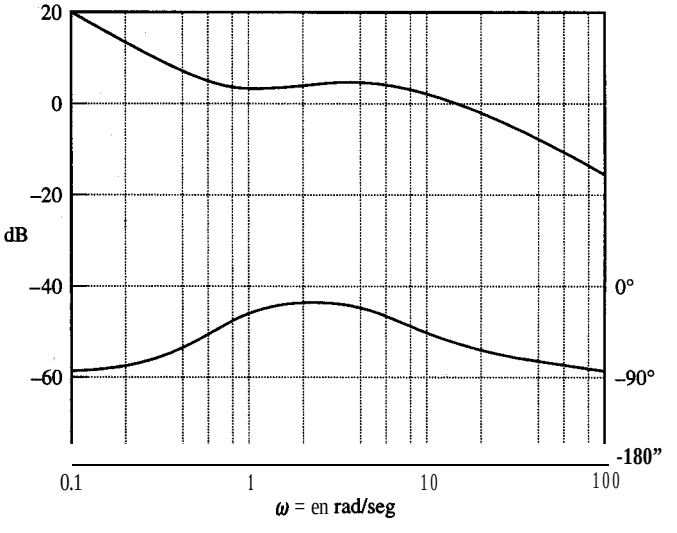


Figura 8-98
Trazas de Bode para $G(j\omega)$ del problema A-8-2.

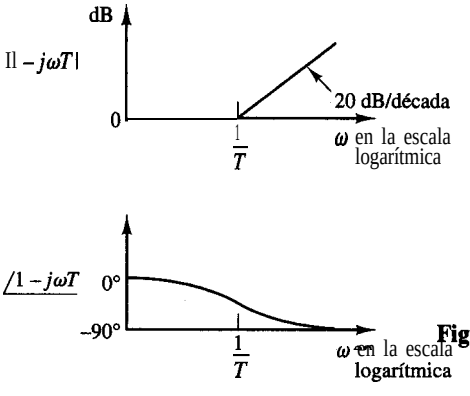


Figura 8–99
Trazas de Bode de $1 - j\omega T$.

Las transformadas inversas de Laplace de $C(s)$ producen

$$c(t) = t - T, \qquad \text{para } t \geq 0$$

La figura 8-100 muestra la curva de respuesta c(t) contra t. (Observe el comportamiento defectuoso al inicio de respuesta.) Una propiedad característica de la fase no mínima es que la respuesta transitoria empieza en la dirección opuesta a la entrada, pero regresa en la misma dirección.

A-8-4. Considere el sistema definido mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Obtenga las funciones de transferencia senoidales $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$, $Y_2(j\omega)/U_1(j\omega)$, $Y_1(j\omega)/U_2(j\omega)$ y $Y_2(j\omega)/U_2(j\omega)$. Al obtener $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$ y $Y_2(j\omega)/U_1(j\omega)$, suponemos que $U_2(j\omega) = 0$. Asimismo, al obtener $Y_1(j\omega)/U_2(j\omega)$ y $Y_2(j\omega)/U_2(j\omega)$, suponemos que $U_1(j\omega) = 0$. Obtenga también las trazas de Bode de estas cuatro funciones de transferencia con MATLAB.

Solución. La expresión de la matriz de transferencia para el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

se obtiene por medio de

$$\mathbf{Y(s)} = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s)$$

en donde G(s) es la matriz de transferencia y se obtiene a partir de

$$\mathbf{G(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Para el sistema aquí considerado, la matriz de transferencia se vuelve

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 25 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + 4s + 25} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -25 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{s+4}{s^2+4s+25} & \dfrac{s+5}{s^2+4s+25} \\ \dfrac{-25}{s^2+4s+25} & \dfrac{s-25}{s^2+4s+25} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

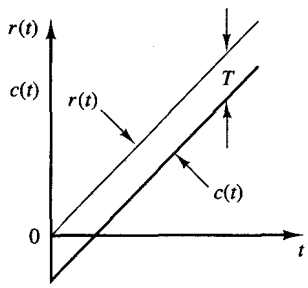


Figura 8-100
Respuesta rampa unitaria del sistema considerado en el problema A-8-3.

Por tanto,

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+4}{s^2+4s+25} & \dfrac{s+5}{s^2+4s+25} \\ \dfrac{-25}{s^2+4s+25} & \dfrac{s-25}{s^2+4s+25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U,(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

Suponiendo que $U_2(j\omega) = 0$, encontramos $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$ y $Y_2(j\omega)/U_1(j\omega)$ del modo siguiente:

$$\frac{Y_1(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{j\omega + 4}{(j\omega)^2 + 4jw + 25}$$

$$\frac{Y_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{-25}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 25}$$

Asimismo, suponiendo que $U_1(j\omega) = 0$, encontramos $Y_1(j\omega)/U_2(j\omega)$ y $Y_2(j\omega)/U_2(j\omega)$ del modo siguiente:

$$\frac{Y_1(j\omega)}{U_2(j\omega)} = \frac{j\omega + 5}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 25}$$

$$\frac{Y_2(j\omega)}{U_2(j\omega)} = \frac{jo - 25}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 25}$$

Observe que $Y_2(j\omega)/U_2(j\omega)$ es una función de transferencia de fase no mínima.

Con el propósito de graficar las trazas de Bode para $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$, $Y_2(j\omega)/U_1(j\omega)$, $Y_1(j\omega)/U_2(j\omega)$ y $Y_2(j\omega)/U_2(j\omega)$ con MATLAB, usamos el comando

```
bode(A,B,C,D)
```

A continuación, MATLAB produce las trazas de Bode cuando u_1 es la entrada y u_2 es cero y cuando u_2 es la entrada y u_1 es cero. Vea el programa MATLAB 8-14 y las trazas de Bode resultantes que aparecen en la figura 8-101. [Observe que MATLAB produce dos grupos de figuras (denominadas figura 1 y figura 2) en la pantalla. La figura 8-101 está formada por estos dos conjuntos de trazas de Bode.]

Programa MATLAB 8–14

```
A = [0   1;−25   −4];
B = [1   1;0   1];
C = [1   0;0   1];
D = [0   0;0   0];
bode(A,B,C,D)
```

A-8-5. Remitiéndonos al problema A-8-4, considere una forma alternativa de graficar las trazas de Bode de este sistema. Un modo de graficar las trazas de Bode es usar el comando

```
bode(A,B,C,D,1)
```

para obtener trazas de Bode para $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$ y $Y_2(j\omega)/U_1(j\omega)$. Con el propósito de obtener trazas de Bode para $Y_1(j\omega)/U_2(j\omega)$ y $Y_2(j\omega)/U_2(j\omega)$, use el comando

```
bode(A,B,C,D,2)
```

Escriba un programa MATLAB para obtener las trazas de Bode mediante estos comandos bode.

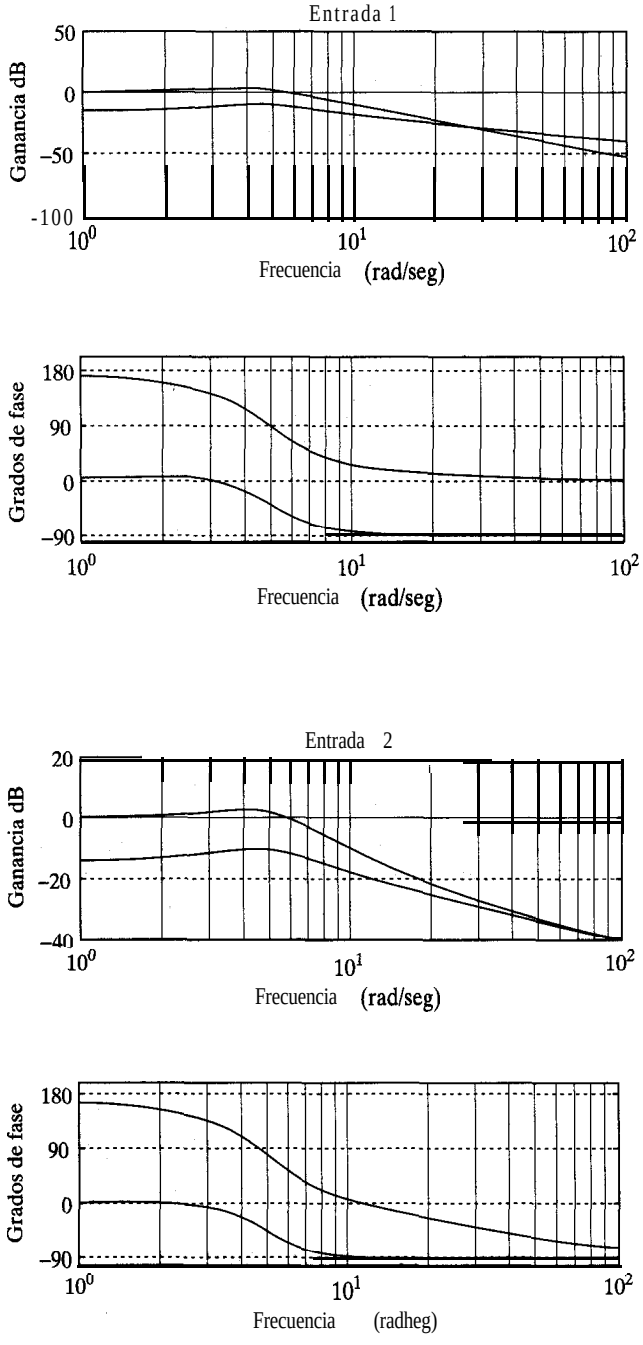


Figura 8–101
Trazas de Bode del sistema considerado en el problema A-8-4.

Programa MATLAB 8–15

```
A = [0   1;-25   -4];
B = [1   1;0   1];
C = [1   0;0   1];
D = [0   0;0   0];
bode(A,B,C,D,1)
subplot(2,1,1), title('Trazas de Bode; Entrada = u1 (u2 = 0)')
bode(A,B,C,D,2)
subplot(2,1,1), title ('Trazas de Bode; Entrada = u2 (u1 = 0)')
```

Solución. El programa MATLAB 8-15 se escribió para este problema. Las trazas de Bode producidas mediante este programa aparecen en la figura 8– 102. En estos diagramas no es fácil identificar cuáles curvas son para $Y_1(j\omega)$ y cuáles para $Y_2(j\omega)$. Por lo común se usa el comando text para identificar las curvas. Sin embargo, este comando no se aplica a los comandos bode actuales. Para usar el comando text, podemos usar el comando siguiente:

```
[mag,phase,w] = bode(A,B,C,D,iu,w)
```

Véanse los detalles en el problema A-8-6.

A-8-6. Remitiéndonos a los problemas A-8-4 y A-8-5, considere graficar las trazas de Bode para el mismo sistema analizado en dichos problemas. Use el comando text para distinguir las curvas de las trazas. Escriba un programa MATLAB posible para graficar las trazas de Bode mediante el comando siguiente:

```
[mag,phase,w] = bode(A,B,C,D,iu,w)
```

Solución. Al usar el comando especificado, considere que las matrices mag y phase contienen las magnitudes de $Y_1(j\omega)$ y $Y_2(j\omega)$ y los ángulos de fase para $Y_1(j\omega)$ y $Y_2(j\omega)$ calculados en cada punto de frecuencia considerado. Para obtener la magnitud de $Y_1(j\omega)$, use el comando siguiente:

```
Y1 = mag*[1;0]
```

Para convertir la magnitud en decibeles, use el enunciado

```
magdB = 20*log10(mag)
```

Por tanto, para convertir Y 1 a decibeles, introduzca el enunciado

```
Y1dB = 20*log10(Y1)
```

Asimismo, para graficar la magnitud de Y2 en decibeles, use el comando siguiente:

```
Y2 = mag*[0;1]
Y2dB = 20*log10(Y2)
```

A continuación, introduzca el comando

```
semilogx(w,Y1dB,'o',w,Y1dB,'-',w,Y2dB,'x',Y2dB,'-')
```

Ahora, use el comando text para escribir el texto en la figura.Véase el programa MATLAB 8-16.

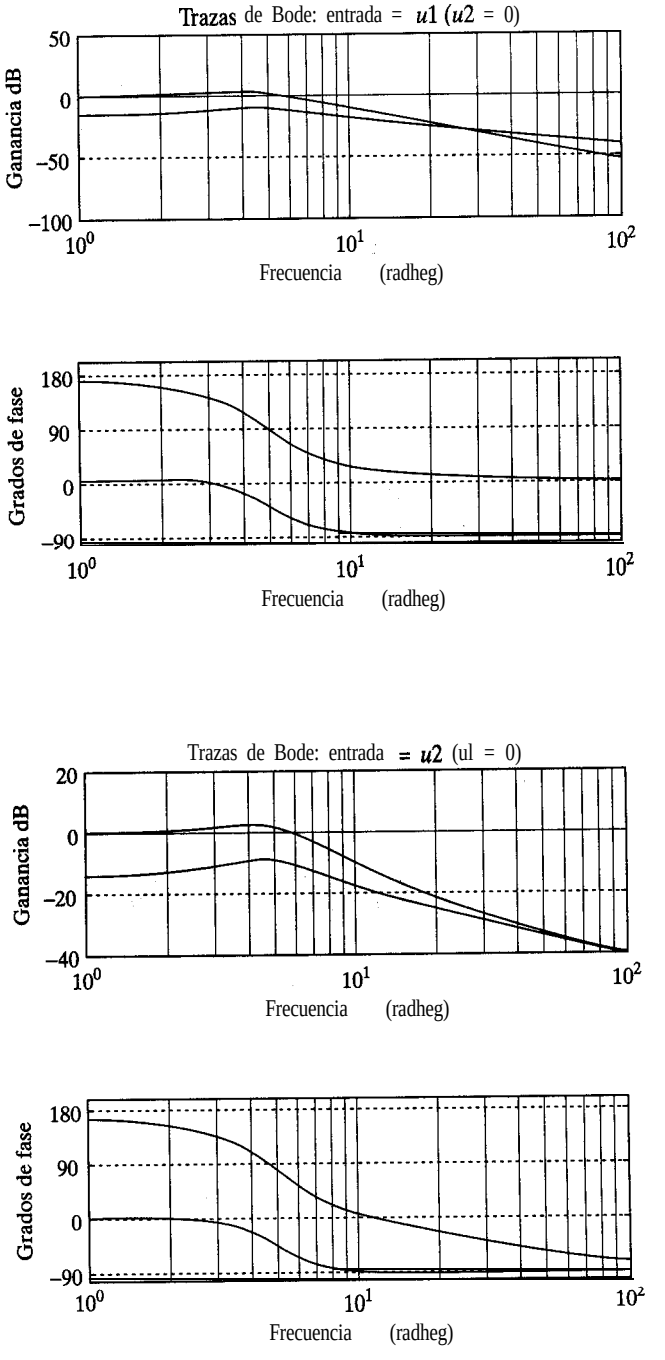


Figura 8–102
Trazas de Bode.

Programa MATLAB 8-16

```
% ***** Primero obtendremos la respuesta en frecuencia cuando u2 = 0;
% Es decir, obtenemos Y1(jw)/U1(jw) y Y2(jw)/U1(jw) *****

A = [0   1;-25   -4];
B = [1   1;0   1];
C = [1   0;0   1];
D = [0   0;0   0];
w = logspace(-1,3,100);
[mag1, phase1, w] = bode(A,B,C,D,1,w);
Y1 = mag1*[1;0]; Y1dB = 20*log10(Y1);
Y2 = mag1*[0;1]; Y2dB = 20*log10(Y2);
semilogx(w,Y1dB,'o',w,Y1dB,'-',w,Y2dB,'x',w,Y2dB,'-')
grid
subplot(2,1,1);
title('Trazas de Bode; entrada = u1 (u2 = 0)')
xlabel('Frecuencia (rad/seg)')
ylabel('Ganancia dB')
text(1.2,-10,'Y1'); text(1.2,6,'Y2')

Y1p = phase1*[1;0];
Y2p = phase1*[0;1];
semilogx(w,Y1p,'o',w,Y1p,'-',w,Y2p,'x',w,Y2p,'-')
grid
xlabel('Frecuencia (rad/seg)')
ylabel('Grados de fase')
text(1.2,25,'Y1');text(1.2,-18,'Y2')

% ***** Después obtendremos la respuesta en frecuencia cuando
% u1 = 0; es decir, obtenemos Y1(jw)/U2(jw) y Y2(jw)/U2(jw) *****

[mag2,phase2,w] = bode(A,B,C,D,2,w);
YY1 = mag2*[1;0];YY1dB = 20*log10(YY1);
YY2 = mag2*[0;1];YY2dB = 20*log10(YY2);
semilogx(w,YY1dB,'o',w,YY1dB,'-',w,YY2dB,'x',w,YY2dB,'-')
grid
subplot(2,1,1);
title('Trazas de Bode; entrada = u2 (u1 = 0)')
xlabel('Frecuencia (rad/seg)')
ylabel('Ganancia dB')
text(1.2,-17,'Y1'); text(1.2,5,'Y2')

YY1p = phase2*[1;0];
YY2p = phase2*[0;1];
semilogx(w,YY1p,'o',w,YY1p,'-',w,YY2p,'x',w,YY2p,'-')
grid
xlabel('Frecuencia (rad/seg)')
ylabel('Grados de fase')
text(1.2,20,'Y1'); text(1.2,182,'Y2')
```

Del mismo modo, para **graficar** los ángulos de fase para $Y_1(j\omega)$ y $Y_2(j\omega)$, use los comandos siguientes:

```
Y1p = phase*[1;0];
Y2p = phase*[0;1];
semilogx(w,Y1p,'o',w,Y1p,'-',w,Y2p,'x',w,Y2p,'-')
```

Las trazas de Bode obtenidas mediante el programa MATLAB 8-16 aparecen en las figuras 8-103 y 8-104.

A-8-7. Demuestre que la traza polar de la función de transferencia senoidal

$$G(j\omega) = \frac{j\omega T}{1 + j\omega T}, \qquad \text{para } 0 \leq \omega \leq \infty$$

es un semicírculo. Encuentre el centro y el radio del círculo.

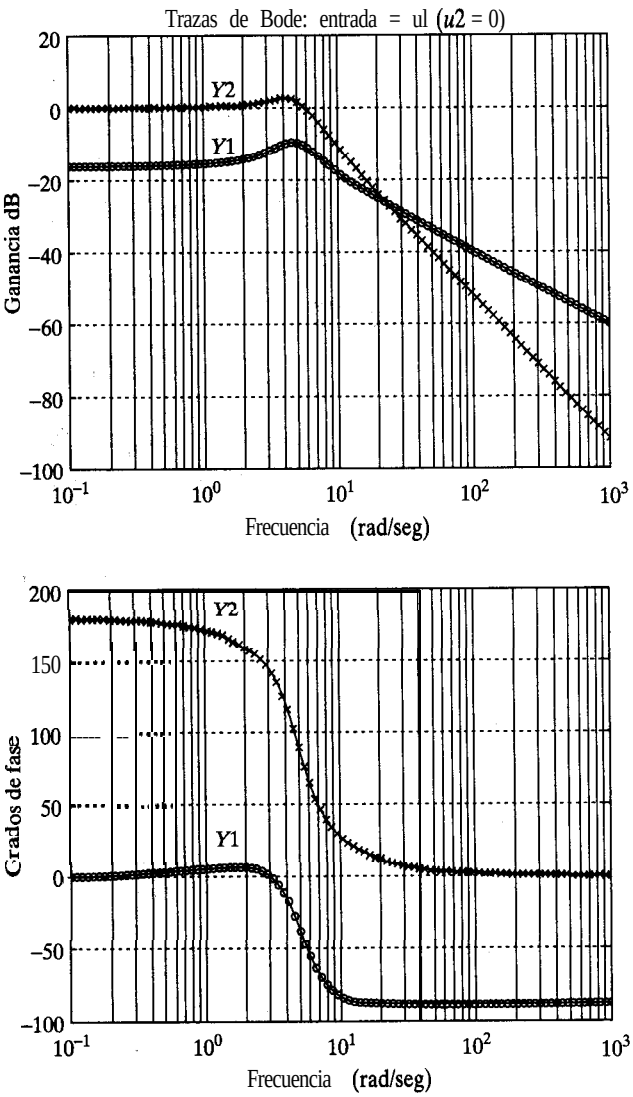


Figura 8–103
Trazas de Bode.

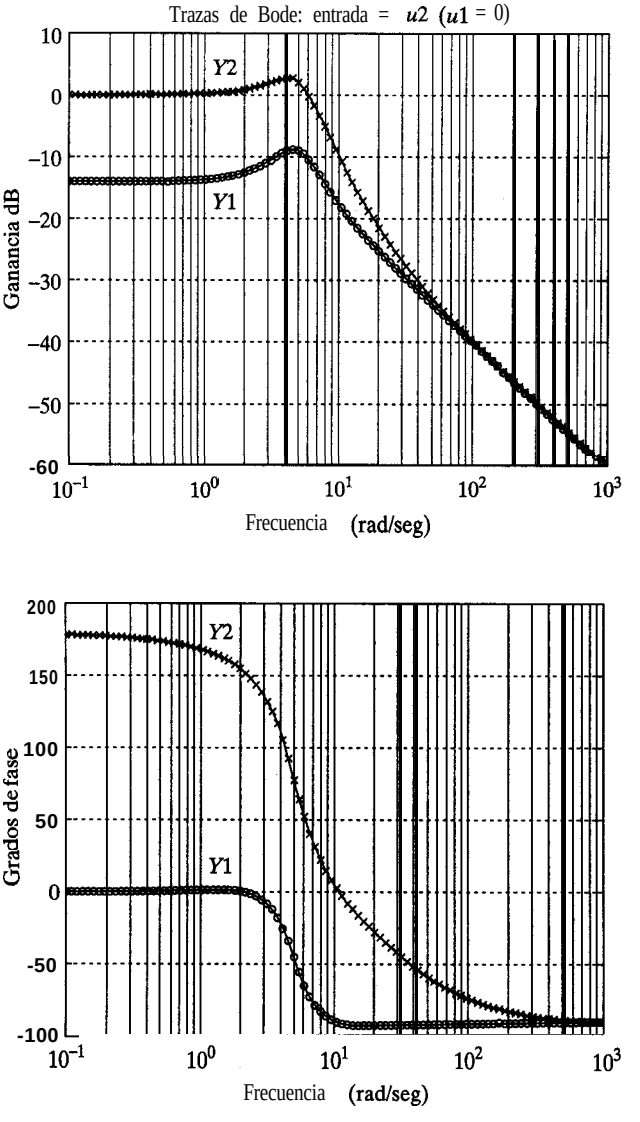


Figura 8–104
Trazas de Bode.

Solución. La función de transferencia senoidal determinada $G(j\omega)$ se escribe del modo siguiente:

$$G(j\omega) = X + jY$$

en donde

$$x = \frac{\omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2}, \qquad Y = \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

Por tanto

$$\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{(\omega^2 T^2 - 1)^2}{4(1 + \omega^2 T^2)^2} + \frac{\omega^2 T^2}{(1 + \omega^2 T^2)^2} = \frac{1}{4}$$

Así, vemos que la gráfica de $G(j\omega)$ es un círculo centrado en $(0.5, 0)$, con radio igual a 0.5. El semicírculo superior corresponde a $0 \le \omega \le \infty$ y el semicírculo inferior corresponde a $-\infty \le \omega \le 0$.

A-8-8. Remitiéndonos al problema A-8-2, grafique el lugar geométrico polar de G(s), en donde

$$G(s) = \frac{20(s^2 + s + 0.5)}{s(s + 1)(s + 10)}$$

Ubique en el lugar geométrico polar los puntos de frecuencia tales que ω = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 1.0, 2.0, 4.0, 6.0, 10.0, 20.0 y 40.0rad/seg.

Solución. Considerando que

$$G(j\omega) = \frac{2(-\omega^2 + j\omega + 0.5)}{j\omega(j\omega + 1)(0.1\, j\omega + 1)}$$

tenemos que

$$|G(j\omega)| = \frac{2\sqrt{(0.5 - \omega^2)^2 + \omega^2}}{\omega\sqrt{1 + \omega^2}\ \sqrt{1 + 0.01\,\omega^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{0.5 - \omega^2}\right) - 90° - \tan^{-1}\omega - \tan^{-1}(0.1\omega)$$

La magnitud y el ángulo de fase se obtienen como se aprecia en la tabla 8-3. (Observe que es fácil leer la magnitud en decibeles y el ángulo de fase en grados en la figura 8-98.) La magnitud en decibeles también se convierte fácilmente en un número. La figura 8-105 muestra la traza polar. Observe la existencia de un lazo en el lugar geométrico polar.

Tabla 83 Magnitud y fase de $G(j\omega)$ consideradas en el problema A-8-8

ω	$\lvert G(j\omega)\rvert$	$\angle G(j\omega)$
0.1	9.952	−84.75°
0.2	4.918	−78.96°
0.4	2.435	−64.46°
0.6	1.758	−47.53°
1.0	1.573	−24.15°
2.0	1.768	−14.49°
4.0	1.801	−22.24°
6.0	1.692	−31.10°
10.0	1.407	−45.03°
20.0	0.893	−63.44°
40.0	0.485	−75.96°

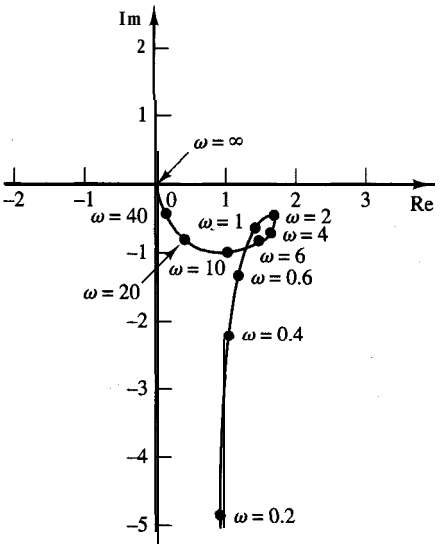


Figura 8-105
Traza polar de $G(j\omega)$ obtenida en el problema A-8-8.

A-8-9. Considere la función

$$F(s) = \frac{s+1}{s-1}$$

El mapeo conforme de las líneas $\omega = 0, \pm 1, \pm 2$ y las líneas $\sigma = 0, \pm 1, \pm 2$ genera círculos en el plano F(s), como se observa en la figura 8– 106. Demuestre que si el contorno del planos encierra el polo de F(s), el origen del plano $F(s)$ queda encerrado en sentido contrario a las manecillas del reloj. Si el contorno en el planos encierra el cero de F(s), el origen del plano $F(s)$ no queda encerrado en sentido de las manecillas del reloj. Si el contorno en el plano s encierra tanto el cero como el polo, o si el contorno no encierra el cero ni el polo, el origen del plano ***F(s)*** no queda encerrado mediante el lugar geométrico de ***F(s).*** (Considere que, en el plano ***s***, un punto representativo ***s*** traza un contorno en el sentido de las manecillas del reloj.)

Solución. La figura 8–107 aporta una solución gráfica; aquí se observan contornos cerrados en el plano ***s*** y sus curvas cerradas correspondientes en el plano ***F(s).***

A-8-10. Demuestre el siguiente teorema de mapeo: suponga que ***F(s)*** es un cociente de polinomios en s. Suponga que ***P*** es el número de polos y que Z es el número de ceros de ***F(s)*** que se encuentran dentro de un contorno cerrado en el plano s, considerada la multiplicidad. Suponga que el contorno cerrado no pasa por polos ni ceros de ***F(s).*** A continuación, el contorno cerrado en el plano ***s*** se mapea dentro del plano ***F(s)*** como una curva cerrada. El número N de encierros del origen del plano ***F(s)*** en el sentido de las manecillas del reloj, conforme un punto representativo ***s*** traza el contorno completo en el planos en el sentido de las manecillas del reloj, es igual a Z – ***P.***

Solución. Para comprobar este teorema, usamos el teorema de Cauchy y el teorema del residuo. El teorema de Cauchy plantea que la integral de $F(s)$ alrededor de un contorno cerrado en el plano ***s*** es cero si ***F(s)*** es analítica dentro del contorno cerrado y sobre él, o

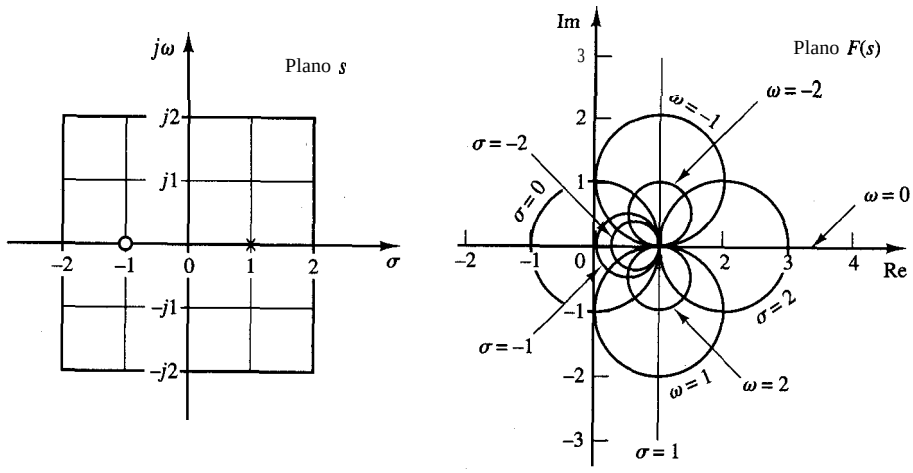


Figura 8–106
Mapeo conforme las cuadrículas del plano s dentro del plano F(s), en donde $F(s) = (s + 1)/(s - 1)$.

$$\oint F(s)\, ds = 0$$

Suponga que $F(s)$ se obtiene mediante

$$F(s) = \frac{(s + z_1)^{k_1}(s + z_2)^{k_2} \cdots}{(s + p_1)^{m_1}(s + p_2)^{m_2} \cdots} X(s)$$

en donde X(s) es analítica en el contorno cerrado en el plano s y todos los polos y ceros se localizan en el contorno. Así, el cociente $F'(s)/F(s)$ se escribe

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \left(\frac{k_1}{s + z_1} + \frac{k_2}{s + z_2} + \cdots\right) - \left(\frac{m_1}{s + p_1} + \frac{m_2}{s + p_2} + \cdots\right) + \frac{X'(s)}{X(s)} \qquad (8\text{–}19)$$

Esto se observa a partir de la consideración siguiente: si $F(s)$ se obtiene mediante

$$F(s) = (s + z_1)^k X(s)$$

entonces $F(s)$ tiene un cero de k-ésimo orden en $s = -z_1$. Diferenciar $F(s)$ con respecto a s produce,

$$F'(s) = k(s + z_1)^{k-1} X(s) + (s + z_1)^k X'(s)$$

Por tanto,

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{k}{s + z_1} + \frac{X'(s)}{X(s)} \qquad (8\text{-}20)$$

Observamos que si tomamos el cociente $F'(s)/F(s)$, el cero de k-ésimo orden de $F(s)$ se vuelve un polo sencillo de $F'(s)/F(s)$.

Ejemplo de problemas y soluciones

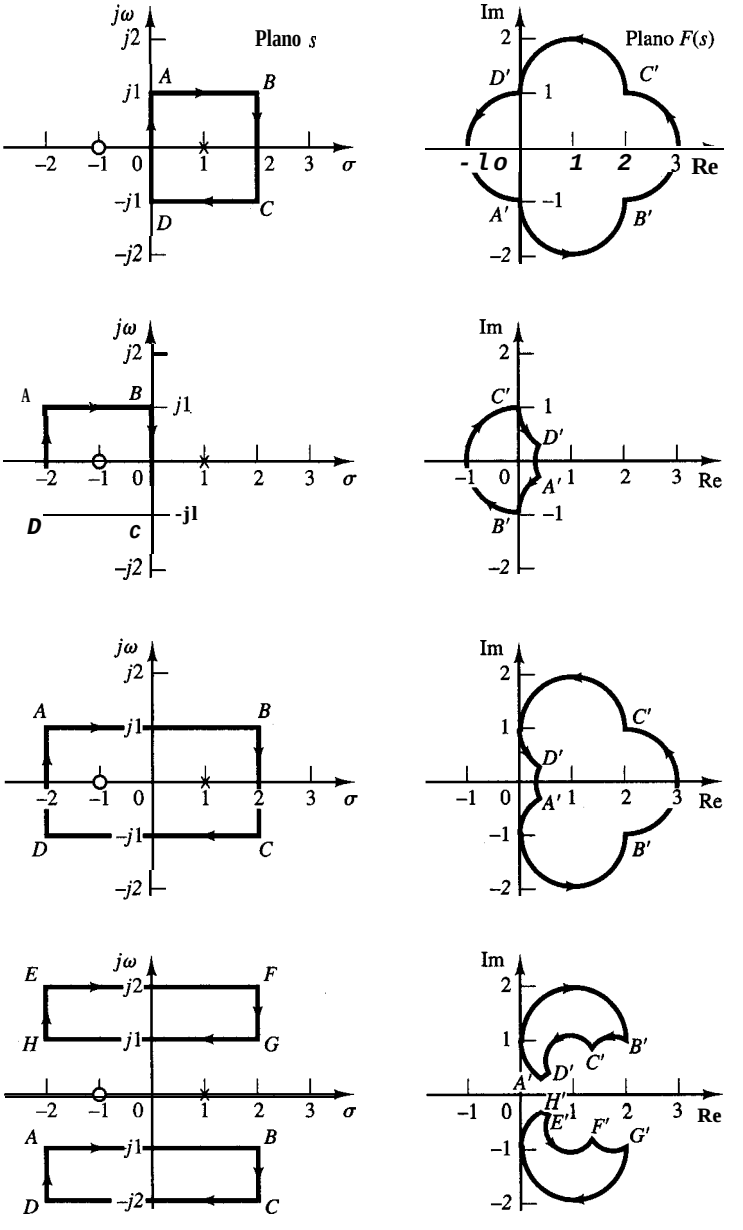


Figura 8-107
Mapeo conforme los contornos del plano s dentro del plano F(s), en donde F(s) = (s + 1)/(s — 1).

Si el último término del segundo miembro de la ecuación (8-20) no contiene polos ni ceros en el contorno cerrado en el plano s, $F'(s)/F(s)$ es analítica en dicho contorno, excepto en el cero $s = -z_1$. **Así,** remitiéndonos a la ecuación (8-19) y usando el teorema del residuo, que plantea que la integral de $F'(s)/F(s)$ tomada en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de un contorno cerrado en el plano s es igual a $-2\pi j$ veces los residuos de los polos simples de $F'(s)/F(s)$, o

$$\oint \frac{F'(s)}{F(s)}\,ds = -2\pi j(\Sigma \text{ residuos})$$

tenemos que

$$\oint \frac{F'(s)}{F(s)}\,ds = -2\pi j[(k_1 + k_2 + \cdots) - (m_1 + m_2 + \cdots)] = -2\pi j(Z - P)$$

en donde $Z = k_1 + k_2 + \cdots =$ número total de ceros de $F(s)$ encerrados en el contorno cerrado en el plano s.

$P = m_1 + m_2 + \cdots =$ número total de polos de $F(s)$ encerrados en el contorno cerrado en el plano s.

[Los k ceros (o polos) múltiples se consideran k ceros (o polos) ubicados en el mismo punto.] Dado que $F(s)$ es una cantidad compleja, se escribe

$$F(s) = |F|e^{j\theta}$$

y

$$\ln F(s) = \ln|F| + j\theta$$

Considerando que $F'(s)/F(s)$ puede escribirse

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{d \ln F(s)}{ds}$$

obtenemos

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{d \ln|F|}{ds} + j\frac{d\theta}{ds}$$

Si el contorno cerrado en el planos se mapea dentro del contorno cerrado Γ en el plano $F(s)$, entonces

$$\oint \frac{F'(s)}{F(s)}\,ds = \oint_\Gamma d \ln|F| + j\oint_\Gamma d\theta = j\int d\theta = 2\pi j(P - Z)$$

La integral $\oint_\Gamma d \ln|F|$ es cero, dado que la magnitud $\ln|F|$ es igual en el punto inicial y en el punto final del contorno Γ. Por tanto, obtenemos

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} = P - Z$$

La diferencia angular entre los valores inicial y final de θ es igual al cambio total en el ángulo de fase de $F'(s)/F(s)$ conforme un punto representativo en el plano s se mueve a lo largo del contorno cerrado. Considerando que N es el número de encierros en el sentido de las manecillas del reloj del origen del plano $F(s)$ y que $\theta_2 - \theta_1$ es cero o un múltiplo de 2π rad, obtenemos

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} = -N$$

Por tanto, tenemos la relación

$$N = Z - P$$

Esto comprueba el teorema.

Observe que, mediante este teorema del mapeo, no es posible encontrar la cantidad exacta de ceros y polos, sino sólo su diferencia. También considere que en las figuras 8−108(a) y (b) vemos que, si θ no cambia a través de 2π rad, entonces el origen del plano $F(s)$ no puede encerrarse en un círculo.

A-8-11. La traza de Nyquist (traza polar) de respuesta en frecuencia en lazo abierto de un sistema de control con realimentación unitaria aparece en la figura 8-109. Suponiendo que la trayectoria de Nyquist en el planos encierra todo el semiplano derecho del plano s, dibuje una traza de Nyquist completa en el plano G. A continuación conteste las preguntas siguientes:

(a) Si la función de transferencia en lazo abierto no tiene polos en el semiplano derecho del plano s, ¿es estable el sistema en lazo cerrado?

(b) Si la función de transferencia en lazo abierto tiene un polo y ningún cero en el semiplano derecho del plano s, ¿es estable el sistema en lazo cerrado?

(c) Si la función de transferencia en lazo abierto tiene un cero y ningún polo en el semiplano derecho del plano s, ¿es estable el sistema en lazo cerrado?

Solución. La figura 8-110 muestra una traza de Nyquist completa en el plano G. Las respuestas a las tres preguntas son las siguientes:

(a) El sistema en lazo cerrado es estable, porque el punto crftico $(-1 + j0)$ no queda encerrado por la traza de Nyquist. Es decir, dado que $P = 0$ y $N = 0$, tenemos que $Z = N + P = 0$.

(b) La función de transferencia en lazo abierto tiene un polo en el semiplano derecho del plano s. Por tanto, $P = 1$. (El sistema en lazo abierto es inestable.) Para que el sistema en lazo cerrado sea estable, la traza de Nyquist debe encerrar el punto crítico $(-1 + j0)$ una vez en sentido contrario a las manecillas del reloj. Sin embargo, la traza de Nyquist no encierra el punto crftico. Por tanto, $N = 0$. En este caso, $Z = N + P = 1$. El sistema en lazo cerrado es inestable.

(c) Dado que la función de transferencia en lazo abierto tiene un cero pero ningún polo en el semiplano derecho del planos, tenemos que $Z = N + P = 0$. Por tanto, el sistema en lazo cerrado es estable. (Observe que los ceros de la función de-transferencia en lazo abierto no afectan la estabilidad del sistema en lazo cerrado.)

A-8-12. ¿Es estable un sistema en lazo cerrado con la siguiente función de transferencia en lazo abierto y con $K = 2$?

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s + 1)(2s + 1)}$$

Encuentre el valor crftico de la ganancia K para la estabilidad.

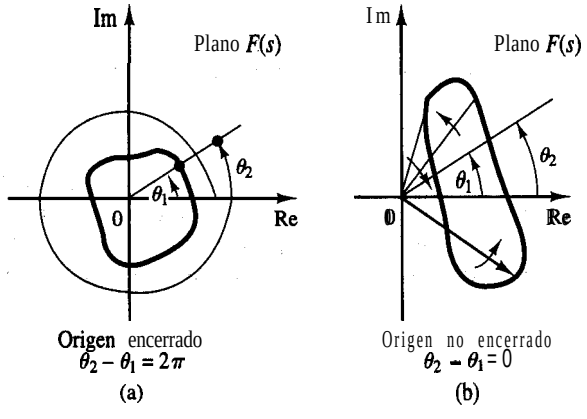


Figura 8–108
Determinación de los encierros del origen del plano F(s).

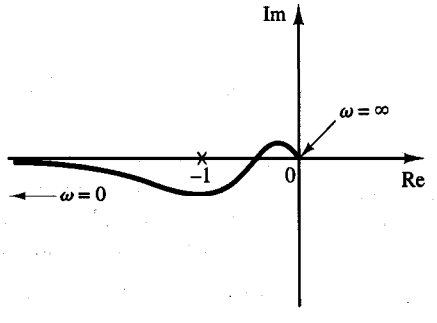


Figura 8–109
Traza de Nyquist.

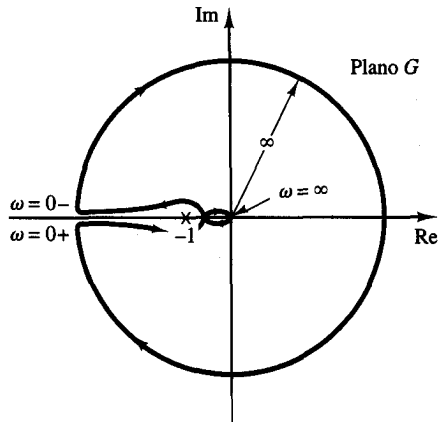


Figura 8–110
Traza de Nyquist completa en el plano G.

Solución. La función de transferencia en lazo abierto es

$$G(j\omega)\,(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega + 1)(2j\omega + 1)}$$
$$= \frac{K}{-3\omega^2 + j\omega(1 - 2\omega^2)}$$

Esta función de transferencia en lazo abierto no tiene polos en el semiplano derecho del plano s. Por tanto, para obtener la estabilidad, el punto -1 + $j0$ no debe estar encerrado por la traza de Nyquist. Encontremos el punto en el cual la traza de Nyquist cruza el eje real negativo. Supongamos que la parte imaginaria de $G(j\omega)H(j\omega)$ es cero, o que

$$1 - 2\omega^2 = 0$$

a partir de lo cual

$$\omega = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Sustituyendo $\omega = 1/\sqrt{2}$ en $G(j\omega)H(j\omega)$, obtenemos

$$G\left(j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)H\left(j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2K}{3}$$

El valor crítico de la ganancia K se obtiene igualando $-2K/3$ con -1, o bien

$$-\frac{2}{3}K = -1$$

Por tanto,

$$K = \frac{3}{2}$$

El sistema es estable si $0 < K < \frac{3}{2}$. Por tanto, el sistema con $K = 2$ es inestable.

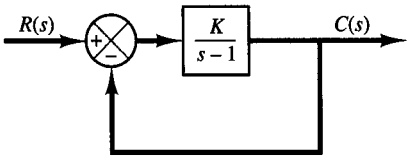


Figura 8–111
Sistema en lazo cerrado.

A-8-13. Considere el sistema en lazo cerrado de la figura 8-111. Determine el valor crítico de K para la estabilidad, mediante el criterio de estabilidad de Nyquist.

Solución. La traza polar de

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega - 1}$$

es un círculo con centro en $-K/2$ en el eje real negativo y radio de $K/2$, como se observa en la figura 8–112(a). Conforme ω se incrementa de $-\infty$ a ∞, el lugar geométrico $G(j\omega)$ hace un giro en sentido contrario a las manecillas del reloj. En este sistema, $P = 1$ porque hay un polo de G(s) en el semiplano derecho del plano s. Para que el sistema en lazo cerrado sea estable, Z debe ser igual a cero. Por tanto, $N = Z - P$ debe ser igual a -1, o el punto $-1 + j0$ debe quedar encerrado en sentido contrario a las manecillas del reloj, para la estabilidad. (Si el punto $-1 + j0$ no se encierra, el sistema es inestable.) Por tanto para la estabilidad, K debe ser mayor que la unidad, y $K = 1$ proporciona el límite de la estabilidad. La figura 8–112(b) muestra los casos estable e inestable de las gráficas de $G(j\omega)$.

A-g-14 Considere un sistema con realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es:

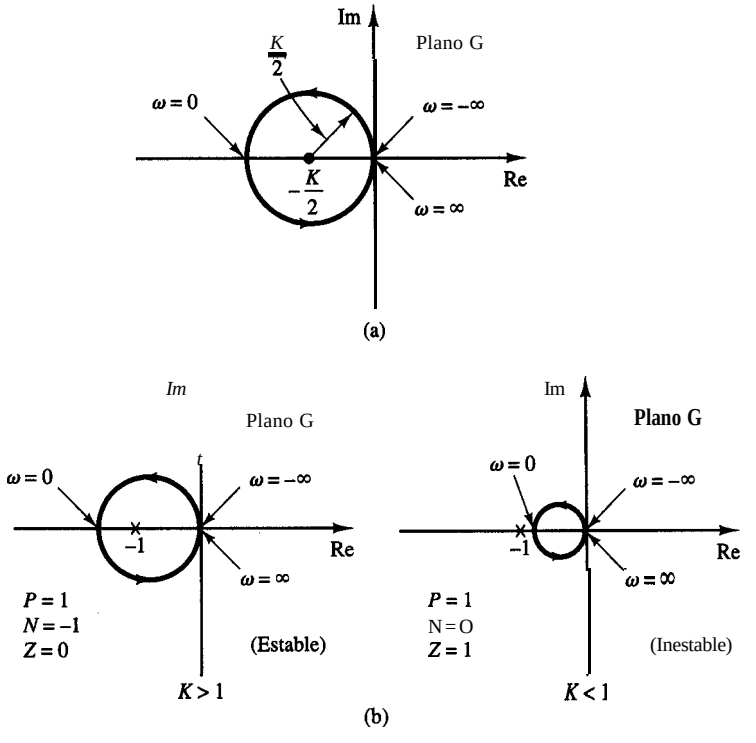


Figura 8–112
(a) Traza polar de $K/(j\omega - 1)$; (b) trazas polares de $K/(j\omega - 1)$ para los casos estable e inestable.

$$G(s) = \frac{Ke^{-0.8s}}{s + 1}$$

Usando la traza de Nyquist, determine el valor crítico de K para la estabilidad.

Solución. Para este sistema,

$$G(j\omega) = \frac{Ke^{-0.8j\omega}}{j\omega + 1}$$

$$= \frac{K(\cos 0.8\omega - j \operatorname{sen} 0.8\omega)(1 \quad jw)}{1 + \omega^2}$$

$$= \frac{K}{1 + \omega^2}[(\cos 0.8\omega - \omega \operatorname{sen} 0.8\omega) - j(\operatorname{sen} 0.8\omega + \omega \cos 0.8\omega)]$$

La parte imaginaria de $G(j\omega)$ es igual a cero si

$$\operatorname{sen} 0.8\omega + \omega \cos 0.8\omega = 0$$

Por tanto,

$$\omega = -\tan 0.8\omega$$

Despejando esta ecuación para el valor positivo más pequeño de ω, obtenemos.

$$\omega = 2.4482$$

Sustituyendo ω por 2.4482 en $G(j\omega)$, obtenemos

$$G(j2.4482) = \frac{K}{1 + 2.4482^2}(\cos 1.9586 - 2.4482 \operatorname{sen} 1.9586) = -0.378K$$

El valor crítico de K para la estabilidad se obtiene suponiendo que $G(j2.4482)$ es igual a -1. Por tanto,

$$0.378K = 1$$

o bien

$$K = 2.65$$

La figura 8-113 muestra las trazas de Nyquist, o polares, de $2.65e^{-0.8j\omega}/(1 + j\omega)$ y $2.65/(1 + jo)$. El sistema de primer orden sin retardo de transporte es estable para todos los valores de K, pero el que tiene un retardo de transporte de 0.8 seg se vuelve inestable para $K > 2.65$.

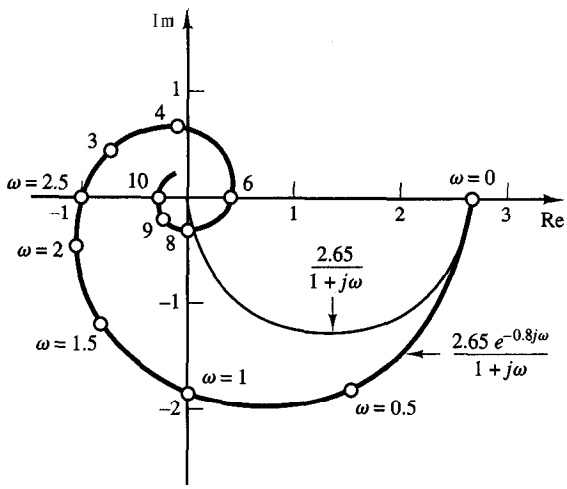


Figura 8–113
Trazas polares de $2.65e^{-0.8j\omega}/(1 + j\omega)$ y $2.65/(1 + jw)$.

A-8-15. Considere un sistema con realimentación unitaria con la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s) = \frac{20(s^2 + s + 0.5)}{s(s + 1)(s + 10)}$$

Obtenga una traza de Nyquist mediante MATLAB y examine la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

Solución. Primero introducimos el programa MATLAB 8– 17 en la computadora. Debido a que este sistema MATLAB contiene "Divide by zero" (dividir entre cero) en el cálculo, la traza de Nyquist resultante es errónea, como se observa en la figura 8-114.

```
Programa MATLAB 8–17
num = [0  20  20  10];
den = [1  11  10  0];
nyquist(num,den)
```

Esta traza de Nyquist errónea se corrige introduciendo el comando axis, como se observa en el programa MATLAB 8-18. La traza de Nyquist resultante aparece en la figura 8-115.

```
Programa MATLAB 8–18
num = [0  20  20  10];
den = [1  11  10  0];
nyquist(num,den)
v = [–2  3  –3  3]; axis(v)
grid
title('Traza de Nyquist de G(s) = 20(s^2 + s + 0.5)/[s(s + 1)(s + 10)]')
```

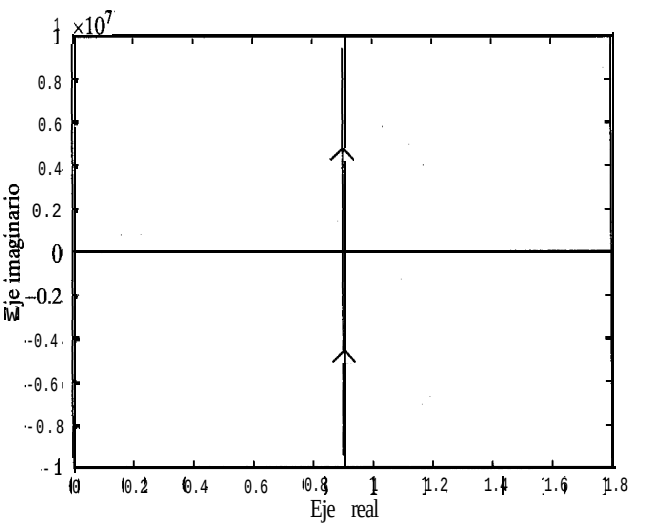


Figura 8-114
Traza de Nyquist errónea.

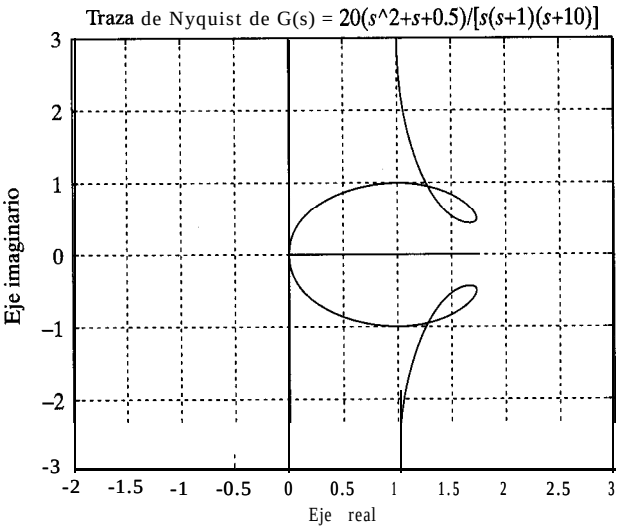


Figura 8-115
Traza de Nyquist de G(s) $= \dfrac{20(s^2 + s + 0.5)}{s(s + 1)(s + 10)}$.

Dado que no se encuentran polos en lazo abierto en el semiplano derecho del plano s, $P = 0$ según el criterio de estabilidad de Nyquist. En la figura 8-115 vemos que la traza de Nyquist no encierra el punto -1 + $j0$. Por tanto, el sistema en lazo cerrado es estable.

A-8-16. Considere el mismo sistema analizado en el problema A-8-15. Dibuje la traza de Nyquist sólo para la región de frecuencia positiva.

Solución. La traza de Nyquist sólo para la región de frecuencia positiva se consigue mediante el comando siguiente:

```
[re,im,w] = nyquist(num,den,w)
```

La región de frecuencia se divide en varias subregiones usando incrementos distintos. Por ejemplo, la región de frecuencia que interesa se divide en tres subregiones del modo siguiente:

```
WI = 0.1:0.1:10;
w2 = 10:2:100;
w3 = 100:10:500;
 w = [w1  w2  w3]
```

El programa MATLAB 8– 19 usa esta región de frecuencia. Mediante este programa, obtenemos la traza de Nyquist de la figura 8-116.

A-8-17. Considere un sistema con realimentación positiva y unitaria con la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s) = \frac{s^2 + 4s + 6}{s^2 + 5s + 4}$$

Dibuje la traza de Nyquist.

Solución. La traza de Nyquist del sistema con realimentación positiva se obtiene definiendo num y den como

```
num = [−1 -4   −6]
den = [1  5  41
```

```
Programa MATLAB 8–19
% ---------- Traza de Nyquist ----------
num = [0  20  20  10];
den = [1  11  10  0];
w1 = 0.1:0.1:10; w2 = 10:2:100; w3 = 100:10:500;
w = [w1  w2  w3];
[re,im,w] = nyquist(num,den,w);
plot(re,im)
v = [-3  3  -5  1]; axis(v)
grid
title('Traza de Nyquist de G(s) = 20(s^2 + s + 0.5)/[s(s + 1)(s + 10)]')
xlabel('Eje real')
ylabel('Eje imaginario')
```

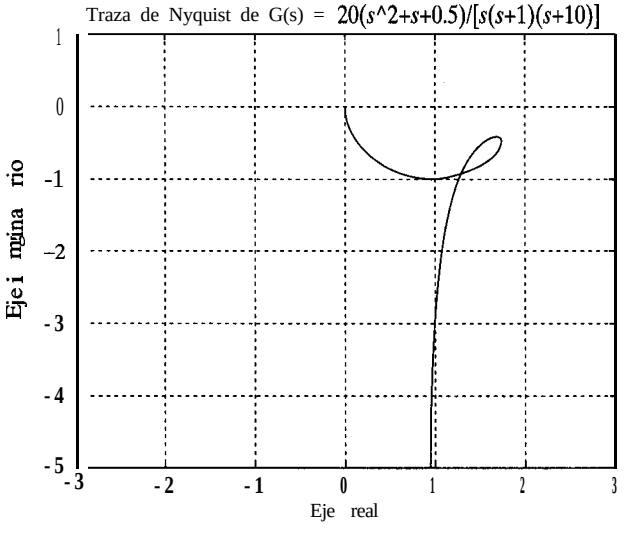


Figura 8–116
Traza de Nyquist para la región de frecuencia positiva.

y usando el comando nyquist(num,den). El programa MATLAB 8-20 genera la traza de Nyquist que se observa en la figura 8-117.

```
Programa MATLAB 8–20
num = [-1  -4  -6];
den = [1  5  4];
nyquist(num,den);
grid
title('Traza de Nyquist de G(s) = -(s^2 + 4s + 6)/(s^2 +5s + 4)')
```

Este sistema es inestable porque el punto $-1 + j0$ queda encerrado una vez en sentido de las manecillas del reloj. Observe que se trata de un caso especial en el cual la traza de Nyquist pasa por el punto $-1 + j0$ y encierra este punto una vez en sentido de las manecillas del reloj. Esto significa que el sistema en lazo cerrado se degenera; el comportamiento es el de un sistema inestable

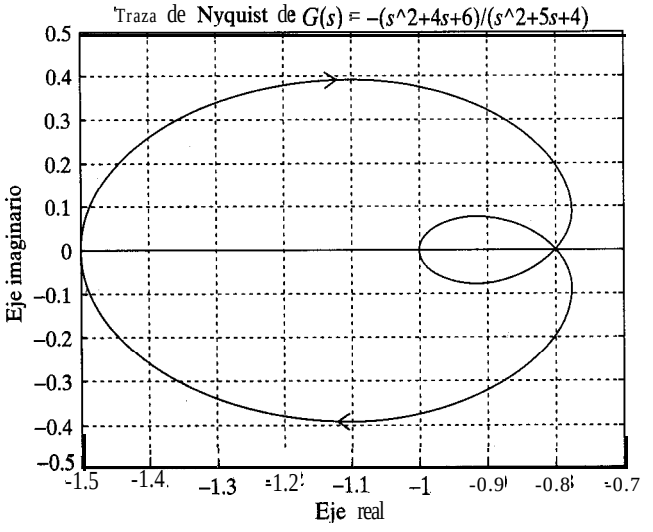


Figura 8–117
Traza de Nyquist para un sistema con realimentación positiva.

de primer orden. Véase la siguiente función de transferencia en lazo cerrado del sistema con realimentación positiva:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 4s + 6}{s^2 + 5s + 4 - (s^2 + 4s + 6)}$$

$$= \frac{s^2 + 4s + 6}{s - 2}$$

Observe que la traza de Nyquist para el caso de realimentación positiva es un reflejo de la traza de Nyquist con respecto al eje imaginario para el caso de realimentación negativa. Esto se observa de la figura 8-118, misma que se obtuvo mediante el programa MATLAB 8-21.

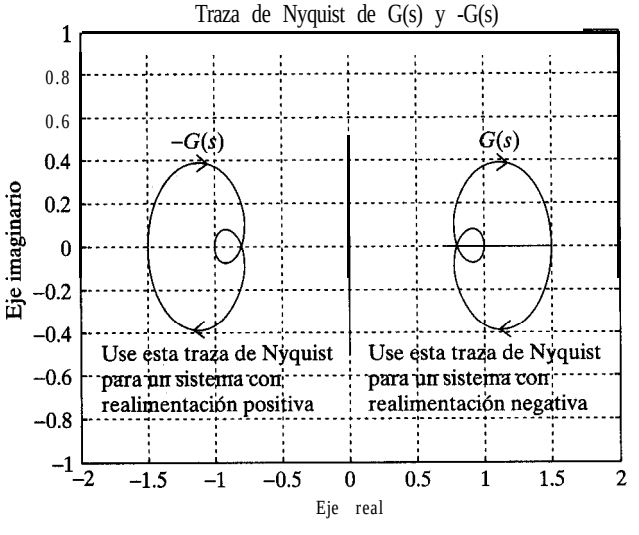


Figura 8–118
Traza de Nyquist para un sistema con realimentación positiva y un sistema con realimentación negativa.

Programa MATLAB 8–21

```
num1 = [1  4  6];
den1 = [1  5  4];
num2 = [-1  -4  -6];
den2 = [1  5  4];
nyquist(num1,den1);
hold on
nyquist(num2,den2)
v = [-2  2  -4  1];
axis(v);
grid
title('Traza de Nyquist de G(s) y -G(s)')
text(0.95,0.5,'G(s)')
text(0.57,-0.48,'Use esta traza de')
text(0.57,-0.62,'Nyquist para un sistema con')
text(0.57,-0.73,'realimentación negativa')
text(-1.3,0.5,'-G(s)')
text(-1.7,-0.48,'Use esta traza de')
text(-1.7,-0.62,'Nyquist para un sistema con')
text(-1.7,-0.73,'realimentación positiva')
```

A-8-18. Suponga un sistema que posee al menos un par de polos complejos conjugados en lazo cerrado. Si el punto $-1 + j0$ está en la intersección de una curva de σ constante y una curva de ω constante en el plano G(s), los valores específicos de σ y ω, que definimos como $-\sigma_c$ y ω_c, respectivamente, caracterizan el polo en lazo cerrado más cercano al eje jo en la mitad superior del planos. (Observe que $-\sigma_c$ representa la descomposición exponencial y que ω_c representa la frecuencia natural amortiguada del término de respuesta transitoria a escalón, producido por el par de polos en lazo cerrado más cercanos al eje $j\omega$.) Los valores probables de $-\sigma_c$ y ω_c se estiman a partir de la traza, como se observa en la figura 8-119. Por tanto, el par de polos complejos conjugados en lazo cerrado que se encuentra más cerca del eje $j\omega$ se determina en forma gráfica. Debe señalarse que todos los polos en lazo cerrado se mapean dentro del punto $-1 + j0$ en el plano G(s). Aunque los polos complejos conjugados en lazo cerrado más cercanos al eje $j\omega$ se encuentran con facilidad mediante esta técnica, hallar otros polos en lazo cerrado mediante este sistema, si los hay, es prácticamente imposible.

Si los datos en $G(j\omega)$ son experimentales, puede construirse un cuadrado con líneas curvas cerca del punto $-1 + j0$ mediante extrapolación. Remitiéndonos a la figura 8– 120, encontramos la ubicación de los polos dominantes en lazo cerrado en el plano s, o el factor de amortiguamiento relativo ζ y la frecuencia natural amortiguada de ω_d trazando la línea ***AB*** que conecta el punto -1 + $j0$ (punto ***A)*** con el punto ***B,*** acercamiento más próximo al punto -1 + $j0$, y después construyendo un

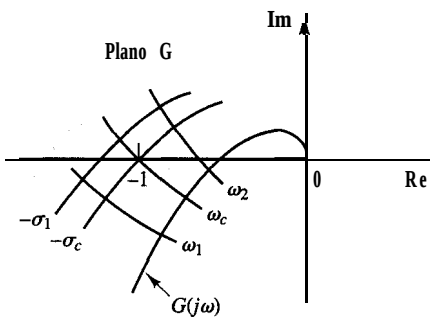


Figura8-119
Estimación de $-\sigma_c$ y ω_c.

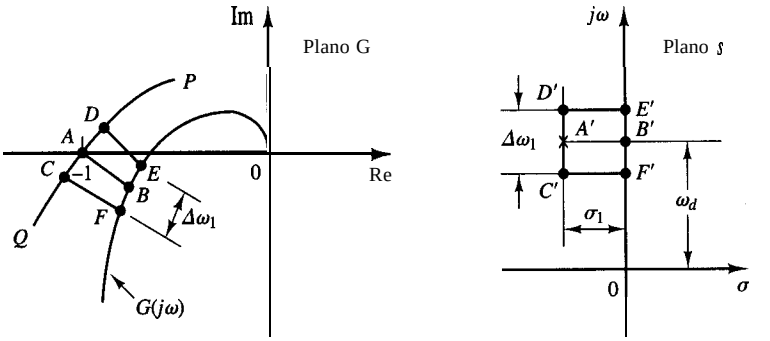


Figura 8–120
Mapeo conforme un cuadrado con líneas curvas cerca del punto -1 + *j*0 en el plano G(s) dentro del plano s.

cuadrado con líneas curvas ***CDEF,*** como se observa en la figura 8-120. Este cuadrado con líneas curvas ***CDEF*** se construye trazando la curva ***PQ*** más probable (en donde ***PQ*** es el mapeo conforme de una línea paralela al eje jo en el plano *s*) que pase por el punto − 1 + *j*0 y "paralela" al lugar geométrico $G(j\omega)$, y ajustando los puntos C, ***D, E y F*** de modo que $\widehat{FB} = \widehat{BE}$, $\widehat{CA} = \widehat{AD}$, y $\widehat{FE} + \widehat{CD} = \widehat{FC} + \widehat{ED}$. El contorno del plano *s* correspondiente ***C'D 'E'F',*** junto con el punto ***A*** ', polo en lazo cerrado más cercano al eje $j\omega$, aparece en la figura 8-120. El valor del intervalo de frecuencia $\Delta\omega_1$ entre los puntos ***E*** y ***F*** es aproximadamente igual al valor de σ_1, tal como se muestra en la figura 8-120. La frecuencia en el punto ***B*** es aproximadamente igual a la frecuencia natural amortiguada ω_d. A continuación, los polos en lazo cerrado más cercanos al eje $j\omega$ se estiman como

$$s = -\sigma_1 \pm j\omega_d$$

Por tanto, el factor de amortiguamiento relativo ζ de estos polos en lazo cerrado se obtiene de

$$\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\sigma_1}{\omega_d} = \frac{\Delta\omega_1}{\omega_d}$$

Debe señalarse que la frecuencia natural amortiguada ω_d de la respuesta transitoria a escalón está, en realidad, en el contorno de frecuencia que pasa por el punto -1 + *j*0, y que no es necesariamente el punto del acercamiento más próximo al lugar geométrico $G(j\omega)$. Por tanto, de alguna manera el valor ω_d obtenido mediante la técnica anterior tiene un error.

A partir de nuestro análisis, concluimos que es posible estimar los polos en lazo cerrado más cercanos al eje $j\omega$ a partir de la estrecha proximidad del lugar geométrico $G(j\omega)$ al punto − 1 + *j*0, la frecuencia en el punto del acercamiento más próximo y la graduación de frecuencias cerca de este punto.

Remitiéndonos a la gráfica de respuesta de $G(j\omega)$ de un sistema con realimentación unitaria, tal como aparece en la figura 8-21, encuentre los polos en lazo cerrado más cercanos al eje jo.

Solución. Primero se dibuja la línea que conecta el punto − 1 + *j*0 y el punto de acercamiento más próximo al lugar geométrico $G(j\omega)$ con el punto -1 + *j*0. A continuación, se construye el cuadrado con líneas curvas ***ABCD.*** Dado que la frecuencia en el punto del acercamiento más próximo es $\omega = 2.9$, la frecuencia natural amortiguada es aproximadamente 2.9, o $\omega_d = 2.9$. A partir del cuadrado con líneas curvas ***ABCD,*** se encuentra que

$$\Delta\omega = \omega_D - \omega_A = 3.4 - 2.4 = 1.0$$

Después se estiman los polos en lazo cerrado más cercanos al eje jo como

$$s = -1 \pm j2.9$$

El lugar geométrico $G(j\omega)$ de la figura 8-121 es en realidad una traza de la función de transferencia en lazo cerrado siguiente:

$$G(s) = \frac{5(s+20)}{s(s+4.59)(s^2+3.41s+16.35)}$$

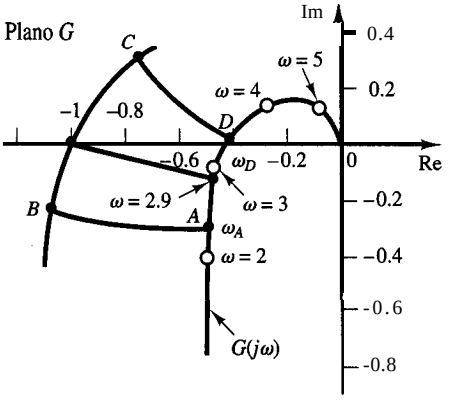


Figura 8–121
Traza polar y cuadrado con líneas curvas.

Los polos exactos en lazo cerrado del sistema son $s = -1 \pm j3$ y $s = -3 \pm j1$. Los polos en lazo cerrado más cercanos al eje $j\omega$ son $s = -1 \pm j3$. En este ejemplo específico vemos que el error implícito es muy pequeño. En general, este error depende de una curva $G(j\omega)$ determinada. Entre más cerca esté el lugar geométrico $G(j\omega)$ del punto $-1 + j0$, más pequeño será el error.

A-8-19. La figura 8-122 muestra un diagrama de bloques de un sistema de control de un vehículo espacial. Determine la ganancia K tal que el margen de fase sea 50". ¿Cuál es el margen de la ganancia en este caso?

Solución. Dado que

$$G(j\omega) = \frac{K(j\omega + 2)}{(j\omega)^2}$$

tenemos que

$$\underline{/G(j\omega)} = \underline{/j\omega + 2} - 2\,\underline{/j\omega} = \tan^{-1}\frac{\omega}{2} - 180"$$

El requerimiento de que el margen de fase sea de 50" significa que $\underline{/G(j\omega_c)}$ debe ser igual a $130°$, en donde ω_c es la frecuencia de cruce de ganancia, o

$$\underline{/G(j\omega_c)} = -130"$$

Por tanto, establecemos

$$\tan^{-1}\frac{\omega_c}{2} = 50°$$

a partir de lo cual obtenemos

$$\omega_c = 2.3835 \text{ rad/seg}$$

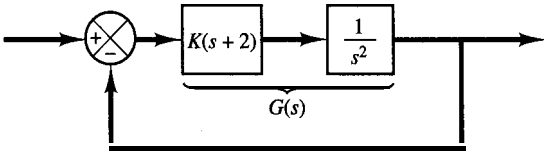


Figura 8–122
Sistema de control de un vehículo espacial.

Dado que la curva de fase nunca cruza la línea $-180°$, el margen de ganancia es $+\infty$ dB. Considerando que la magnitud de $G(j\omega)$ debe ser igual a 0 dB en ω = 2.3835, tenemos que

$$\left|\frac{K(j\omega + 2)}{(j\omega)^2}\right|_{\omega=2.3835} = 1$$

a partir de lo cual obtenemos

$$K = \frac{2.3835^2}{\sqrt{2^2 + 2.3835^2}} = 1.8259$$

Este valor K dará el margen de fase de 50".

A-8-20. Dibuje las trazas de Bode de la función de transferencia en lazo abierto G(s) del sistema en lazo cerrado de la figura 8-123. Determine el margen de fase y el margen de ganancia.

Solución. Considere que

$$G(j\omega) = \frac{20(j\omega + 1)}{j\omega(j\omega + 5)[(j\omega)^2 + 2j\omega + 10]}$$

$$= \frac{0.4(j\omega + 1)}{j\omega(0.2j\omega + 1)\left[\left(\frac{j\omega}{\sqrt{10}}\right)^2 + \frac{2}{10}j\omega + 1\right]}$$

El término cuadrático en el denominador tiene la frecuencia de esquina de $\sqrt{10}$ rad/seg y el factor de amortiguamiento relativo ζ de 0.3162, o

$$\omega_n = \sqrt{10}, \qquad \zeta = 0.3162$$

Las trazas de Bode de $G(j\omega)$ aparecen en la figura 8− 124. A partir de estas trazas encontramos que el margen de fase es de 100" y el margen de ganancia es de $+13.3$ dB.

A-8-21. Para el sistema estándar de segundo orden

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

demuestre que el ancho de banda ω_b se obtiene a partir de

$$\omega_b = \omega_n(1 - 2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2})^{1/2}$$

Considere que ω_b/ω_n es sólo una función de ζ. Grafique una curva ω_b/ω_n contra ζ.

Solución. El ancho de banda ω_b se determina a partir de $|C(j\omega_b)/R(j\omega_b)|$ = -3 dB. Con mucha frecuencia, en lugar de -3 dB, usamos -3.01 dB, que es igual a 0.707. Por tanto,

$$\left|\frac{C(j\omega_b)}{R(j\omega_b)}\right| = \left|\frac{\omega_n^2}{(j\omega_b)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega_b) + \omega_n^2}\right| = 0.707$$

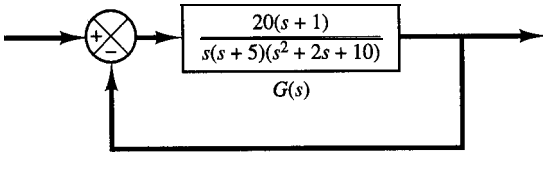


Figura 8–123
Sistema en lazo cerrado.

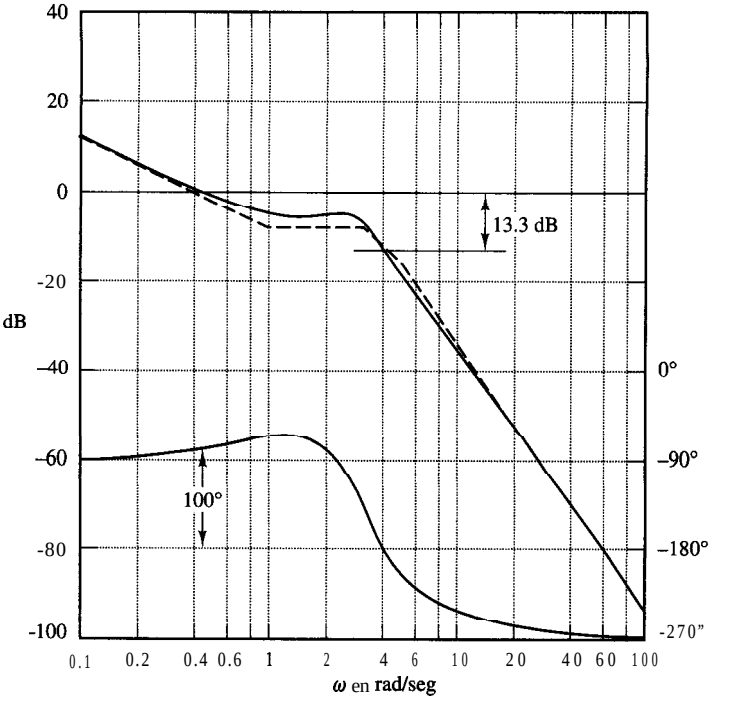


Figura 8–124
Trazas de Bode de $G(j\omega)$ del sistema de la figura 8– 123.

De esta forma

$$\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_b^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_b)^2}} = 0.707$$

a partir de lo cual obtenemos

$$\omega_n^4 = 0.5[(\omega_n^2 - \omega_b^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega_b^2]$$

Si dividimos ambos miembros de esta última ecuación entre ω_n^4, obtenemos

$$1 = 0.5\left\{\left[1 - \left(\frac{\omega_b}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2\left(\frac{\omega_b}{\omega_n}\right)^2\right\}$$

Despejar esta última ecuación para $(\omega_b/\omega_n)^2$ produce

$$\left(\frac{\omega_b}{\omega_n}\right)^2 = -2\zeta^2 + 1 \pm \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}$$

Dado que $(\omega_b/\omega_n)^2 > 0$, tomamos el signo más en esta última ecuación. Por tanto

$$\omega_b^2 = \omega_n^2(1 - 2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2})$$

o bien

$$\omega_b = \omega_n(1 - 2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2})^{1/2}$$

La figura 8-125 muestra una curva que relaciona ω_b/ω_n contra ζ.

A-8-22. Un sistema de control con realimentación unitaria tiene la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 2)}$$

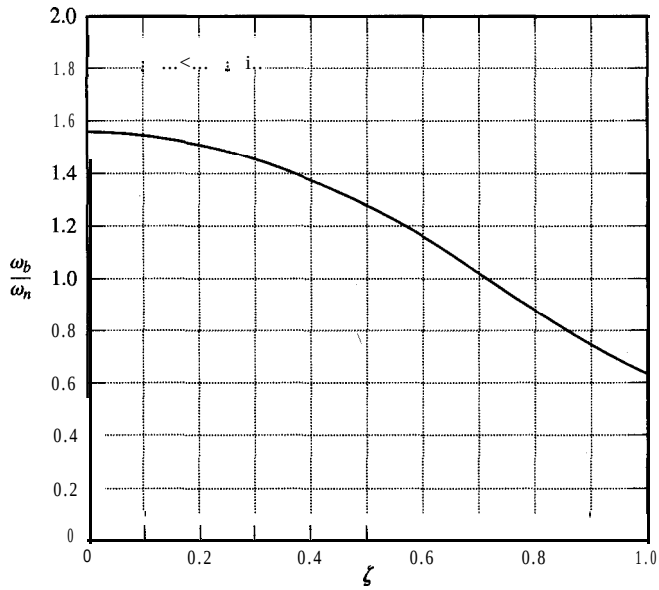


Figura 8–125
curva ω_b/ω_n contra ζ, en donde ω_b es el ancho de banda.

Considere la respuesta en frecuencia de este sistema. Grafique un lugar geométrico polar de $G(j\omega)/K$. Después, determine el valor de la ganancia K, tal que la magnitud del pico de resonancia M_r de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado sea 2.

Solución. La figura 8– 126 contiene una traza de $G(j\omega)/K$. El valor del ángulo ψ que corresponde a $M_r = 2$, obtenido a partir de la ecuación (8-18) es

$$\psi = \text{sen}^{-1}\frac{1}{2} = 30°$$

Por tanto, dibujamos la línea OP que pasa por el origen y forma un ángulo de 30" con el eje real negativo, como se observa en la figura 8-126. A continuación dibujamos el círculo tangente al lugar geométrico $G(j\omega)/K$ y la línea $\overline{OP}$. Defina como P el punto en el que el círculo y la línea $\overline{OP}$ son tangentes. La línea perpendicular dibujada desde el punto P interseca el eje real negativo en $(-0.445, 0)$. Por tanto, la ganancia K se determina como

$$K = \frac{1}{0.445} = 2.247$$

En la figura 8-126 observamos que la frecuencia de resonancia es aproximadamente $\omega = 0.83$ radlseg.

A-8-23. La figura 8-127 muestra un diagrama de bloques de un sistema de reactor químico. Dibuje las trazas de Bode de $G(j\omega)$. Asimismo trace el lugar geométrico $G(j\omega)$ sobre la carta de Nichols A partir de la carta de Nichols, lea las magnitudes y los ángulos de fase de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado y después grafique las trazas de Bode del sistema en lazo cerrado, $G(j\omega)/[1 + G(j\omega)]$.

Solución. Considerando que

$$G(s) = \frac{80e^{-0.1s}}{s(s+4)(s+10)} = \frac{2e^{-0.1s}}{s(0.25s+1)(0.1s+1)}$$

tenemos que

$$G(j\omega) = \frac{2e^{-0.1j\omega}}{j\omega(0.25j\omega+1)(0.1j\omega+1)}$$

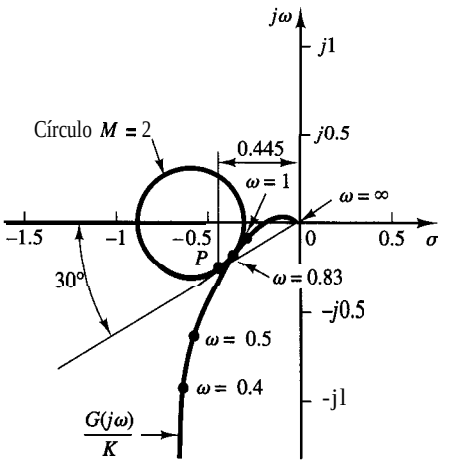


Figura 8–126
Traza de $G(j\omega)/K$ del sistema considerado en el problema A-8-22.

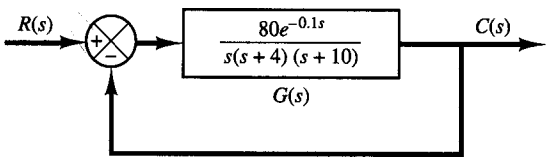


Figura 8–127
Diagrama de bloques de un sistema de reactor químico.

El ángulo de fase del retardo de transporte $e^{-0.1j\omega}$ es

$$\angle e^{-0.1j\omega} = \angle \cos(0.1\omega) - j\,\text{sen}(0.1\omega) = -0.1\omega \quad \text{(radianes)}$$
$$= -5.73\omega \quad \text{(grados)}$$

Las trazas de Bode de $G(j\omega)$ aparecen en la figura 8-128.

A continuación, leyendo las magnitudes y los ángulos de fase de $G(j\omega)$ para diversos valores de ω, es posible trazar la gráfica de la ganancia contra la fase sobre una carta de Nichols. La figura 8-129 muestra el lugar geométrico $G(j\omega)$ sobrepuesto a la carta de Nichols. A partir de esta carta es posible leer las magnitudes y los ángulos de fase del sistema en lazo cerrado en diferentes puntos de la frecuencia. La figura 8-130 muestra las trazas de Bode de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado $[G(j\omega)/[1 + G(j\omega)]$.

A-8-24. La figura 8-131 contiene las trazas de Bode de la función de transferencia en lazo abierto G(s) del sistema de control con realimentación unitaria. Se sabe que la función de transferencia en lazo abierto es de fase mínima. En la traza se observa que existe un par de polos complejos conjugados en $\omega = 2$ rad/seg. Determine el factor de amortiguamiento relativo del término cuadrático que contiene estos polos complejos conjugados Asimismo, determine la función de transferencia G(s).

Solución. Remitiéndonos a la figura 8-8 y examinando las trazas de Bode de la figura 8-131, encontramos que el factor de amortiguamiento relativo ζ y la frecuencia natural no amortiguada ω_n del término cuadrático son

$$\zeta = 0.1, \qquad \omega_n = 2 \text{ rad/seg}$$

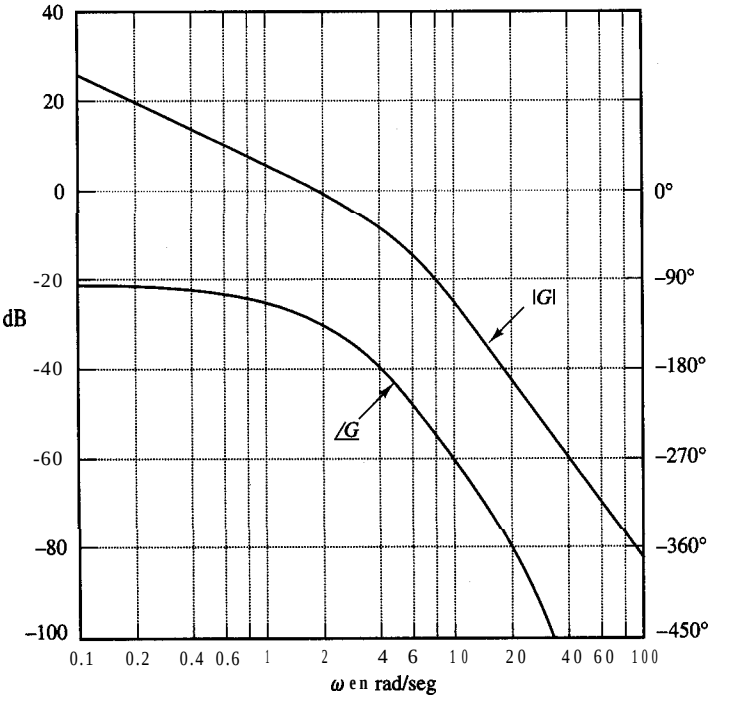


Figura 8–128
Trazas de Bode de $G(j\omega)$ del sistema de la figura 8-127.

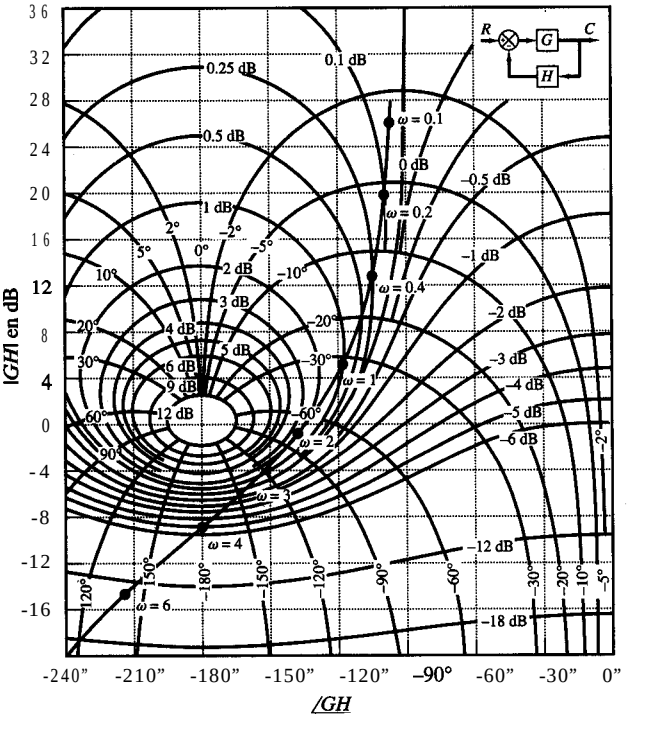


Figura 8–129
Lugar geométrico $G(j\omega)$ sobrepuesto a la carta de Nichols (problema A-8-23).

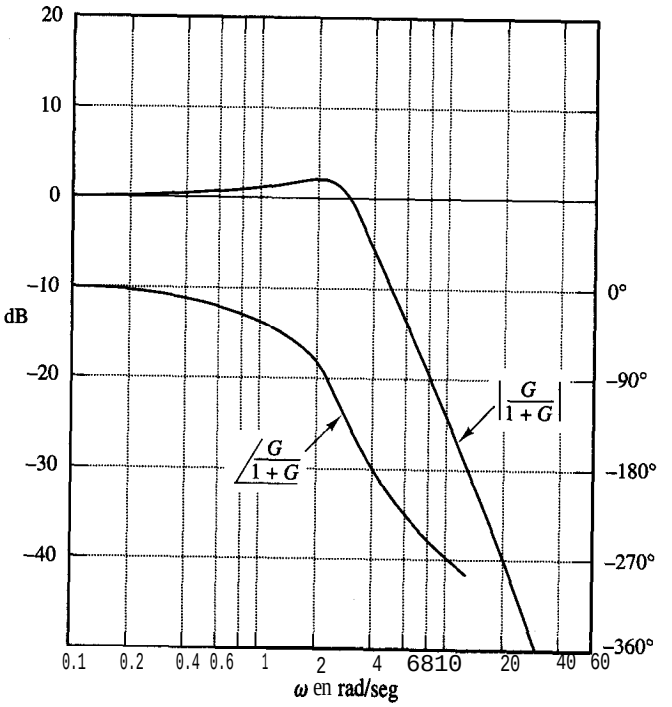


Figura 8–130
Trazas de Bode de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado (problema A-8-23).

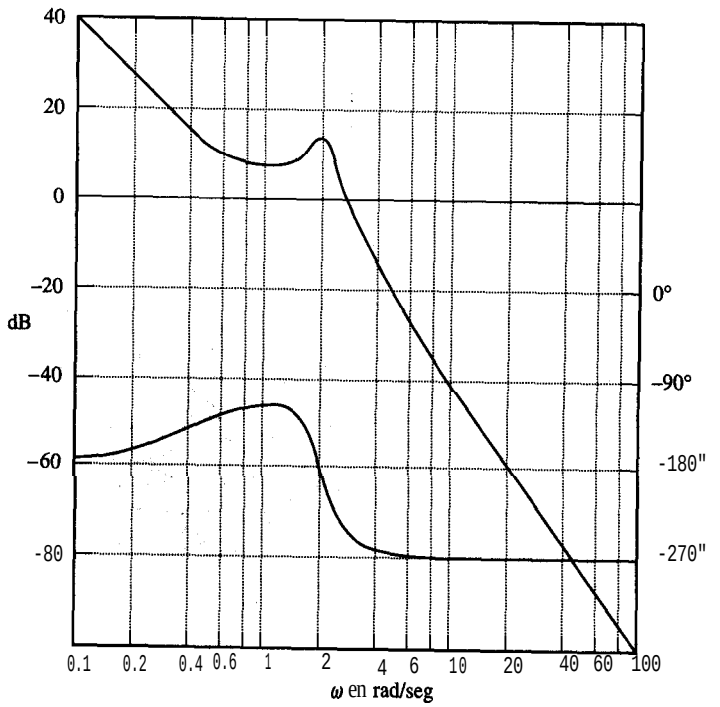


Figura 8–131
Trazas de Bode de la función de transferencia en lazo abierto de un sistema de control con realimentación unitaria.

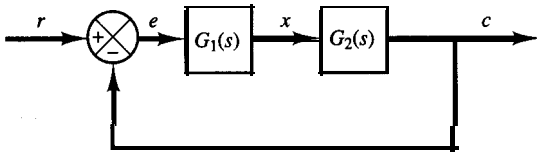


Figura 8–132
Sistema de control.

Considerando que existe otra frecuencia de esquina en ω = 0.5 rad/seg. y que la pendiente de la curva de magnitud en la región de frecuencia baja es de -40 dB/década, $G(j\omega)$ se determina tentativamente del modo siguiente:

$$G(j\omega) = \frac{K\left(\frac{j\omega}{0.5} + 1\right)}{(j\omega)^2\left[\left(\frac{j\omega}{2}\right)^2 + 0.1(j\omega) + 1\right]}$$

Dado que en la figura 8-131 encontramos que $|G(j0.1)|$ = 40 dB, el valor de la ganancia K se determina como unitario. Asimismo, la curva de fase calculada, $\angle G(j\omega)$ contra ω coincide con la curva de fase obtenida. Por tanto, la función de transferencia G(s) se determina como

$$G(s) = \frac{4(2s + 1)}{s^2(s^2 + 0.4s + 4)}$$

A-8-25. Un sistema de control en lazo cerrado incluye un elemento inestable dentro del lazo. Al momento de aplicarle el criterio de estabilidad de Nyquist, deben obtenerse las curvas de la respuesta en frecuencia para el elemento ineãtable.

¿Cómo obtenemos en forma experimental las curvas de la respuesta en frecuencia para tal elemento inestable? Sugiera un enfoque posible para la determinación experimental de la respuesta en frecuencia de un elemento lineal inestable.

Solución. Una manera de resolver esto es medir las características de la respuesta en frecuencia del elemento inestable usándolo como parte de un sistema estable.

Considere el sistema de la figura 8-132. Suponga que el elemento $G_1(s)$ es inestable. El sistema completo puede estabilizarse eligiendo un elemento lineal conveniente $G_2(s)$. Aplicamos una señal senoidal en la entrada. En estado estable, todas las señales del lazo serán senoidales. Medimos las señales e(f), la entrada para el elemento inestable y x(t), salida del elemento inestable. Si cambiamos la frecuencia [y posiblemente la amplitud por la conveniencia de medir e(t) y x(t)] de la senoide de entrada y repetimos el proceso, podemos obtener la respuesta en frecuencia del elemento lineal inestable.

PROBLEMAS

B-8-1. Considere el sistema con realimentación unitaria con las funciones de transferencia en lazo abierto.

$$G(s) = \frac{10}{s + 1}$$

Obtenga la salida en estado estable del sistema cuando está sujeto a cada una de las entradas siguientes:

(a) r(t) = sen (t + 30")
(b) r(t) = 2 cos (2t − 45")
(c) $r(t)$ = sen(t + 30") − 2 cos (2t − 45")

B-8-2. Considere el sistema cuya función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(T_2s + 1)}{T_1s + 1}$$

Obtenga la salida en estado estable del sistema cuando está sujeto a la entrada r(t) = R sen ωt.

B-8-3. Dibuje las trazas de Bode de las tres funciones de transferencia siguientes:

(a) $G(s) = \dfrac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} \quad (T_1 > T_2 > 0)$

(b) $G(s) = \dfrac{T_1 s - 1}{T_2 s + 1} \quad (T_1 > T_2 > 0)$

(c) $G(s) = \dfrac{-T_1 s + 1}{T_2 s + 1} \quad (T_1 > T_2 > 0)$

B-8-4. Grafique las trazas de Bode de

$$G(s) = \frac{10(s^2 + 0.4s + 1)}{s(s^2 + 0.8s + 9)}$$

B-M. Dado

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

demuestre que

$$|G(j\omega_n)| = \frac{1}{2\zeta}$$

B-8-6. Considere un sistema de control con realimentación unitaria con la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s) = \frac{s + 0.5}{s^3 + s^2 + 1}$$

Éste es un sistema de fase no mínima. Dos de los tres polos en lazo abierto se ubican en el semiplano derecho del plano s del modo siguiente:

Polos en lazo abierto en $s = 1.4656$

$$s = 0.2328 + j0.7926$$

$$s = 0.2328 - j0.7926$$

Grafique las trazas de Bode de G(s) con MATLAB. Explique por qué la curva del ángulo de fase empieza a partir de 0" y tiende a $+180°$.

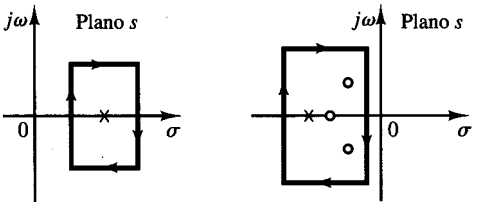
B-8-7. Dibuje las trazas polares de la función de transferencia en lazo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)}{s^2(Ts + 1)}$$

para los dos casos siguientes:

(a) $T_a > T > 0, \quad T_b > T > 0$
(b) $T > T_a > 0, \quad T > T_b > 0$

B-8-8. Las configuraciones de polos y ceros de las funciones complejas $F_1(s)$ y $F_2(s)$ aparecen en las figuras 8−133(a) y (b), respectivamente. Suponga que los contornos cerrados en el plano s son los que se exhiben en las figuras 8− 133(a) y (b).Trace cualitativamente los contornos cerrados correspondientes en los planos $F_1(s)$ y $F_2(s)$.



(a) (b)

Figura **8–133** (a) Representación del planos de una función compleja $F_1(s)$ y un contorno cerrado; (b) representación del plano s de una función compleja $F_2(s)$ y un contorno cerrado.

B-8-9. Dibuje un lugar geométrico de Nyquist para el sistema de control con realimentación unitaria con la función de transferencia en lazo abierto

$$G(s) = \frac{K(1 - s)}{s + 1}$$

Usando el criterio de estabilidad de Nyquist, determine la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

B-8-10. Un sistema con la función de transferencia en lazo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^2(T_1 s + 1)}$$

es inherentemente inestable. Este sistema se estabiliza si se agrega un control derivativo. Dibuje las trazas polares para la función de transferencia en lazo abierto con y sin control derivativo.

B-8-11. Considere el sistema en lazo cerrado con la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s)H(s) = \frac{10K(s + 0.5)}{s^2(s + 2)(s + 10)}$$

Grafique las trazas polares directa e inversa de $G(s)H(s)$ con $K = 1$ y $K = 10$. Aplique el criterio de estabilidad de Nyquist a las trazas y determine la estabilidad del sistema con estos valores de K.

B-8-12. Considere el sistema en lazo cerrado cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s)H(s) = \frac{Ke^{-2s}}{s}$$

Encuentre el valor máximo de K para el cual el sistema es estable.

B-8-13. Dibuje una traza de Nyquist para el G(s) siguiente:

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 0.8s + 1)}$$

B-8-14. Considere un sistema de control con realimentación unitaria con la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 0.2s^2 + s + 1}$$

Dibuje una traza de Nyquist de G(s) y examine la estabilidad del sistema.

B-8-15. Considere un sistema de control con realimentación unitaria con la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 0.22 + s + 1}$$

Dibuje una traza de Nyquist de G(s) y examine la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

B-8-16. Considere el sistema definido mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Hay cuatro trazas de Nyquist individuales implícitas en este sistema. Dibuje en un par de ejes dos trazas de Nyquist para la entrada u_1 y en otro dos trazas de Nyquist para la entrada u_2. Escriba un programa MATLAB para obtener estos dos juegos de trazas.

B-8-17. Remitiéndonos al problema B-8-16, se quiere graficar sólo $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$ para $\omega > 0$. Escriba un programa MATLAB que produzca tal traza.

Si se desea graficar $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$ para $-\infty < \omega < \infty$, ¿qué cambios deben hacerse en el programa MATLAB?

B-8-18. Considere el sistema de control con realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{as + 1}{s^2}$$

Determine el valor de a tal que el margen de fase sea 45".

B-8-19. Considere el sistema de la figura 8-134. Dibuje las trazas de Bode de la función de transferencia en lazo abierto G(s). Determine el margen de fase y el margen de ganancia.

B-8-20. Considere el sistema de la figura 8-135. Dibuje las trazas de Bode de la función de transferencia en lazo abierto G(s). Determine el margen de fase y el margen de ganancia.

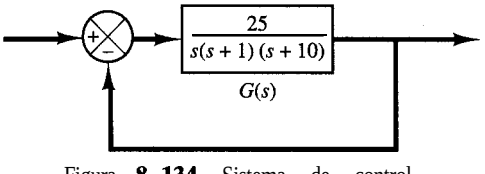


Figura **8–134** Sistema de control.

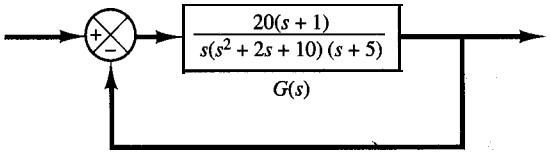


Figura 8-135 Sistema de control.

B-8-21. Considere un sistema de control con realimentación unitaria con la función de transferencia en lazo abierto. Determine el valor de la ganancia K tal que el margen de fase sea 50°. ¿Cuál es el margen de ganancia de este sistema con esta ganancia K?

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 4)}$$

B-8-22. Considere el sistema de la figura 8-136. Dibuje las trazas de Bode de la función de transferencia en lazo abierto y determine el valor de la ganancia K tal que el margen de fase sea 50°. ¿Cuál es el margen de ganancia de este sistema con esta ganancia K?

B-8-23. Considere un sistema de control con realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 0.5)}$$

Determine el valor de la ganancia K tal que la magnitud del pico de resonancia en la respuesta en frecuencia sea de 2 dB o $M_r = 2$ dB.

B-8-24. La figura 8-137 muestra un diagrama de bloques de un sistema de control de procesos. Determine el rango de la ganancia K para la estabilidad.

B-8-25. Considere un sistema en lazo cerrado cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s)H(s) = \frac{Ke^{-Ts}}{s(s + 1)}$$

Determine el valor máximo de la ganancia K para la estabilidad, como una función del tiempo muerto T.

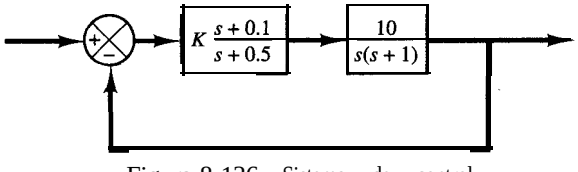


Figura 8-136 Sistema de control.

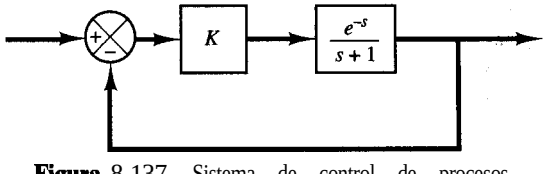


Figura 8-137 Sistema de control de procesos.

B-8-26. Grafique la traza polar de

$$G(s) = \frac{(Ts)^2 - 6(Ts) + 12}{(Ts)^2 + 6(Ts) + 12}$$

Demuestre que, para el rango de frecuencia $0 < \omega T < 2\sqrt{3}$, esta ecuación produce una buena aproximación para la función de transferencia del retardo de transporte, e^{-Ts}.

B-8-27. La figura 8-138 muestra las trazas de Bode de una función de transferencia G(s). Determine esta función de transferencia.

B-8-28. En la figura 8– 139 aparecen las trazas de Bode determinadas experimentalmente de un sistema $G(j\omega)$. Determine la función de transferencia G(s).

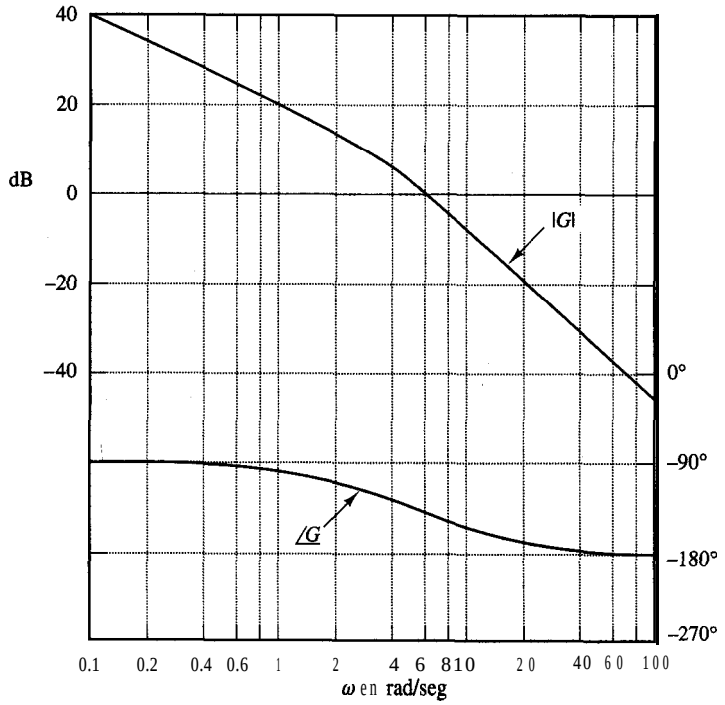


Figura 8-138 Trazas de Bode de una función de transferencia G(s).

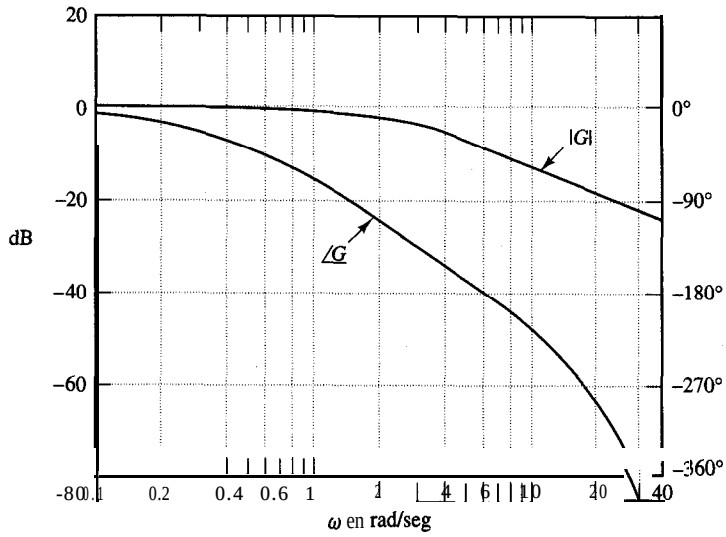


Figura 8-139 Trazas de Bode determinadas experimentalmente de un sistema.

9 Diseño de sistemas de control mediante la respuesta en frecuencia

9-1 INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de este capítulo es presentar los procedimientos que se siguen en el diseño y la compensación de sistemas de control lineales e invariantes con el tiempo, de una entrada y una salida, mediante el enfoque de la respuesta en frecuencia.

Enfoque de la respuesta en frecuencia para el diseño de un sistema de control. Es importante señalar que, en el diseño de un sistema de control, por lo general lo más importante es el desempeño de la respuesta transitoria. En el enfoque de la respuesta en frecuencia, especificamos el desempeño de la respuesta transitoria en una forma indirecta. Es decir, el desempeño de la respuesta transitoria se especifica en términos del margen de fase, el margen de ganancia y la magnitud del pico de resonancia, que ofrecen una estimación a grandes rasgos del amortiguamiento del sistema, la frecuencia de cruce de ganancia, la frecuencia de resonancia y el ancho de banda, que ofrecen una estimación a grandes rasgos de la velocidad de la respuesta transitoria y las constantes de error estático, que aportan la precisión en estado estable. Aunque la correlación entre la respuesta transitoria y la respuesta en frecuencia es. indirecta, las especificaciones en el dominio de la frecuencia se cumplen adecuadamente en el enfoque de las trazas de Bode.

Después de diseñar el lazo abierto mediante el método de la respuesta en frecuencia, se determinan los polos y los ceros en lazo cerrado. Deben verificarse las características de la respuesta transitoria para saber si el sistema diseñado satisface los requerimientos en el dominio del tiempo. De no ser así, debe modificarse el compensador y luego repetirse el análisis hasta obtener un resultado satisfactorio.

El diseño en el dominio de la frecuencia es sencillo y directo. La gráfica de la respuesta en frecuencia indica en forma clara la manera en la que debe modificarse el sistema, aunque

no sea posible hacer una predicción cuantitativa exacta de las características de la respuesta transitoria. El enfoque de la respuesta en frecuencia se aplica a los sistemas o componentes cuyas características dinámicas están dadas en forma de datos de respuesta en frecuencia. Observe que, debido a la dificultad de obtener las ecuaciones que controlan ciertos componentes, por ejemplo neumáticos o hidráulicos, por lo general las características dinámicas de dichos componentes se determinan en forma experimental a través de pruebas de respuesta en frecuencia. Las gráficas de respuesta en frecuencia obtenidas experimentalmente se combinan con facilidad con otras gráficas obtenidas del mismo modo cuando se usa el enfoque de las trazas de Bode. Observe también que, cuando se trabaja con ruido de frecuencia alta, encontramos que el enfoque de la respuesta en frecuencia es más conveniente que otros.

Básicamente hay dos enfoques de diseño en el dominio de la frecuencia. Uno es el enfoque de la traza polar y el otro es el enfoque de las trazas de Bode. Cuando se añade un compensador, la traza polar no conserva su forma original, por lo que es necesario dibujar una nueva traza polar, esto toma tiempo y, por tanto, no es conveniente. En cambio, agregar las trazas de Bode del compensador a las trazas de Bode originales es muy simple y, por tanto, grafícar las trazas de Bode completas es un asunto sencillo. Asimismo, si varía la ganancia en lazo abierto, la curva de magnitud se mueve hacia arriba o hacía abajo sin que se modifique la pendiente de la curva, y la curva de fase no cambia. Por tanto, para propósitos de diseño, es mejor trabajar con las trazas de Bode.

En un procedimiento común de las trazas de Bode, primero se ajusta la ganancia en lazo abierto para cumplir el requerimiento sobre la precisión en estado estable. A continuación se grafican las curvas de magnitud y fase en el lazo abierto sin compensar (con la ganancia en lazo abierto recién ajustada). Si no se satisfacen las especificaciones del margen de fase y del margen de ganancia, se determina un compensador conveniente que vuelva a dar forma a la función de transferencia en lazo abierto. Por último, si se debe cumplir con otros requerimientos, se intenta satisfacerlos, a menos que algunos contradigan a los otros.

Información que se obtiene a partir de la respuesta en frecuencia en lazo abierto. La región de frecuencia baja (aquella muy por debajo de la frecuencia de cruce de ganancia) del lugar geométrico indica el comportamiento en estado estable del sistema en lazo cerrado. La región de frecuencia media (cercana al punto $-1 + j0$) del lugar geométrico indica una estabilidad relativa. La región de frecuencia alta (aquella muy arriba de la frecuencia de cruce de ganancia) indica la complejidad del sistema.

Requerimientos sobre la respuesta en frecuencia en lazo abierto. Se puede decir que, en muchos casos prácticos, la compensación es, en esencia, un compromiso entre la precisión en estado estable y la estabilidad relativa.

Para obtener un valor alto de la constante de error de velocidad, y aún así una estabilidad relativa satisfactoria, es necesario volver a dar forma a la curva de respuesta en frecuencia en lazo abierto.

La ganancia en la región de frecuencia baja debe ser suficientemente grande y, cerca de la frecuencia de cruce de ganancia, la pendiente de la curva de magnitud logarítmica en las trazas de Bode debe ser de -20 dB/década. Esta pendiente debe extenderse sobre una banda de frecuencia suficientemente amplia para asegurar un margen de fase adecuado. Para la región de frecuencia alta, la ganancia debe atenuarse lo más rápido posible a fin de reducir los efectos del ruido.

La figura 9-1 contiene algunos ejemplos de las curvas de respuesta en frecuencia en lazo abierto y en lazo cerrado deseables y no deseables.

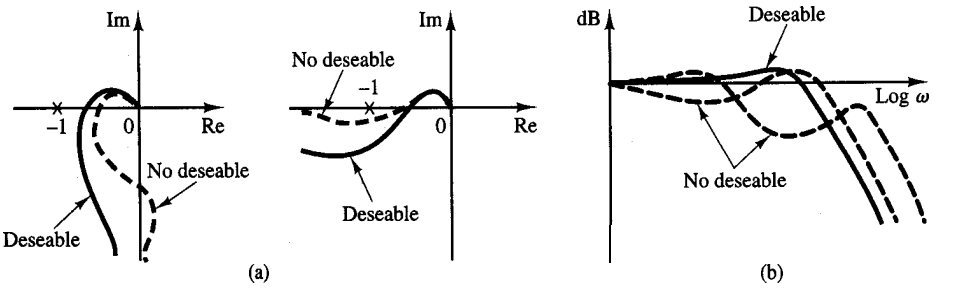


Figura 9–1
(a) Ejemplos de las curvas de respuesta en frecuencia en lazo abierto deseables y no deseables; (b) ejemplos de las curvas de respuesta en frecuencia en lazo cerrado deseables y no deseables.

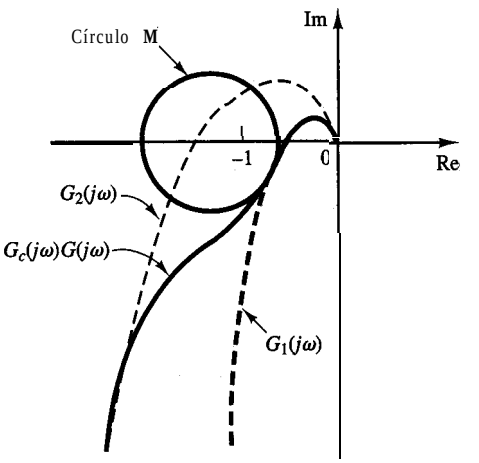


Figura 9–2
Remodelado de la curva de respuesta en frecuencia en lazo abierto.

En la figura 9-2 observamos que la remodelación de la curva de respuesta en frecuencia en lazo abierto se lleva a cabo si la región de frecuencia alta del lugar geométrico sigue al lugar geométrico $G_1(j\omega)$, en tanto que la región de frecuencia baja del lugar geométrico sigue al lugar geométrico $G_2(j\omega)$. El lugar geométrico remodelado $G_c(j\omega)G(j\omega)$ debe tener márgenes de fase y de ganancia razonables, así como ser tangente a un círculo M adecuado, como se aprecia.

Características básicas de la compensación de adelanto, de atraso y de atraso-adelanto. La compensación de adelanto produce, en esencia, un mejoramiento razonable en la respuesta transitoria y un cambio pequeño en la precisión en estado estable. Puede acentuar los efectos del ruido de alta frecuencia. Por su parte, la compensación de atraso produce un mejoramiento notable en la precisión en estado estable a costa de aumentar el tiempo de respuesta transitoria. Suprime los efectos de las señales de ruido a altas frecuencias. La compensación de atraso-adelanto combina las características de la compensación de adelanto con las de la compensación de atraso. El uso de un compensador de atraso o de adelanto aumenta el orden del sistema en 1 (a menos que haya una cancelación entre el cero del compensador y un polo de la función de transferencia en lazo abierto no compensada). El uso de un compensador de atraso-adelanto eleva el orden del sistema en 2 [a menos que haya una cancelación entre el cero, o los ceros, del compensador de atraso-adelanto y el polo, o los polos, de la función de transferencia en lazo abierto no compen-

sada], lo cual significa que el sistema se vuelve más complejo y que es más difícil controlar el comportamiento de la respuesta transitoria. La situación en particular determina el tipo de compensación que debe usarse.

Panorama del capítulo. La sección 9-1 presentó el material introductorio; la sección 9-2 analiza la compensación de adelanto mediante el enfoque de las trazas de Bode y la sección 9–3 analiza la compensación de atraso mediante el enfoque de las trazas de Bode. La 9–4 estudia las técnicas de compensación de atraso-adelanto con el mismo enfoque de las trazas de Bode. La sección 9-5 ofrece los comentarios finales sobre el enfoque de respuesta en frecuencia para el diseño de sistemas de control.

9-2 COMPENSACIÓN DE ADELANTO

Primero examinaremos las características en frecuencia del compensador de adelanto. Luego presentaremos una técnica de diseño para el compensador de adelanto mediante el uso de las trazas de Bode.

Características de los compensadores de adelanto. Considere un compensador de adelanto que tiene la función de transferencia siguiente:

$$K_c\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}=K_c\frac{s+\dfrac{1}{T}}{s+\dfrac{1}{\alpha T}} \qquad (0<\mathrm{a}<1)$$

Tiene un cero en $s=-1/T$ y un polo en $s=-1/(\alpha T)$. Dado que $0<\mathrm{a}<1$, vemos que el cero siempre se ubica a la derecha del polo en el plano complejo. Observe que, para un valor pequeño de a, el polo se localiza lejos hacia la izquierda. El valor mínimo de α está limitado por la construcción física del compensador de adelanto. Por lo general, el valor mínimo de α se ubica cerca de 0.05. (Esto significa que el adelanto de fase máximo que produce el compensador es de alrededor de 65°.)

La figura 9-3 muestra la traza polar de

$$K_c\alpha\frac{j\omega T+1}{j\omega\alpha T+1} \qquad (0<\alpha<1)$$

con $K_c = 1$. Para un valor determinado de α, el ángulo entre el eje real positivo y la línea tangente al semicírculo dibujada desde el origen proporciona el ángulo de adelanto de fase

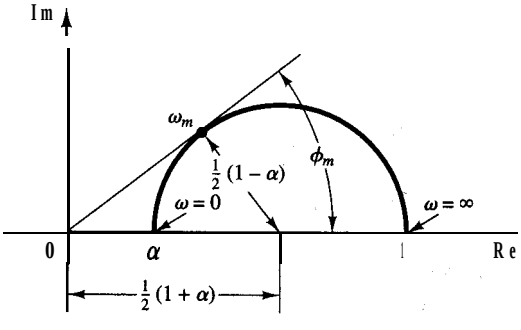


Figura 9-3
Traza polar de uncompensador de adelanto $\alpha(j\omega T+1)/(j\omega\alpha T+1)$, en donde $0<\alpha<1$.

máximo, ϕ_m. Llamaremos ω_m a la frecuencia en el punto tangente. En la figura 9-3, el ángulo de fase en $\omega = \omega_m$ es ϕ_m, en donde

$$\operatorname{sen} \phi_m = \frac{\frac{1 - a}{2}}{\frac{1 + a}{2}} = \frac{1 - a}{1 + a} \tag{9–1}$$

La ecuación (9-1) relaciona el ángulo de adelanto de fase máximo con el valor de *a*.

La figura 94 muestra las trazas de Bode de un compensador de adelanto cuando $K_c = 1$ y $a = 0.1$. Las frecuencias de esquina para el compensador de adelanto son $\omega = 1/T$ y $\omega = 1/(\alpha T) = 10/T$. Si examinamos la figura 9-4, vemos que ω_m es la media geométrica de las dos frecuencias de esquina, o

$$\log \omega_m = \frac{1}{2}\left(\log \frac{1}{T} + \log \frac{1}{\alpha T}\right)$$

Por tanto,

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T} \tag{9–2}$$

Como puede observarse en la figura 9–4, el compensador de adelanto es básicamente un filtro paso-altas. (Pasan las frecuencias altas, pero se atenúan las frecuencias bajas.)

Técnicas de compensación de adelanto basadas en el enfoque de la respuesta en frecuencia. La función principal del compensador de adelanto es volver a dar forma ala curva de respuesta en frecuencia a fin de ofrecer un ángulo de adelanto de fase suficiente para compensar el atraso de fase excesivo asociado con los componentes del sistema fijo.

Considere el sistema de la figura 9-5. Suponga que las especificaciones del desempeño se dan en términos del margen de fase, del margen de ganancia, de las constantes de error estático de velocidad, etc. El procedimiento para diseñar un compensador de adelanto mediante el enfoque de la respuesta en frecuencia se plantea del modo siguiente:

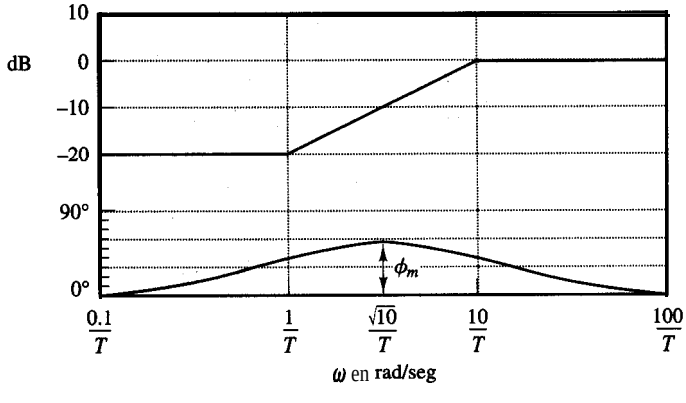


Figura **9–4**
Traza de Bode de un compensador de adelanto $\alpha(j\omega T + 1)/(j\omega\alpha T + 1)$, en donde a = 0.1.

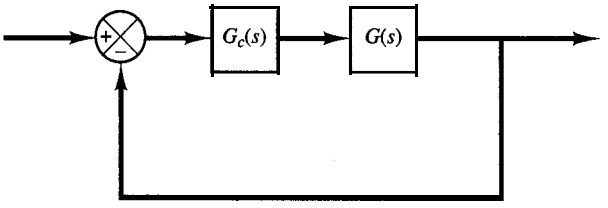


Figura 9–5
Sistema de control.

1. Suponga el siguiente compensador de adelanto:

$$G_c(s) = K_c\alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

Defina

$$K_c\alpha = K$$

Así,

$$G_c(s) = K \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}$$

La función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado es

$$G_c(s)G(s) = K \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} G(s) = \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} KG(s) = \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} G_1(s)$$

en donde

$$G_1(s) = KG(s)$$

Determine la ganancia K que satisfaga el requerimiento sobre la constante estática de error determinada.

2. Usando la ganancia K determinada, dibuje las trazas de Bode de $G_1(j\omega)$, el sistema con la ganancia ajustada pero sin compensar. Calcule el valor del margen de fase.

3. Determine el ángulo de adelanto de fase ϕ necesario que se agregará al sistema.

4. Determine el factor de atenuación α a partir de la ecuación (9-1). Establezca la frecuencia a la cual la magnitud del sistema no compensado $G_1(j\omega)$ es igual a -20 log $(1/\sqrt{\alpha})$. Seleccione ésta como la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Esta frecuencia corresponde a $\omega_m = 1/(\sqrt{\alpha}T)$, y el cambio de fase máximo ϕ_m ocurre en ella.

5. Determine las frecuencias de esquina del compensador de adelanto del modo siguiente:

Cero del compensador de adelanto: $\omega = \frac{1}{T}$

Polo del compensador de adelanto: $\omega = \frac{1}{\alpha T}$

6. Usando el valor de K determinado en el paso 1 y el de α establecido en el paso 4, calcule la constante K_c a partir de

$$K_c = \frac{K}{\alpha}$$

7. Verifique el margen de ganancia para asegurarse de que es satisfactorio. De no ser así, repita el proceso de diseño modificando la ubicación de los polos y ceros del compensador hasta obtener un resultado satisfactorio.

EJEMPLO **9-1** Considere el sistema de la figura 9-6. La función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

Se quiere diseñar un compensador para el sistema de modo que la constante de error estático de velocidad K_v sea de 20 seg^{-1}, el margen de fase sea al menos de 50" y el margen de ganancia sea al menos de 10 dB.

Usaremos un compensador de adelanto con la forma

$$G_c(s) = K_c\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}}$$

El sistema compensado tendrá la función de transferencia en lazo abierto $G_c(s)G(s)$.

Defina

$$G_1(s) = KG(s) = \frac{4K}{s(s+2)}$$

en donde $K = K_c\alpha$.

El primer paso en el diseño es ajustar la ganancia K para que cumpla la especificación de desempeño en estado estable, o bien proporcionar la constante de error estático de velocidad requerida. Dado que esta constante es de 20 seg^{-1}, obtenemos

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}G_1(s) = \lim_{s\to 0}\frac{s4K}{s(s+2)} = 2K = 20$$

o bien

$$K = 10$$

Con K = 10, el sistema compensado cumple el requerimiento en estado estable.

A continuación, graficaremos las trazas de Bode de

$$G_1(j\omega) = \frac{40}{j\omega(j\omega+2)} = \frac{20}{j\omega(0.5j\omega+1)}$$

La figura 9-7 muestra las curvas de magnitud y de ángulo de fase de $G_1(j\omega)$. A partir de estas trazas, vemos que los márgenes de fase y de ganancia del sistema son 17" y $+\infty$ dB, respectivamente. (Un margen de fase de 17" implica que el sistema es muy oscilatorio. Por tanto, satisfacer la

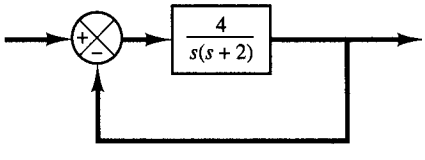


Figura 9-6
Sistema de control.

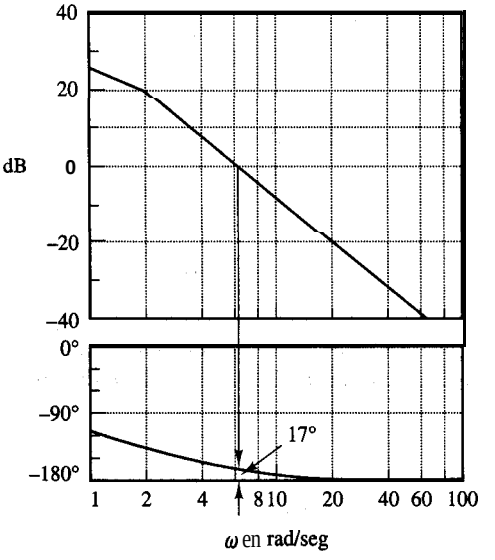


Figura 9–7
Trazas de Bode para
$G_1(j\omega) = 10G(j\omega) = 40/[j\omega(j\omega + 2)]$.

especificación en estado estable produce un desempeño deficiente de la respuesta transitoria.) La especificación requiere de un margen de fase de cuando menos 50". Por tanto, resulta necesario encontrar el adelanto de fase adicional a fin de satisfacer el requerimiento de que la estabilidad relativa sea de 33". Para obtener un margen de fase de 50° sin disminuir el valor de *K*, el compensador de adelanto debe contribuir al ángulo de fase requerido.

Tomando en cuenta que la adición de un compensador de adelanto modifica la curva de magnitud de las trazas de Bode, vemos que la frecuencia de cruce de ganancia se moverá a la derecha. Debemos compensar el atraso de fase incrementado de $G_1(j\omega)$, debido a este incremento en la frecuencia de cruce de ganancia. Considerando el cambio de la frecuencia de cruce de ganancia, suponemos que ϕ_m, adelanto de fase máximo requerido, es de aproximadamente 38". (Esto significa que se han agregado 5" para compensar el cambio en la frecuencia de cruce de ganancia.)

Dado que

$$\operatorname{sen} \phi_m = \frac{1 - a}{1 + a}$$

ϕ_m = 38" corresponde a a = 0.24. Una vez establecido el factor de atenuación a, con base en el ángulo de adelanto de fase requerido, el paso siguiente es determinar las frecuencias de esquina $\omega = 1/T$ y $\omega = 1/(\alpha T)$ del compensador de adelanto. Para conseguirlo, primero observamos que el ángulo de adelanto de fase máximo ϕ_m ocurre en la media geométrica de las dos frecuencias de esquina, o $\omega = 1/(\sqrt{\alpha}T)$. [Véase la ecuación (9-2).] La cantidad de la modificación de la curva de magnitud en $\omega = 1/(\sqrt{\alpha}T)$ producida por la inclusión del término $(Ts + 1)/(\alpha Ts + 1)$ es

$$\left|\frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega\alpha T}\right|_{\omega = 1/(\sqrt{\alpha}T)} = \left|\frac{1 + j\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}}{1 + j\alpha\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Observe que

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{0.24}} = \frac{1}{0.49} = 6.2 \text{ dB}$$

y $|G_1(j\omega)| = -6.2$ dB corresponde a $\omega = 9$ rad/seg. Elegiremos esta como la nueva frecuencia de cruce de ganancia ω_c. Tomando en cuenta que esta frecuencia corresponde a $1/(\sqrt{\alpha}T)$, o $\omega_c = 1/(\sqrt{\alpha}T)$, obtenemos

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\alpha}\omega_c = 4.43$$

y

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\alpha}} = 18.4$$

El compensador de adelanto determinado es, entonces,

$$G_c(s) = K_c \frac{s + 4.41}{s + 18.4} = K_c\alpha \frac{0.227s + 1}{0.054s + 1}$$

de donde el valor de K_c se obtiene como

$$K_c = \frac{K}{\alpha} = \frac{10}{0.24} = 41.7$$

Por tanto, la función de transferencia del compensador se vuelve

$$G_c(s) = 41.7 \frac{s + 4.41}{s + 18.4} = 10 \frac{0.227s + 1}{0.054s + 1}$$

Observe que

$$\frac{G_c(s)}{K} G_1(s) = \frac{G_c(s)}{10} 10G(s) = G_c(s)G(s)$$

La curva de magnitud y la curva del ángulo de fase para $G_c(j\omega)/10$ aparecen en la figura 9-8. El sistema compensado tiene la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G_c(s)G(s) = 41.7 \frac{s + 4.41}{s + 18.4} \frac{4}{s(s + 2)}$$

Las líneas continuas de la figura 9-8 representan la curva de magnitud y la curva del ángulo de fase para el sistema compensado. El compensador de adelanto provoca que la frecuencia de cruce de ganancia se incremente de 6.3 a 9 rad/seg. El incremento de esta frecuencia significa un aumento en el ancho de banda. Esto implica, a su vez, un incremento en la velocidad de respuesta. Se observa que los márgenes de fase y de ganancia son de cerca de 50" y $+\infty$ dB, respectivamente. Por tanto, el sistema compensado de la figura 9-9 cumple los requerimientos en estado estable y de la estabilidad relativa.

Observe que, para los sistemas de tipo 1, como el sistema recién considerado, el valor de la constante de error estático de velocidad K_c es simplemente el valor de la frecuencia en la intersección de la extensión de la línea de pendiente inicial -20 dB/década con la línea 0 dB, como se observa en la figura 9-8.

La figura 9-10 muestra las trazas polares del sistema no compensado $G_1(j\omega) = 10G(j\omega)$ y del sistema compensado $G_c(j\omega)G(j\omega)$. En la figura 9-10 vemos que la frecuencia de resonancia del sistema no compensado es de alrededor de 6 rad/seg y que la del sistema compensado es de aproximadamente 7 radlseg. (Esto también indica que se ha incrementado el ancho de banda.)

En la figura 9-10 encontramos que el valor del pico de resonancia M para el sistema no compensado con $K = 10$ es 3. El valor de M para el sistema compensado es 1.29. Esto muestra claramente que el sistema compensado tiene una estabilidad relativa mejorada. (Observe que el

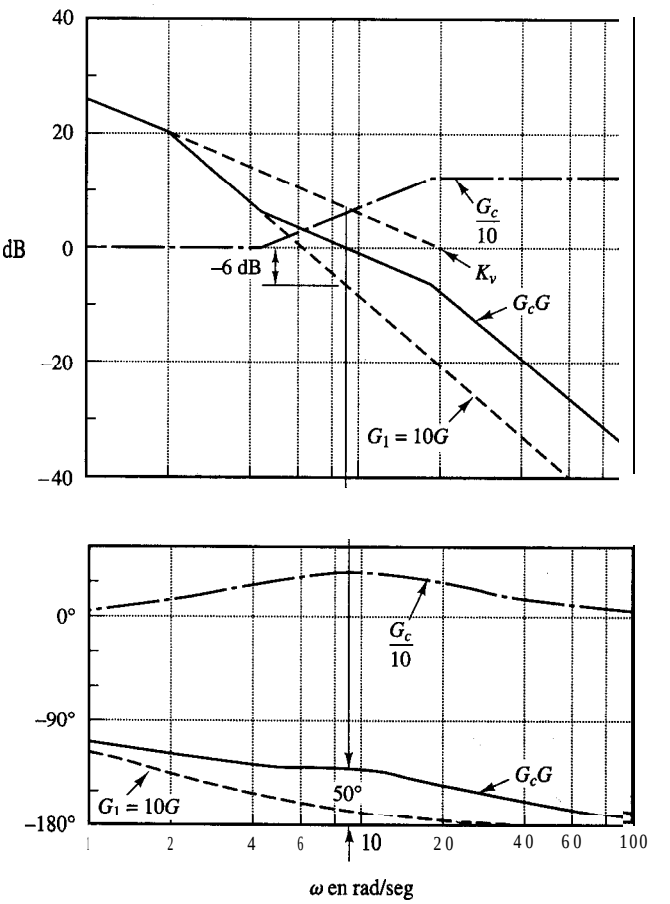


Figura 9-8
Trazas de Bode para el sistema compensado.

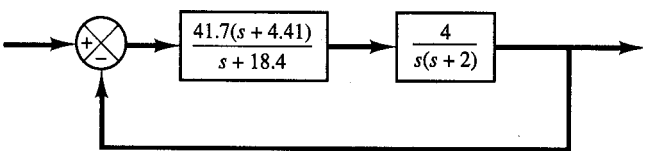


Figura 9–9
Sistema compensado.

valor de M_r se obtiene con facilidad si se transfieren los datos de las trazas de Bode a la carta de Nichols.)

Observe que, si el ángulo de fase de $G_1(j\omega)$ cerca de la frecuencia de cruce de ganancia disminuye rápidamente, la compensación de adelanto pierde su efectividad, porque el movimiento hacia la derecha de la frecuencia de cruce de ganancia hace difícil proporcionar un adelanto de fase suficiente para la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Esto significa que, con el fin de aportar el margen de fase deseado, debemos usar un valor de α muy pequeño. Sin embargo, el valor de α no debe ser demasiado pequeño (menor que 0.05), ni el adelanto de fase máximo ϕ_m debe ser demasiado grande (mayor de 65°), pues tales valores requerirán una ganancia adicional con un valor excesivo. [Si se necesitan más de 65°, se usan dos (o más) redes de adelanto en serie, con un amplificador de aislamiento.]

Por último, examinaremos las características de la respuesta transitoria del sistema diseñado. Obtendremos las curvas de respuesta escalón unitario y de respuesta rampa unitaria de los sistemas

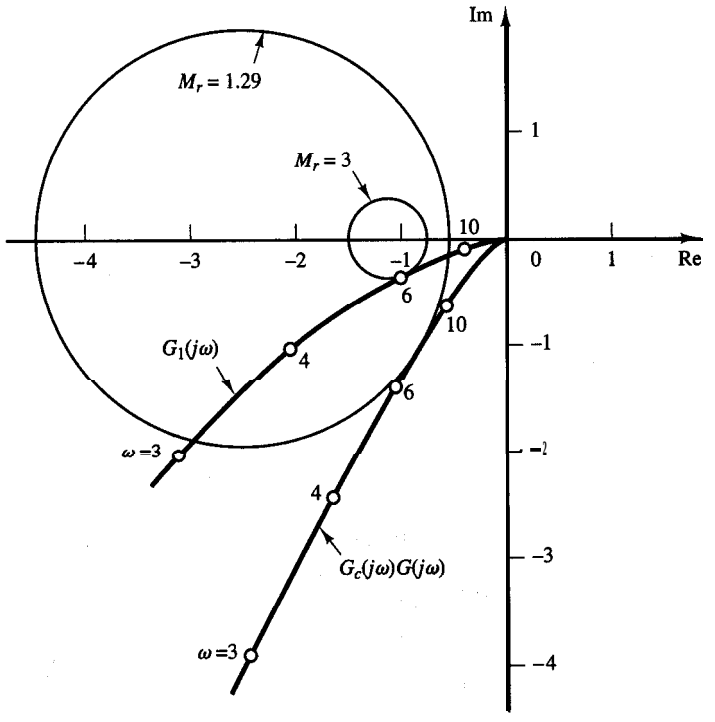


Figura 9–10
Trazas polares de la función de transferencia en lazo abierto compensada y no compensada. (G_1: sistema no compensado; G_cG: sistema compensado.)

compensado y no compensado con MATLAB. Observe que las funciones de transferencia en **lazo** cerrado de los sistemas no compensado y compensado se obtienen, respectivamente, mediante

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

Y

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{166.8s + 735.588}{s^3 + 20.4s^2 + 203.6s + 735.588}$$

El programa MATLAB 9-1 nos permite obtener las curvas de respuesta escalón unitario y rampa unitaria. La figura 9-11 muestra las curvas de la respuesta escalón unitario y la figura 9-12 contiene las curvas de respuesta rampa unitaria.Estas curvas de respuesta indican que el sistema diseñado es satisfactorio.

Programa MATLAB 9-1

```
%*****Respuesta escalón unitario*****

num = [0  0  4];
den = [1  2  4];
numc = [0  0  166.8  735.588];
denc = [1  20.4  203.6  735.588];
t = 0:0.02:6;
```

```
[c1,x1,t] = step(num,den,t);
[c2,x2,t] = step(numc,denc,t);
plot [t,c1,'-',t,c2,'-']
grid
title('Respuestas escalón unitario de los sistemas compensado y no compensado')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salidas')
text(0.33,1.3,'Sistema compensado')
text(1.55,0.88,'Sistema no compensado')

%*****Respuestas rampa unitaria*****

num1 = [0  0  0  4];
den1 = [1  2  4  0];
numc = [0  0  0  166.8  735.588];
denc = [1  20.4  204.6  735.588  0];
t = 0:0.02:5;
[y1,z1,t] = step(num1,den1,t);
[y2,z2,t] = step(numc,denc,t);
plot(t,y1,'-',t,y2,'--')
grid
title('Respuestas rampa unitaria de los sistemas compensado y no compensado')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salidas')
text(0.77,3.7,'Sistema compensado')
text(2.25,1.1,'Sistema no compensado')
```

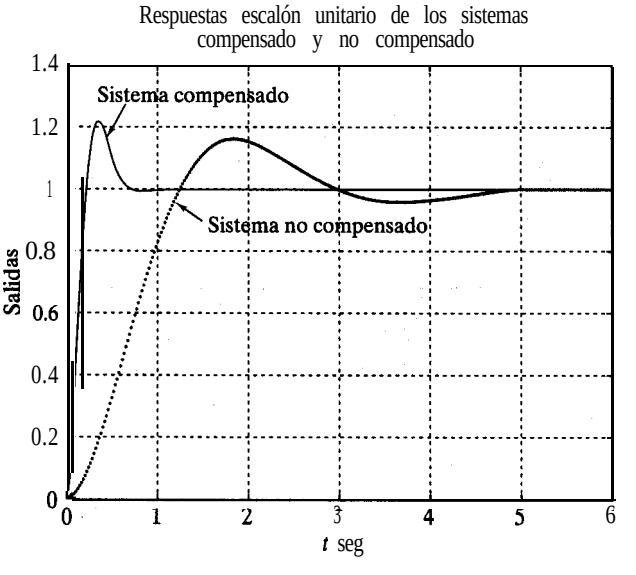


Figura 9-11
Curvas de respuesta escalón unitario de los sistemas compensado y no compensado.

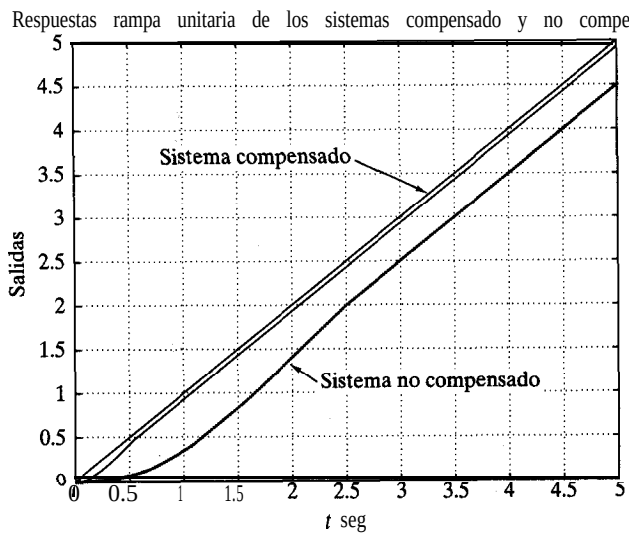


Figura **9–12**
Curvas de respuesta rampa unitaria de los sistemas compensado y no compensado.

Observe que los polos en lazo cerrado para el sistema compensado están en:

$$s = -6.9541 \pm j8.0592$$

$$s = -6.4918$$

Debido a que los polos dominantes en lazo cerrado se ubican lejos del eje $j\omega$, la respuesta se amortigua con rapidez.

9-3 COMPENSACIÓN DE ATRASO

En esta sección analizaremos, primero, la traza de Nyquist y las trazas de Bode del compensador de atraso. A continuación presentaremos las técnicas de compensación de atraso basadas en el enfoque de la respuesta en frecuencia.

Características de los compensadores de atraso. Considere un compensador de atraso que tiene la siguiente función de transferencia:

$$G_c(s) = K_c\beta\frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = K_c\frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \qquad (\beta > 1)$$

En el plano complejo, un compensador de atraso tiene un cero en $s = -1/T$ y un polo en $s = -1/(\beta T)$. El polo está a la derecha del cero.

La figura 9-13 muestra una traza polar del compensador de atraso. La figura 9-14 contiene las trazas de Bode del mismo, en donde $K_c = 1$ y $\beta = 10$. Las frecuencias de esquina del compensador de atraso están en $\omega = 1/T$ y $\omega = 1/(\beta T)$. Como se observa en la figura 9-14, en donde los valores de K_c y β se hacen igual a 1 y 10, respectivamente, la magnitud del compensador de atraso se vuelve 10 (o 20 dB) en frecuencias bajas, y 1 (o 0 dB) en frecuencias altas. Por tanto, el compensador de atraso es esencialmente un filtro de paso-bajas.

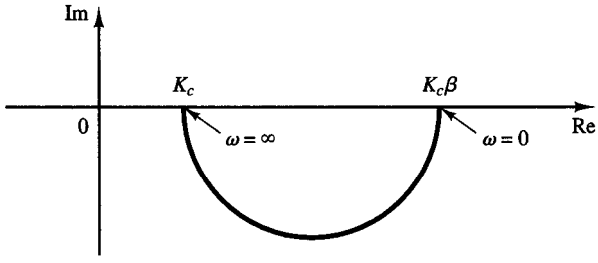


Figura 9–13
Traza polar de un compensador de atraso $K_c\beta(j\omega T + 1)/(j\omega\beta T + 1)$.

Técnicas de compensación de atraso basadas en el enfoque de la respuesta en frecuencia. La función principal de un compensador de atraso es proporcionar una atenuación en el rango de las frecuencias altas a fin de aportar un margen de fase suficiente al sistema. La característica de atraso de fase no afecta la compensación de atraso.

El procedimiento para diseñar compensadores de atraso para el sistema de la figura 9-5, mediante el enfoque de la respuesta en frecuencia, se plantea del modo siguiente:

1. Suponga el compensador de atraso:

$$G_c(s) = K_c\beta\frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = K_c\frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \qquad (\beta > 1)$$

Defina

$$K_c\beta = K$$

De modo que

$$G_c(s) = K\frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1}$$

La función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado es

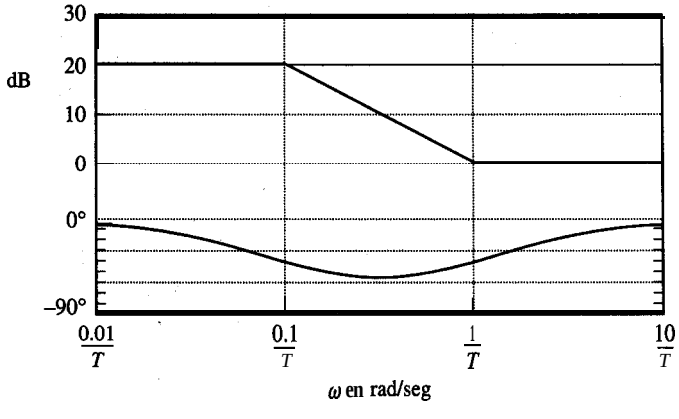


Figura 9-14
Trazas de Bode del compensador de atraso $\beta(j\omega T + 1)/(j\omega\beta T + 1)$, con $\beta = 10$.

$$G_c(s)G(s) = K\frac{Ts+1}{\beta Ts+1}G(s) = \frac{Ts+1}{\beta Ts+1}KG(s) = \frac{Ts+1}{\beta Ts+1}G_1(s)$$

en donde

$$G_1(s) = KG(s)$$

Determine la ganancia K que satisfaga el requerimiento en la constante de error estático establecida.

2. Si el sistema no compensado $G_1(j\omega) = KG(j\omega)$ no satisface las especificaciones en los márgenes de fase y de ganancia, encuentre el punto de frecuencia en el cual el ángulo de fase de la función de transferencia en lazo abierto sea igual a $-180°$ más el margen de fase requerido. Éste es el margen de fase especificado entre 5 y 12°. (La adición de entre 5 y 12° compensa el atraso de fase del compensador de atraso.) Seleccione ésta como la nueva frecuencia de cruce de ganancia.

3. Para evitar los efectos nocivos del atraso de fase producido por el compensador de atraso, el polo y el cero del compensador de atraso deben ubicarse mucho más abajo que la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Por tanto, seleccione la frecuencia de esquina $\omega = 1/T$ (que corresponde al cero del compensador de atraso) entre una octava y una década por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia. (Si las constantes de tiempo del compensador de atraso no se vuelven demasiado grandes, se selecciona la esquina de frecuencia $\omega = 1/T$ una década por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia.)

4. Determine la atenuación necesaria para disminuir la curva de magnitud a 0 dB en la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Considerando que esta atenuación es de $-20 \log \beta$, determine el valor de β. Luego se obtiene la otra frecuencia de esquina (que corresponde al polo del compensador de atraso) a partir de $\omega = 1/(\beta/T)$.

5. Usando el valor de K determinado en el paso 1 y el de β obtenido en el paso 5, calcule la constante K_c a partir de

$$K_c = \frac{K}{\beta}$$

EJEMPLO 9-2 Considere el sistema de la figura 9-15. La función de transferencia en lazo abierto se obtiene mediante

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

Se desea compensar el sistema a fin de que la constante de error estático de velocidad K_v sea de 5 seg^{-1}, el margen de fase sea de cuando menos 40° y el margen de ganancia sea de cuando menos 10 dB.

Usaremos un compensador de atraso de la forma

$$G_c(s) = K_c\beta\frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = K_c\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} \qquad (\beta > 1)$$

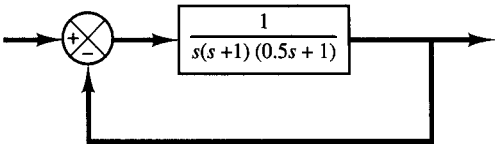


Figura 9–15
Sistema de control.

Defina

$$K_c\beta = K$$

También defina

$$G_1(s) = KG(s) = \frac{K}{s(s + 1)(0.5s + 1)}$$

El primer paso en el diseño es ajustar la ganancia K para que cumpla con la constante de error estático de velocidad requerida. Por tanto,

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1}G_1(s) = \lim_{s\to 0} sG_1(s)$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{sK}{s(s + 1)(0.5s + 1)} = K = 5$$

0 bien

$$K = 5$$

Con K = 5, el sistema compensado satisface el requerimiento de desempeño en estado estable.

A continuación graficamos las trazas de Bode de

$$G_1(j\omega) = \frac{5}{j\omega(j\omega + 1)(0.5j\omega + 1)}$$

La curva de magnitud y la curva del ángulo de fase de $G_1(j\omega)$ aparecen en la figura 9-16. A partir de estas trazas, vemos que el margen de fase es de $-20°$, lo cual significa que el sistema es inestable.

Considerando que la adición de un compensador de atraso modifica la curva de fase de las trazas de Bode, debemos permitir entre 5 y 12" a fin de que el margen de fase especificado compense la modificación de la curva de fase. Dado que la frecuencia correspondiente a un margen de fase de 40° es de 0.7 radlseg, la nueva frecuencia de cruce de ganancia (del sistema compensado) debe seleccionarse cercana a este valor. Con el fin de evitar las constantes de tiempo muy grandes para el compensador de atraso, debemos elegir la frecuencia de esquina $\omega = 1/T$ (que corresponde al cero del compensador de atraso) como 0.1 rad/seg. Dado que esta frecuencia de esquina no está muy abajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia, la modificación de la curva de fase tal vez no sea pequeña. Por tanto, agregamos cerca de 12" al margen de fase proporcionado, como una tolerancia para considerar el ángulo de atraso introducido mediante el compensador de atraso. El margen de fase requerido es ahora de 52". El ángulo de fase de la función de transferencia en lazo abierto no compensada es de - 128" en la cercanía de ω = 0.5 rad/seg. Por tanto, tomamos la nueva frecuencia de cruce de ganancia como de 0.5 radlseg. Para bajar la curva de magnitud hasta 0 dB en esta nueva frecuencia de cruce de ganancia, el compensador de atraso debe proporcionar la atenuación necesaria que, en este caso, es de -20 dB. Por tanto,

$$20 \log \frac{1}{\beta} = -20$$

o bien,

$$\beta = 10$$

La otra frecuencia de esquina $\omega = 1(\beta T)$, que corresponde al polo del compensador de atraso, se determina, entonces, como

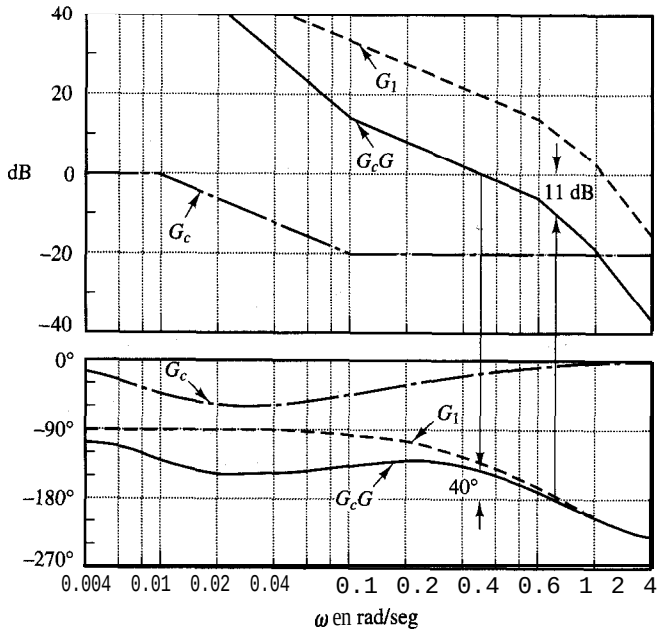


Figura 9-16
Trazas de Bode para el sistema no compensado, el compensador y el sistema compensado. (G_1: sistema no compensado, G_c: compensador, G_cG: sistema compensado.)

$$\frac{1}{\beta T} = 0.01 \text{ rad/seg}$$

Por tanto, la función de transferencia del compensador de atraso es

$$G_c(s) = K_c(10)\frac{10s + 1}{100s + 1} = K_c\frac{s + \frac{1}{10}}{s + \frac{1}{100}}$$

Dado que la ganancia K se determinó como 5 y β como 10, tenemos que

$$K_c = \frac{K}{\beta} = \frac{5}{10} = 0.5$$

La función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado es

$$G_c(s)G(s) = \frac{5(10s + 1)}{s(100s + 1)(s + 1)(0.5s + 1)}$$

La figura 9-16 también muestra las curvas de magnitud y de ángulo de fase de $G_c(j\omega)G(j\omega)$.

El margen de fase del sistema compensado es de alrededor de 40°, que es el valor requerido. El margen de ganancia es de aproximadamente 11 dB, valor bastante aceptable. La constante de error estático de velocidad es de 5 seg^{-1}, tal como se requiere. Por tanto, el sistema compensado satisface los requerimientos en estado estable y la estabilidad relativa.

observe que esta nueva frecuencia de cruce de ganancia disminuyó de cerca de 2 a 0.5 radlseg. Esto significa que el ancho de banda del sistema se redujo.

Para apreciar mejor los efectos de la compensación de atraso, la figura 9-17 muestra las trazas de la magnitud logarítmica contra la fase del sistema no compensado $G_1(j\omega)$ y del sistema compensado $G_c(j\omega)G(j\omega)$. La traza de $G_1(j\omega)$ muestra claramente que el sistema no compensado es inestable. Al agregar el compensador de atraso el sistema se estabiliza. La traza de $G_c(j\omega)G(j\omega)$ es tangente al lugar geométrico M = 3 dB. Por tanto, el valor del pico de resonancia es de 3 dB, o 1.4, y este pico ocurre en ω = 0.5 radlseg.

Los compensadores diseñados con métodos diferentes o por diseñadores distintos (incluso mediante el mismo enfoque) pueden resultar muy diferentes. Sin embargo, cualquier sistema bien diseñado producirá un desempeño transitorio y en estado estable similar. La mejor entre muchas alternativas se elige a partir de la consideración económica de que las constantes de tiempo del compensador de atraso no deben ser demasiado grandes.

Por último examinaremos la respuesta escalón unitario y la respuesta rampa unitaria del sistema compensado y del sistema no compensado original. Las funciones de transferencia en lazo cerrado de los sistemas compensado y no compensado son

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{50s + 5}{50s^4 + 150.5s^3 + 101.5s^2 + 51s + 5}$$

y

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{0.5s^3 + 1.5s^2 + s + 1}$$

respectivamente. El programa MATLAB 9-2 producirá las respuestas escalón unitario y rampa unitaria de los sistemas compensado y no compensado. Las curvas de respuesta escalón unitario y rampa unitaria resultantes aparecen en las figuras 9-18 y 9-19, respectivamente. A partir de las curvas de respuesta encontramos que el sistema diseñado satisface las especificaciones proporcionadas y que es satisfactorio.

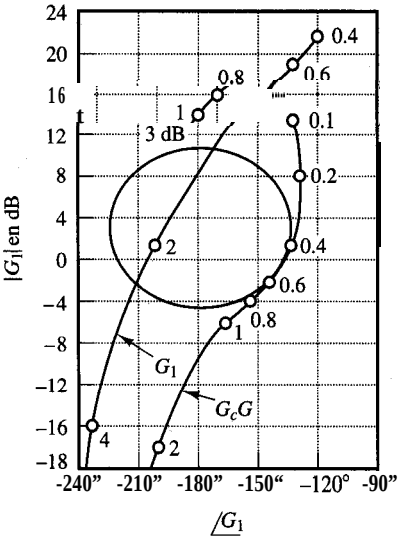


Figura 9–17
Trazas de la magnitud logarítmica contra la fase del sistema no compensado y del sistema compensado. (G_1: sistema no compensado, G_cG: sistema compensado.)

Programa MATLAB 9-2

```
%*****Respuesta escalón unitario*****

num = [0   0   0   1];
den = [0.5   1.5   1   1];
numc = [0   0   0   50   5];
denc = [50   150.5   101.5   51   5];
t = 0:0.1:40;
[c1,x1,t] = step(num,den,t);
[c2,x2,t] = step(numc,denc,t);
plot(t,c1,'.',t,c2,'-')
grid
title('Respuestas escalón unitario de los sistemas compensado y no compensado')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salidas')
text(12.2,1.27,'Sistema compensado')
text(12.2,0.7,'Sistema no compensado')

%*****Respuesta rampa unitaria*****

num1 = [0   0   0   0   1];
den1 = [0.5   1.5   1   1   0];
num1c = [0   0   0   0   50   5];
den1c = [50   150.5   101.5   51   5   0];
t = 0:0.1:20;
[y1,z1,t] = step(num1,den1,t);
[y2,z2,t] = step(num1c,den1c,t);
plot(t,y1,'.',t,y2,'-',t,t,'--');
grid
title('Respuestas rampa unitaria de los sistemas compensado y no compensado')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salidas')
text(8.4,3,'Sistema compensado')
text(8.4,5,'Sistema no compensado')
```

Observe que el cero y los polos de los sistemas en lazo cerrado diseñados son los siguientes:

Cero en $s = -0.1$

Polos en $s = -0.2859 \pm j0.5196$, $s = -0.1228$, $s = -2.3155$

Los polos dominantes en lazo cerrado están muy cerca del eje $j\omega$, por lo cual la respuesta es lenta. Asimismo, el par formado por el polo en lazo cerrado en $s = -0.1228$ y el cero en $s = -0.1$ produce una cola lentamente decreciente de amplitud pequeña.

Algunos comentarios sobre la compensación de atraso

1. Los compensadores de atraso son, en esencia, filtros paso-bajas. Por tanto, la compensación de atraso permite una ganancia alta en las frecuencias bajas (lo cual mejora el desempeño en estado estable) y reduce la ganancia en el rango de las frecuencias críticas

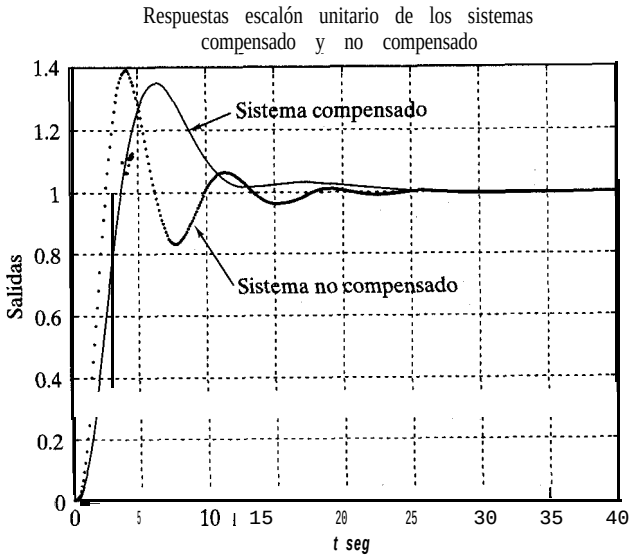


Figura 9-18
Curvas de respuesta escalón unitario para los sistemas compensado y no compensado (ejemplo 9-2).

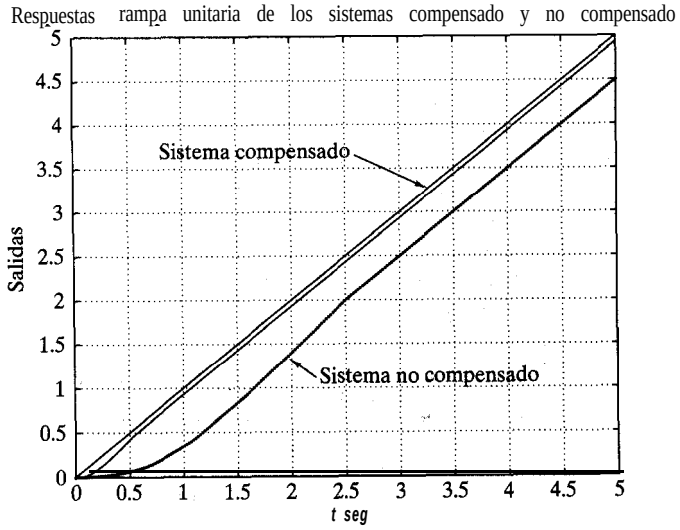


Figura 9-19
Curvas de respuesta rampa unitaria para los sistemas compensado y no compensado (ejemplo **9-2).**

más altas, a fin de mejorar el margen de fase. Observe que en la compensación de atraso utilizamos la característica de atenuación del compensador de atraso en frecuencias altas, en lugar de la característica de atraso de fase. (La característica de atraso de fase no sirve para propósitos de compensación.)

2. Suponga que el cero y el polo de un compensador de atraso se ubican en $s = -z$ y $s = -p$, respectivamente. Entonces, la ubicación exacta del cero y el polo no es crítica, dado que están cerca del origen, y el cociente z/p es igual al factor de multiplicación requerido de la constante de error estático de velocidad.

Sin embargo, debe señalarse que el cero y el polo del compensador de atraso no necesariamente están cerca del origen, porque el compensador de atraso crea un polo adicional en lazo cerrado en la misma región que el cero y el polo del compensador de atraso.

El polo en lazo cerrado que está cerca del origen proporciona una respuesta transitoria decreciente muy lenta, aunque su magnitud se vuelve muy pequeña porque el cero del compensador de atraso casi cancela el efecto de este polo. Sin embargo, la respuesta transitoria (decae) producida por este polo es tan lenta que el tiempo de asentamiento se ve muy afectado.

También se observa que, en el sistema compensado mediante el compensador de atraso, la función de transferencia entre la perturbación de la planta y el error del sistema tal vez no contenga un cero cerca de este polo. Por tanto, es posible que la respuesta transitoria a la entrada de perturbación sea muy prolongada.

3. La atenuación producida por el compensador de atraso cambia la frecuencia de cruce de ganancia a un punto de frecuencia más bajo en el cual el margen de fase sea aceptable. Por tanto, el compensador de atraso reduce el ancho de banda del sistema y provoca una respuesta transitoria más lenta. [La curva del ángulo de fase de $G_c(j\omega)G(j\omega)$ se encuentra relativamente sin modificaciones cerca y arriba de la nueva frecuencia de cruce de ganancia.]

4. Dado que el compensador de atraso tiende a integrar la señal de entrada, funciona más o menos como un controlador proporcional-integral. Por esta razón, un sistema cuyo atraso se compensa tiende a volverse menos estable. Para evitar esta característica no conveniente, la constante de tiempo T debe hacerse suficientemente más grande que la mayor constante de tiempo del sistema.

5. Puede haber una estabilidad condicional cuando un sistema tiene saturación o con limitaciones se ajusta mediante un compensador de atraso. Cuando la saturación o la limitación tienen lugar en el sistema, se reduce la ganancia de lazo efectiva. Así, el sistema se vuelve menos estable e incluso puede operar de manera inestable, como se observa en la figura 9-20. Para evitar esto, el sistema debe diseñarse de modo que el efecto de la compensación de atraso se vuelva significativo sólo cuando la amplitud de la entrada al ele-

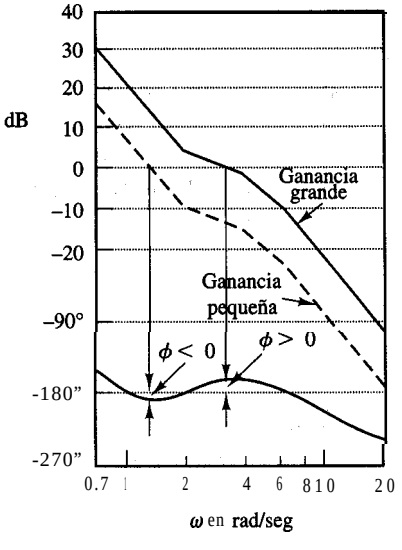


Figura 9–20
Trazas de Bode de un sistema condicionalmente estable.

mento de saturación sea pequeña. (Esto se consigue mediante una compensación menor del lazo de realimentación.)

9-4 COMPENSACIÓN DE ATRASO-ADELANTO

Primero examinaremos las características de respuesta del compensador de atraso-adelanto. Después presentaremos la técnica de compensación de atraso-adelanto basada en el enfoque de la respuesta en frecuencia.

Característica del compensador de atraso-adelanto. Considere el compensador de atraso-adelanto obtenido mediante

$$G_c(s) = K_c\left(\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\gamma}{T_1}}\right)\left(\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}}\right) \tag{9–3}$$

en donde $\gamma > 1$ y $\beta > 1$. El término

$$\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\gamma}{T_1}} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{T_1 s+1}{\frac{T_1}{\gamma}s+1}\right) \qquad (\gamma > 1)$$

produce el efecto de una red de adelanto, y el término

$$\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}} = \beta\left(\frac{T_2 s+1}{\beta T_2 s+1}\right) \qquad (\beta > 1)$$

produce el efecto de una red de atraso.

Al diseñar un compensador de atraso-adelanto, es común seleccionar γ = j3. (Esto, por supuesto, no es necesario, ya que podemos elegir $\gamma \neq \beta$.) A continuación, considere el caso en el que $\gamma = \beta$. La traza polar del compensador de atraso-adelanto con $K_c = 1$ y $\gamma = \beta$ se convierte en la que aparece en la figura 9-21. Observe que, para $0 < \omega < \omega_1$, el compensador funciona como

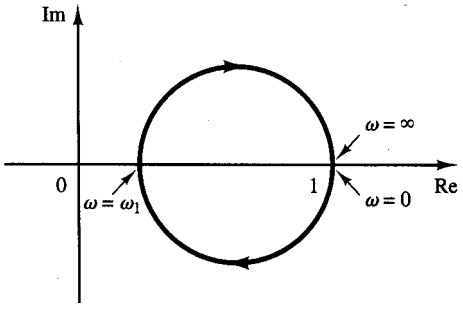


Figura 9–21
Traza polar de un compensador de atraso-adelanto obtenido mediante la ecuación (9–3), con $K_c = 1$ y $\gamma = \beta$.

un compensador de atraso, en tanto que, para $\omega_1 < \omega < \infty$, funciona como un compensador de adelanto. La frecuencia ω_1 es aquella en la cual el ángulo de fase es cero. Se obtiene mediante

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

(Para obtener esta ecuación, véase el problema A-9-2.)

La figura 9-22 muestra las trazas de Bode del compensador de atraso-adelanto cuando $K_c = 1, \gamma = \beta = 10$ y $T_2 = 10T_1$. Observe que la curva de magnitud tiene un valor de 0 dB en las regiones de frecuencia alta y baja.

Compensación de atraso-adelanto basada en el enfoque de la respuesta en frecuencia. El diseño de un compensador de atraso-adelanto mediante el enfoque de la respuesta en frecuencia se basa en la combinación de las técnicas de diseño analizadas en la compensación de adelanto y la compensación de atraso.

Supongamos que el compensador de atraso-adelanto tiene la forma siguiente:

$$G_c(s) = K_c \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\beta} s + 1\right)(\beta T_2 s + 1)} = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)} \qquad (9\text{–}4)$$

en donde $\beta > 1$. La parte de adelanto de fase del compensador de atraso-adelanto (la parte que contiene T_1) altera la curva de respuesta en frecuencia añadiendo un ángulo de adelanto de fase e incrementando el margen de fase en la frecuencia de cruce de ganancia. La parte de atraso de fase (la parte que contiene T_2) proporciona una atenuación cercana y por arriba de la frecuencia de cruce de ganancia y, por tanto, permite un incremento de la ganancia en el rango de frecuencias bajas a fin de mejorar el desempeño en estado estable.

Ilustraremos los detalles de los procedimientos para diseñar un compensador de atraso-adelanto mediante un ejemplo.

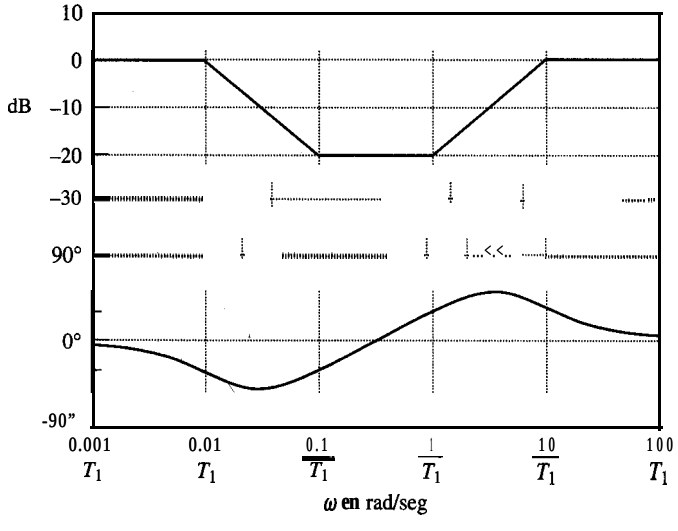


Figura 9-22
Trazas de Bode de un compensador de atraso-adelanto obtenido mediante la ecuación (9-3) con $K_c = 1, \gamma = \beta = 10$, y $T_2 = 10T_1$.

EJEMPLO 9–3 Considere el sistema con realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) \quad \frac{K}{s(s + 1)(s + 2)}$$

Se quiere que la constante de error estático de velocidad sea de 10 seg^{-1}, que el margen de fase sea de 50" y que el margen de ganancia sea de 10 dB o más.

Suponga que usamos el compensador de atraso-adelanto obtenido mediante la ecuación (9-4). La función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado es $G_c(s)G(s)$. Dado que la ganancia K de la planta es ajustable, suponemos que $K_c = 1$. En este caso, $\lim_{s\to 0} G,(s) = 1$.

A partir del requerimiento en la constante de error estático de velocidad, obtenemos

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0} sG_c(s) \frac{K}{s(s + 1)(s + 2)} = \frac{K}{2} = 10$$

Por tanto,

$$K = 20$$

A continuación dibujamos las trazas de Bode del sistema no compensado con $K = 20$, como se observa en la figura 9-23. El margen de fase del sistema no compensado es de $-32°$, lo cual indica que el sistema es inestable.

El paso siguiente en el diseño de un compensador de atraso-adelanto es seleccionar una nueva frecuencia de cruce de ganancia. A partir de la curva del ángulo de fase para $G(j\omega)$, observamos que $\angle G(j\omega) = -180°$ en $\omega = 1.5$ radlseg. Es conveniente elegir la nueva frecuencia de cruce de ganancia como de 1.5 rad/seg, a fin de que el adelanto de ángulo de fase requerido en $\omega = 1.5$ radheg sea de alrededor de 50°, lo cual es muy posible mediante una sola red de atraso-adelanto.

Una vez que seleccionamos la frecuencia de cruce de ganancia como de 1.5 radlseg determinamos la frecuencia de esquina de la parte de atraso de fase del compensador de atraso-adelanto. Seleccionamos la frecuencia de esquina $\omega = 1/T_2$ (que corresponde al cero de la parte de atraso de fase del compensador) que se encuentra una década abajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia, o en $\omega = 0.15$ radlseg.

Recuerde que, para el compensador de adelanto, el máximo adelanto de ángulo de fase ϕ_m se obtiene mediante la ecuación (9–1), donde la α de la ecuación (9-1) es $1/\beta$ en el caso actual. Sustituyendo a por $1/\beta$ en la ecuación (9–1), tenemos que

$$\text{sen}\,\phi_m = \frac{1 - \frac{1}{\beta}}{1 + \frac{1}{\beta}} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}$$

Observe que $\beta = 10$ corresponde a $\phi_m = 54.9°$. Dado que necesitamos un margen de fase de 50°, seleccionamos $\beta = 10$. (Observe que usaremos varios grados menos que el ángulo máximo, 54.9°.) Por tanto,

$$\beta = 10$$

Así, la frecuencia de esquina $\omega = 1/\beta T_2$ (que corresponde al polo de la parte de atraso de fase del compensador) se vuelve $\omega = 0.015$ radheg. La función de transferencia de la parte de atraso de fase del compensador de atraso-adelanto se vuelve, por tanto,

$$\frac{s + 0.15}{s + 0.015} = 10\left(\frac{6.67s + 1}{66.7s + 1}\right)$$

La parte de adelanto de fase se determina del modo siguiente: dado que la nueva frecuencia de cruce de ganancia es $\omega = 1.5$ rad/seg, a partir de la figura 9-23, $G(j1.5)$ es de 13 dB. Por tanto, si el compensador de atraso-adelanto contribuye con -13 dB en $\omega = 1.5$ rad/seg, la nueva fre-

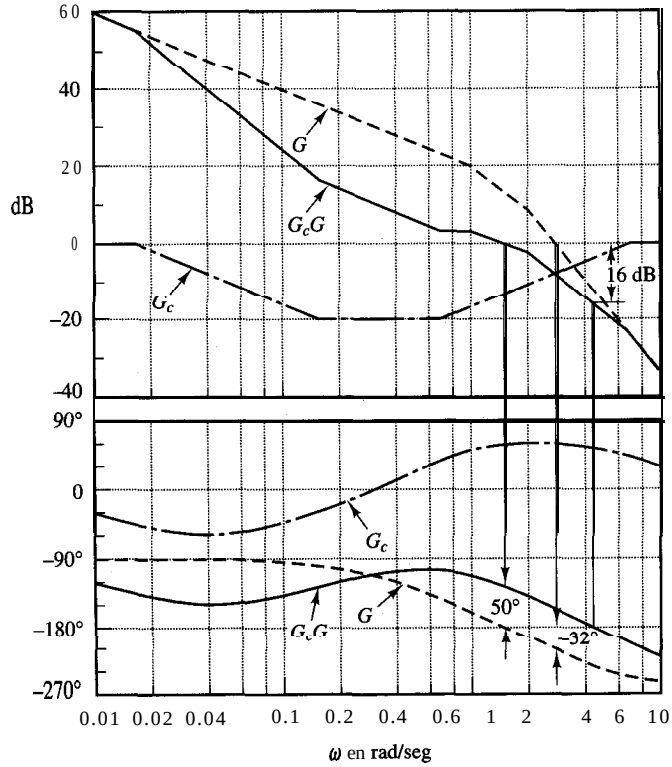


Figura 9–23
Trazas de Bode para el sistema no compensado, el compensador y el sistema compensado. (G = sistema no compensado, G_c = compensador, G_cG = sistema compensado.)

cuencia de cruce de ganancia es la que se busca. A partir de este requerimiento, es posible dibujar una recta con una pendiente de 20 dB/década y que pase por el punto (-13 dB, 1.5 rad/seg). Las intersecciones de esta línea y la línea 0 dB con la línea -20 dB determinan las frecuencias de esquina. Por tanto, las frecuencias de esquina para la parte de adelanto son $\omega = 0.7$ rad/seg y $\omega = 7$ rad/seg. En este caso, la función de transferencia de la parte de adelanto del compensador de atraso-adelanto se vuelve

$$\frac{s + 7}{s + 0.7} = 10\left(\frac{0.143s + 1}{1.43s + 1}\right)$$

Si combinamos las funciones de transferencia de las partes de atraso y de adelanto del compensador, obtenemos la función de transferencia del compensador de atraso-adelanto. Dado que elegimos $K_c = 1$, tenemos que

$$G_c(s) = \left(\frac{s + 0.7}{s + 7}\right)\left(\frac{s + 0.15}{s + 0.015}\right) = \left(\frac{1.43s + 1}{0.143s + 1}\right)\left(\frac{6.67s + 1}{66.7s + 1}\right)$$

Las curvas de magnitud y de ángulo de fase del compensador de atraso-adelanto recién diseñado aparecen en la figura 9-23. La función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado es

$$G_c(s)G(s) = \frac{(s + 0.7)(s + 0.15)20}{(s + 7)(s + 0.015)s(s + 1)(s + 2)}$$

$$= \frac{10(1.43s + 1)(6.67s + 1)}{s(0.143s + 1)(66.7s + 1)(s + 1)(0.5s + 1)} \qquad (9\text{-}5)$$

Las curvas de magnitud y de ángulo de fase del sistema de la ecuación (9-5) también aparecen en la figura 9-23. El margen de fase del sistema compensado es de 50°, el margen de ganancia es de 16 dB y la constante de error estático de velocidad es de 10 seg^{-1}. Por tanto, se cumplen todos los requerimientos y el diseño queda terminado.

La figura 9-24 muestra las trazas polares del sistema no compensado y del sistema compensado. El lugar geométrico de $G_c(j\omega)G(j\omega)$ es tangente al círculo M = 1.2 en cerca de ω = 2 rad/seg. Esto indica claramente que el sistema compensado tiene una estabilidad relativa satisfactoria. El ancho de banda del sistema compensado es ligeramente mayor que 2 rad/seg.

A continuación examinaremos las características de la respuesta transitoria del sistema compensado. (El sistema no compensado es inestable.) La función de transferencia en lazo cerrado del sistema compensado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{95.381s^2 + 81s + 10}{4.7691s^5 + 47.7287s^4 + 110.3026s^3 + 163.724s^2 + 82s + 10}$$

Las curvas de respuesta escalón unitario y rampa unitaria obtenidas con MATLAB aparecen en las figuras 9-25 y 9-26, respectivamente.

Observe que el sistema de control en lazo cerrado diseñado tiene los ceros y polos en `lazo` cerrado siguientes:

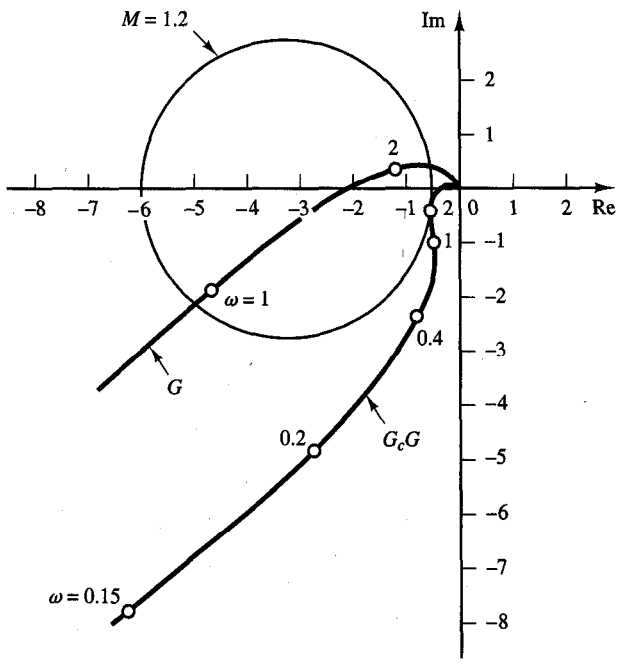


Figura 9–24
Trazas polares del sistema no compensado y del sistema compensado. (G: sistema no compensado, G_cG: sistema compensado.)

Ceros en $s = -0.1499$, $s = -0.6993$

Polos en $s = -0.8973 \pm j1.4439$

$s = -0.1785$, $s = -0.5425$, $s = -7.4923$,

El polo en $s = -0.1785$ y el cero en $s = -0.1499$ se localizan muy cerca uno del otro. Este par polo y cero produce una cola larga de amplitud pequeña en la respuesta escalón, como se observa en la figura 9-25. Asimismo, el polo en $s = -0.5425$ y el cero en $s = -0.6993$ se ubican bastante cerca uno del otro. Este par adiciona una amplitud a la cola larga.

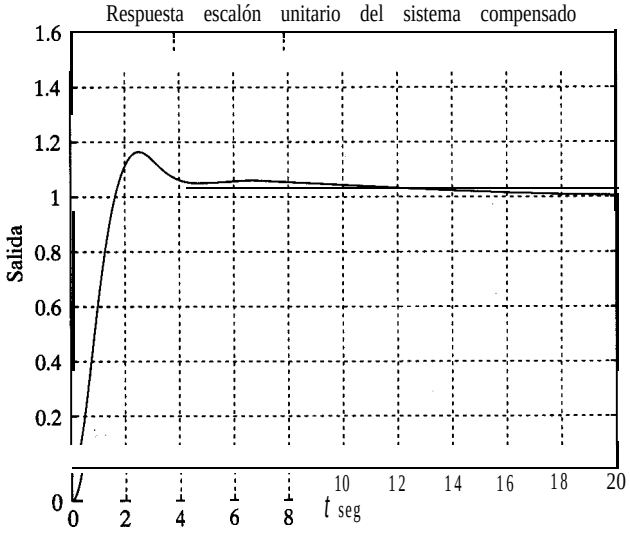


Figura 9-25
Respuesta escalón unitario del sistema compensado (ejemplo 9-3).

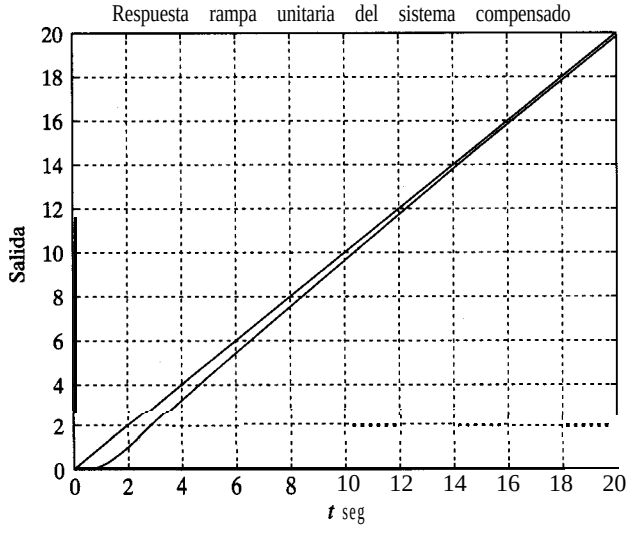


Figura 9-26
Respuesta rampa unitaria del sistema compensado (ejemplo 9-3).

9-5 COMENTARIOS FINALES

Este capítulo presentó los procedimientos detallados para diseñar compensadores de adelanto, de atraso y de atraso-adelanto, mediante ejemplos simples. Mostramos que el diseño de un compensador que satisfaga las especificaciones planteadas (en términos del margen de fase y del margen de ganancia) se lleva a cabo mediante las trazas de Bode de manera simple y directa. Observe que un diseño satisfactorio de un compensador para un sistema complejo requiere de una aplicación creativa de estos principios de diseño básicos.

Comparación de las compensaciones de atraso, de adelanto y de atraso-adelanto

1. La compensación de adelanto proporciona el resultado deseado mediante su contribución al adelanto de la fase, en tanto que la compensación de atraso logra el resultado a través de su propiedad de atenuación en frecuencias altas. (En algunos problemas de diseño, la compensación de atraso y la compensación de adelanto pueden satisfacer las especificaciones.)

2. La compensación de adelanto suele usarse para mejorar los márgenes de estabilidad. La compensación de adelanto produce una frecuencia de cruce de ganancia más alta que la que puede obtenerse con la compensación de atraso. La frecuencia de cruce de ganancia más alta significa un mayor ancho de banda. Un ancho de banda grande significa una reducción en el tiempo de asentamiento. El ancho de banda de un sistema con compensación de adelanto siempre es mayor que la de otro con compensación de atraso. Por tanto, si se desea un ancho de banda grande o una respuesta rápida, debe emplearse la compensación de adelanto. Sin embargo, si hay señales de ruido presentes, tal vez no sea conveniente un ancho de banda grande, dado que éste hace al sistema más susceptible a las señales de ruido, debido al incremento en la ganancia de frecuencia alta.

3. La compensación de adelanto requiere de un incremento adicional en la ganancia a fin de compensar la atenuación inherente a la red de adelanto. Esto significa que la compensación de adelanto requiere de una ganancia mayor que la que requiere la compensación de atraso. Una ganancia mayor casi siempre implica un mayor espacio, mayor peso y un costo más alto.

4. La compensación de atraso reduce la ganancia del sistema en las frecuencias más altas sin reducirla en las frecuencias mas bajas. Dado que el ancho de banda del sistema se reduce, éste responde a una velocidad más lenta. Debido a la ganancia reducida en la frecuencia alta, la ganancia total del sistema se incrementa y, por tanto, también se incrementa la ganancia de frecuencia baja y mejora la precisión en estado estable. Asimismo, los ruidos de frecuencia alta implícitos en el sistema se atenúan.

5. Si se desean respuestas rápidas y suficiente precisión estática, se usa un compensador de atraso-adelanto. Éste incrementa la ganancia de frecuencias bajas (lo cual significa un mejoramiento en la precisión en estado estable) y, al mismo tiempo, se incrementa el ancho de banda y los márgenes de estabilidad del sistema.

6. Aunque con los compensadores de adelanto, de atraso o de atraso-adelanto se realiza una mayor cantidad de tareas prácticas de compensación, para los sistemas complicados, una compensación simple mediante estos compensadores tal vez no produzca resultados satisfactorios. En este caso, deben emplearse diferentes compensadores con distintas configuraciones de polos y ceros.

Comparación gráfica. La figura 9–27(a) muestra una curva de respuesta escalón unitario y una curva de respuesta rampa unitaria de un sistema no compensado. Las curvas comunes de respuesta escalón unitario y rampa unitaria para el sistema compensado mediante una red de adelanto, de atraso y de atraso-adelanto se observan en las figuras 9-27 (b), (c) y

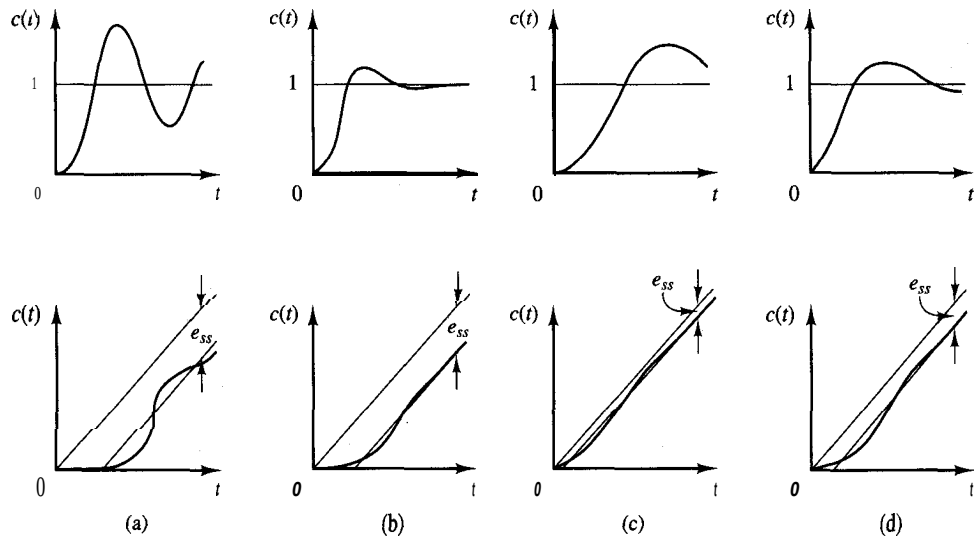


Figura 9-27
Curvas de respuesta escalón unitario y curvas de respuesta rampa unitaria. (a) sistema no compensado; (b) sistema compensado de adelanto; (c) sistema compensado de atraso; (d) sistema compensado de atraso-adelanto.

(d), respectivamente. El sistema con un compensador de adelanto presenta una respuesta más rápida, en tanto que aquél con un compensador de atraso presenta la respuesta más lenta, pero con un notable mejoramiento en la respuesta rampa unitaria. El sistema con un compensador de atraso-adelanto logra un equilibrio y un mejoramiento razonable tanto en la respuesta transitoria como en la respuesta en estado estable. Las curvas de respuesta mostradas representan la naturaleza de los mejoramientos que se esperan al usar los distintos tipos de compensadores.

Compensación mediante realimentación. Un tacómetro es uno de los dispositivos de realimentación de velocidad. Otro dispositivo común de realimentación de velocidad es un giroscopio de velocidad. Por lo general los sistemas de dirección automática de aeronaves emplean giroscopios de velocidad.

La realimentación de velocidad de un tacómetro se usa mucho en los sistemas de posicionamiento. Se observa que, si el sistema está sujeto a señales de ruido, la realimentación de velocidad genera cierta dificultad si un esquema de realimentación de velocidad específico lleva a cabo una diferenciación de la señal de salida. (El resultado es la acentuación de los efectos del ruido.)

Cancelación de polos no deseados. Dado que la función de transferencia de los elementos en cascada es el producto de sus funciones de transferencia individuales, es posible cancelar ciertos polos o ceros no deseados si se coloca en cascada un elemento de compensación y se ajustan sus polos y ceros para cancelar los polos o ceros no convenientes del sistema original. Por ejemplo, una constante de tiempo T_1 grande se cancela mediante la red de adelanto $(T_1s + 1)/(T_2s + 1)$ del modo siguiente:

$$\left(\frac{1}{T_1s + 1}\right)\left(\frac{T_1s + 1}{T_2s + 1}\right) = \frac{1}{T_2s + 1}$$

Si T_2 es mucho más pequeña que T_1, eliminamos efectivamente la constante de tiempo grande T_1. La figura 9-28 muestra el efecto de cancelar una constante de tiempo grande en la respuesta transitoria a escalón.

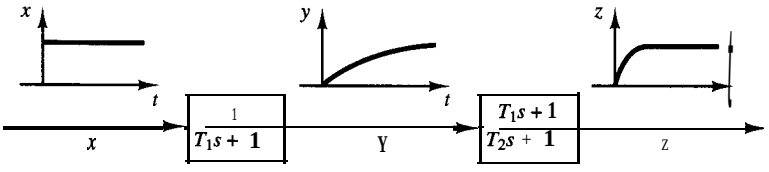


Figura 9-28
Curvas de respuesta escalón que muestran el efecto de cancelar una constante de tiempo grande.

Si un polo no deseado en el sistema original se encuentra en el semiplano derecho del plano s, no debe usarse este esquema de compensación, dado que, aunque matemáticamente es posible cancelar el polo no deseado con la adición de un cero, una cancelación exacta es físicamente imposible debido alas imprecisiones implícitas en la ubicación de los polos y los ceros. Un polo en el semiplano derecho del planos no cancelado por completo mediante el cero compensador terminará por volver inestable la operación, porque la respuesta implicará un término exponencial que se incrementará con el tiempo.

Observe que, si un polo en el semiplano izquierdo del plano s está casi, pero no totalmente, cancelado, y esto es lo que casi siempre ocurre, la combinación de polo y cero no cancelados provocará que la respuesta tenga una amplitud pequeña pero un componente de respuesta transitoria de larga duración. Si la cancelación no es exacta, pero es razonablemente buena, este componente será muy pequeño.

Debe señalarse que el sistema de control ideal no es aquél con una función de transferencia unitaria. Este sistema de control no puede construirse físicamente, dado que no puede transferir de manera instantánea la energía de la entrada a la salida. Además, dado que el ruido siempre está presente en una forma u otra, no es conveniente una función de transferencia unitaria. En muchos casos prácticos, un sistema de control deseado puede tener un conjunto de polos dominantes complejos conjugados en lazo cerrado con un factor de amortiguamiento relativo razonable y una frecuencia natural no amortiguada. La determinación de la parte significativa de la configuración de polos y ceros en lazo cerrado, por ejemplo la ubicación de los polos dominantes en lazo cerrado, se basa en las especificaciones que proporciona el desempeño del sistema requerido.

Cancelación de polos complejos conjugados no deseados. Si la función de transferencia de una planta contiene uno o más pares de polos complejos conjugados, tal vez un compensador de adelanto, de atraso, o de atraso-adelanto no produzca resultados satisfactorios. En este caso, resulta útil una red con dos ceros y dos polos. Si se eligen los ceros que cancelen los polos complejos conjugados no deseados de la planta, en esencia se sustituyen los polos no deseados con polos aceptables. Es decir, si los polos complejos conjugados no deseados se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s y tienen la forma

$$\frac{1}{s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2}$$

la inserción de una red de compensación que tenga la función de transferencia

$$\frac{s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2}{s^2 + 2\zeta_2\omega_2 s + \omega_2^2}$$

provocará un cambio efectivo de los polos complejos conjugados no deseados por polos aceptables. Observe que, aun cuando la cancelación tal vez no sea exacta, el sistema compensado exhibirá mejores características de respuesta. (Como se planteó antes, este enfoque no se usa si los polos complejos conjugados no deseados están en el semiplano derecho del plano s.)

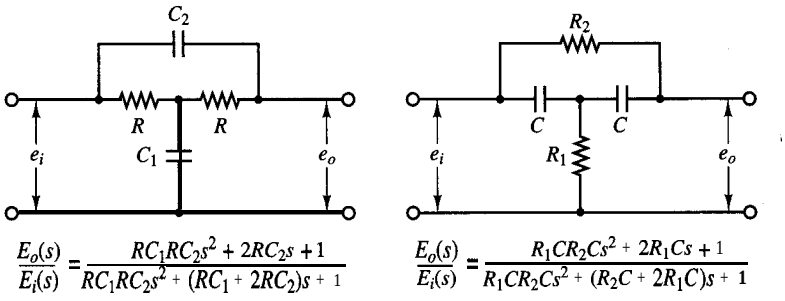


Figura 9-29
Redes de puente en *T*.

Las redes conocidas formadas sólo con componentes *RC* cuyas funciones de transferencia tienen dos ceros y dos polos son las redes de puentes en *T*. La figura 9-29 contiene ejemplos de redes de puentes en *T* y sus funciones de transferencia.

Comentarios finales. En los ejemplos de diseño que se presentaron en este capítulo nos concentramos en las funciones de transferencia de los compensadores. En los problemas de diseño reales, debemos seleccionar los elementos físicos (el hardware). Por tanto, deben cumplirse restricciones adicionales de diseño tales como el costo, el tamaño, el peso y la confiabilidad.

El sistema diseñado puede cumplir las especificaciones bajo condiciones de operación normales, pero puede desviarse en gran medida de las especificaciones cuando los cambios ambientales son considerables. Dado que los cambios en el ambiente afectan las constantes de ganancia y de tiempo del sistema, es necesario ofrecer medios automáticos o manuales que ajusten la ganancia, a fin de compensar los cambios ambientales para los efectos no lineales no considerados en el diseño y para compensar las tolerancias de manufactura de una unidad a otra en la producción de componentes del sistema. (Los efectos de las tolerancias de manufactura se suprimen en un sistema en lazo cerrado; por tanto, los efectos tal vez no sean críticos en una operación en lazo cerrado, pero son importantes en la operación en lazo abierto.) Además de esto, el diseñador debe recordar que cualquier sistema está sujeto a variaciones pequeñas debidas sobre todo, al deterioro normal del sistema.

EJEMPLO DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

A-9-1. Demuestre que la red de adelanto y la red de atraso insertadas en cascada en un lazo abierto funcionan como un control proporcional-derivativo (en la región de ω pequeñas) y un control proporcional-integral (en la región de ω grandes), respectivamente.

Solución. En la región de ω pequeñas, la traza polar de la red de adelanto es aproximadamente igual que la del controlador proporcional-derivativo. Esto se observa en la figura 9–30(a).

Asimismo, en la región de ω grandes, la traza polar de la red de atraso se aproxima al controlador proporcional-integral, como se aprecia en la figura 9–30(b).

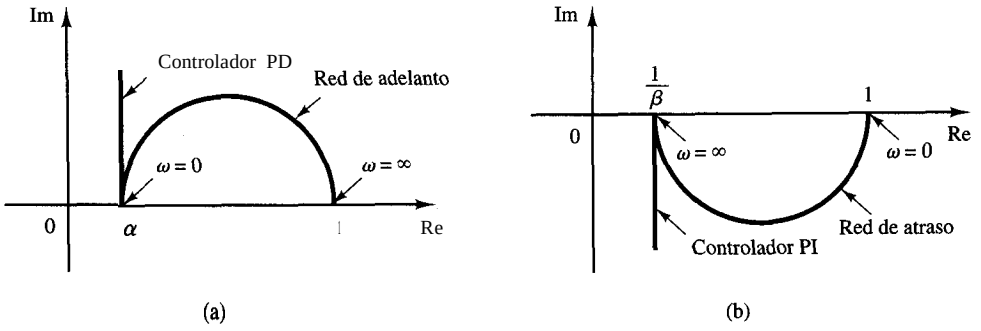


Figura **9–30**
(a) Trazas polares de una red de adelanto y un controlador proporcional-derivativo; (b) trazas polares de una red de atraso y un controlador proporcional-integral.

A-9-2. Considere el compensador de atraso-adelanto $G_c(s)$ definido mediante

$$G_c(s) = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)}$$

Demuestre que, en la frecuencia ω_1, en la cual

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

el ángulo de fase de $G_c(j\omega)$ se vuelve cero. (Este compensador funciona como un compensador de atraso para $0 < \omega < \omega_1$ y como un compensador de adelanto para $\omega_1 < \omega < \infty$.)

Solución. El ángulo de $G_c(j\omega)$ se obtiene mediante

$$\angle G_c(j\omega) = \angle j\omega + \frac{1}{T_1} + \angle j\omega + \frac{1}{T_2} - \angle j\omega + \frac{\beta}{T_1} - \angle j\omega + \frac{1}{\beta T_2}$$

$$= \tan^{-1}\omega T_1 + \tan^{-1}\omega T_2 - \tan^{-1}\omega T_1/\beta - \tan^{-1}\omega T_2\beta$$

En $\omega = \omega_1 = 1/\sqrt{T_1 T_2}$, tenemos que

$$\angle G_c(j\omega_1) = \tan^{-1}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - \tan^{-1}\frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - \tan^{-1}\beta\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

Dado que

$$\tan\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\right) = \frac{\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}}{1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}} = \infty$$

0 bien

$$\tan^{-1}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 90°$$

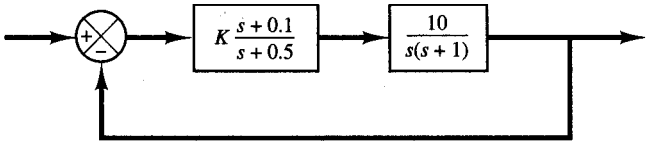


Figura 9–31
Sistema de control.

y también

$$\tan^{-1}\frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \tan^{-1}\beta\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 90°$$

tenemos que

$$\angle G_c(j\omega_1) = 0°$$

Por tanto, el ángulo de $G_c(j\omega_1)$ se vuelve 0° en $\omega = \omega_1 = 1/\sqrt{T_1T_2}$.

A.9.3. Considere el sistema de control de la figura 9-31. Determine el valor de la ganancia K tal que el margen de fase sea 60".

Solución. La función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = K\frac{s + 0.1}{s + 0.5}\frac{10}{s(s + 1)}$$

$$= \frac{K(10s + 1)}{s^3 + 1.5s^2 + 0.5s}$$

Grafiquemos las trazas de Bode de G(s) cuando K = 1, mediante el programa MATLAB 9-3. La figura 9-32 muestra las trazas de Bode producidas con este programa. En estas trazas el margen de fase requerido de 60" ocurre en la frecuencia ω = 1.15 rad/seg. En esta frecuencia la magnitud de $G(j\omega)$ es de 14.5 dB. En este caso, la ganancia K debe satisfacer la ecuación siguiente:

$$20 \log K = -14.5 \text{ dB}$$

Programa MATLAB 9–3

```
num = [0  0  10  1];
den = [1  1.5  0.5  0];
bode(num,den)
subplot(2,1,1);
title('Trazas de Bode de G(s) = (10s + 1)/[s(s + 0.5)(s + 1)]')
```

o bien

$$K = 0.188$$

Por tanto, hemos determinado el valor de la ganancia K.

Para verificar los resultados, dibujemos una traza de Nyquist de G para el rango de frecuencias

```
w= 0.1:0.01:1.15
```

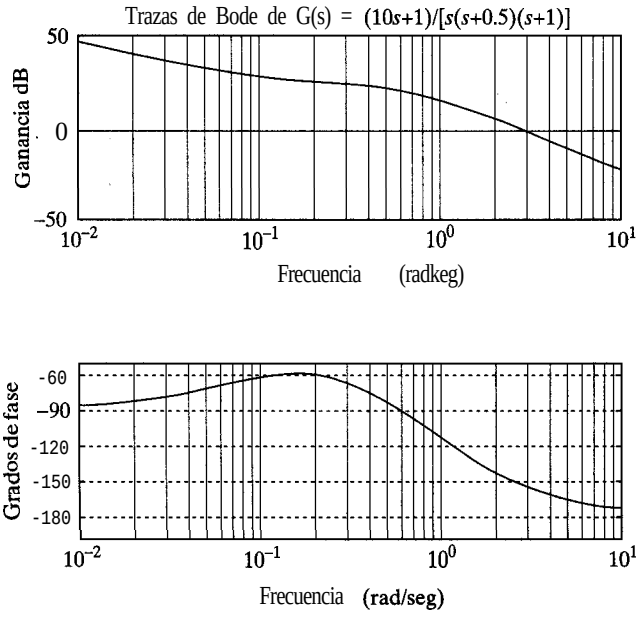


Figura 9-32

Trazas de Bode de $G(s) = \dfrac{10s + 1}{s(s + 0.5)(s + 1)}$.

El punto final del lugar geométrico (ω = 1.15 **rad/seg**) estará sobre un círculo unitario en el plano de Nyquist. Para verificar el margen de fase, es conveniente dibujar la traza de Nyquist sobre un diagrama polar, usando retículas polares.

Para dibujar una traza de Nyquist sobre un diagrama polar, primero defina un vector complejo z mediante

$$z = re + i*im = re^{i\theta}$$

en donde r y θ (theta) están dadas por

$$r = abs(z)$$
$$theta = angle(z)$$

abs significa la raíz cuadrada de la suma de la parte real al cuadrado y la parte imaginaria al cuadrado, angle significa tan-r (parte **imaginaria/parte** real).

Si usamos el comando

```
polar(theta,r)
```

MATLAB producirá una gráfica en las coordenadas polares. El uso subsecuente del comando grid (retícula) dibujará las líneas de la retícula polar y círculos.

El programa MATLAB 9-4 produce la traza de Nyquist de $G(j\omega)$, en donde w está entre 0.5 y 1.15 **rad/seg.** La traza resultante aparece en la figura 9-33. Observe que el punto G(j1.15) se encuentra sobre el círculo unitario y que el ángulo de fase de este punto es de -120". Por tanto, el margen de fase es de 60". El hecho de que el punto G(j1.15) esté sobre el círculo unitario com-

Program MATLAB 9–4

```
%*****Traza de Nyquist en coordenadas polares*****

num = [0   0   1.88   0.188];
den = [1   1.5   0.5   0];
w = 0.5:0.01:1.15;
[re,im,w] = nyquist(num,den,w);

%*****Convierta las coordenadas rectangulares en coordenadas polares
% definiendo z, r, theta del modo siguiente*****

z = re + i*im;
r = abs(z);
theta = angle(z);

%*****Para dibujar una traza polar, introduzca el comando 'polar(theta,r)'*****

polar(theta,r)
title('Verificación del margen de fase')
text(0.1,-1.5,'Traza de Nyquist')
text(-2.25,-0.3,'El margen de')
text(-2.25,-0.7,'fase es de 60°.')
```

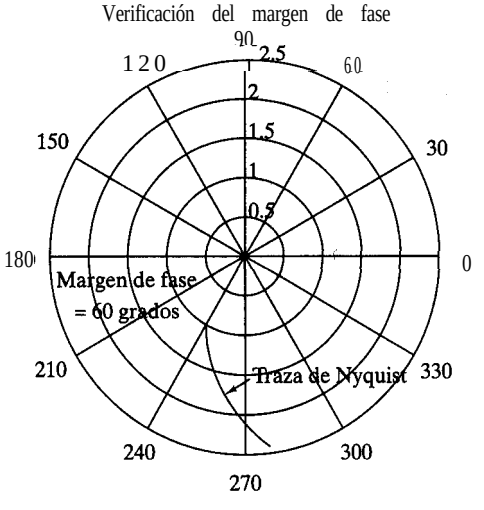


Figura 9-33
Traza de Nyquist de $G(j\omega)$ que muestra que el margen de fase es de 60°.

prueba que, en $\omega = 1.15$ radlseg, la magnitud es igual a 1 o 0 dB. (Por tanto, $\omega = 1.15$ es la frecuencia de cruce de ganancia.) Así, $K = 0.188$ proporciona el margen de fase deseado de 60".

Observe que, al escribir 'text' sobre el diagrama polar,introducimos el comando text del modo siguiente:

```
text(x,y,' ')
```

Por ejemplo, para escribir 'Traza de Nyquist' empezando en el punto $(0.1, -1.5)$, introduzca el comando

```
text(0.1, -1 .5,'Nyquist plot')
```

El texto aparece en la pantalla en forma horizontal,

A-9-4. Si la función de transferencia en lazo abierto G(s) contiene polos complejos conjugados ligeramente amortiguados, más de un lugar geométrico M es tangente al lugar geométrico $G(j\omega)$.

Considere el sistema con realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{9}{s(s + 0.5)(s^2 + 0.6s + 10)} \tag{9–6}$$

Dibuje las trazas de Bode para esta función de transferencia en lazo abierto, así como la traza de la magnitud logarítmica contra la fase, y muestre que dos lugares geométricos M son tangentes al lugar geométrico $G(j\omega)$. Por último, grafique las trazas de Bode para la función de transferencia en lazo cerrado.

Solución. La figura 9-34 muestra las trazas de Bode de $G(j\omega)$. La figura 9-35 exhibe la traza de la magnitud logarítmica contra la fase de $G(j\omega)$. Se observa que el lugar geométrico $G(j\omega)$ es tangente al lugar geométrico $M = 8$ dB en $\omega = 0.97$ radlseg, y que es tangente al lugar geométrico $M = -4$ dB en $\omega = 2.8$ radlseg.

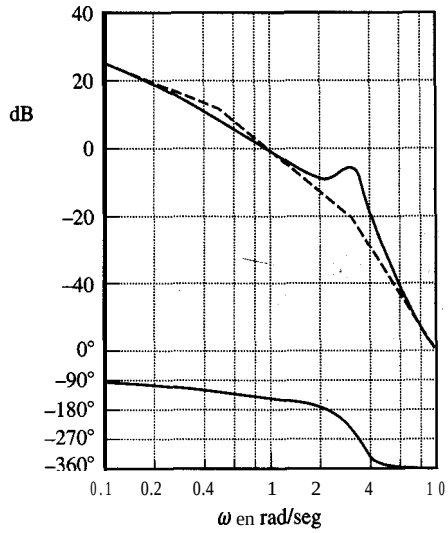


Figura 9-34
Trazas de Bode de $G(j\omega)$ obtenida mediante la ecuación (9-6).

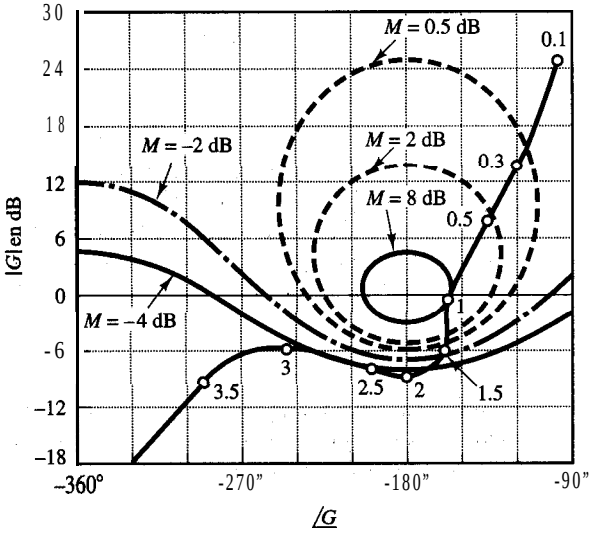


Figura **9–35**
Traza de la magnitud logarítmica contra la fase de $G(j\omega)$ obtenida mediante la ecuación (9-6).

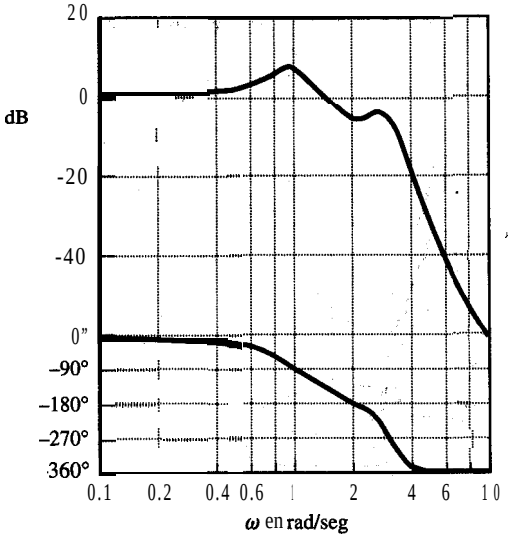


Figura 9–36
Trazas de Bode de $G(j\omega)/[1 + G(j\omega)]$, en donde $G(j\omega)$ se obtiene mediante la ecuación (9-6).

La figura 9-36 contiene las trazas de **Bode** de la función de transferencia en lazo cerrado. La curva de magnitud de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado muestra dos picos de resonancia. Observe que esto ocurre cuando la función de transferencia en lazo cerrado contiene el producto de dos términos de segundo orden ligeramente amortiguados y las dos frecuencias de resonancia correspondientes están suficientemente separadas una de otra. De hecho, la función de transferencia en lazo cerrado de este sistema se escribe

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

$$= \frac{9}{(s^2 + 0.487s + 1)(s^2 + 0.613s + 9)}$$

Es evidente que la función de transferencia en lazo cerrado es un producto de dos términos de segundo orden ligeramente amortiguados (los factores de amortiguamiento relativo son 0.243 y 0.102) y que las dos frecuencias de resonancia están suficientemente separadas.

A-9-5. Considere el sistema con realimentación unitaria cuya función de transferencia de la trayectoria directa se obtiene mediante

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

Se quiere insertar un compensador en serie a fin de que la curva de respuesta en frecuencia en lazo abierto sea tangente al círculo $M = 3$ dB en $\omega = 3$ radlseg. El sistema está sujeto a ruido de alta frecuencia y se desea obtener un corte agudo. Diseñe un compensador en serie adecuado.

Solución. Para estabilizar el sistema, se inserta un compensador de tipo proporcional-derivativo o un compensador de adelanto. Dado que se requiere de un corte agudo, optamos por un compensador de adelanto. Considere el compensador de adelanto siguiente:

$$G_c(s) = K_c \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \quad (\alpha < 1)$$

La curva de respuesta en frecuencia en lazo abierto debe ser tangente al lugar geométrico de $M = 3$ dB. A fin de minimizar la ganancia K_c adicional, seleccionamos el punto tangente al lugar geométrico de 3 dB, como se observa en la figura 9-37. En esta figura apreciamos que el compensador de adelanto debe aportar alrededor de 45". Así, el valor necesario de α se determina a partir de

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

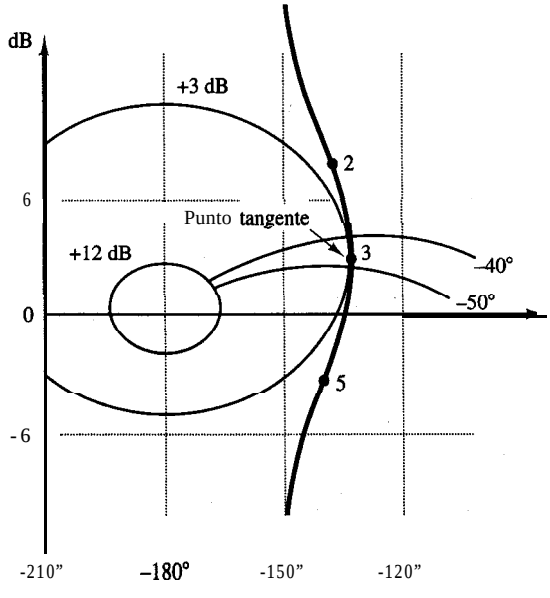


Figura 9–37
Carta de Nichols que muestra que el lugar geométrico de $G_c(j\omega)G(j\omega)$ es tangente al lugar geométrico de $M = 3$ dB en $\omega = 3$ radlseg.

o $\alpha = 0.172 \doteq \frac{1}{6}$. Optemos por $a = \frac{1}{6}$. Dado que se requiere que la curva de respuesta en frecuencia en lazo abierto $G_c(j\omega)G(j\omega)$ sea tangente al lugar geométrico de $M = 3$ dB en $\omega = 3$ rad/seg, obtenemos

$$20 \log |G_c(j\omega)G(j\omega)|_{\omega=3} = 20 \log |G_c(j3)| + 20 \log |G(j3)|$$
$$= 20 \log |G_c(j3)| + 20 \log \left|\frac{1}{9}\right| = 3 \text{ dB}$$

o bien

$$20 \log |G_c(j3)| = 22.085 \text{ dB}$$

Las dos constantes de tiempo T y αT del compensador de adelanto se determinan del modo siguiente. Considerando que

$$\sqrt{\frac{1}{T} \cdot \frac{1}{\alpha T}} = 3$$

tenemos que

$$\frac{1}{T} = \frac{3}{\sqrt{6}} = 1.225, \qquad \frac{1}{\alpha T} = 3\sqrt{6} = 7.348$$

A partir de las trazas de Bode de la figura 9-38, encontramos que la ganancia K_c es 14.3 dB o 5.19. Entonces, el compensador diseñado se obtiene mediante

$$G_c(s) = 5.19 \frac{0.816s + 1}{0.136s + 1}$$

A-9-6. Considere el sistema de la figura 9-39. Diseñe un compensador de adelanto tal que el sistema en lazo cerrado tenga el margen de fase de 50° y el margen de ganancia no sea menor que 10 dB. Supongaque

$$G_c(s) = K_c\alpha\left(\frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}\right) \qquad (0 < a < 1)$$

Se desea que el ancho de banda del sistema en lazo cerrado sea 1 ~ 2 radlseg. ¿Cuáles son los valores de M_r y ω_r del sistema compensado?

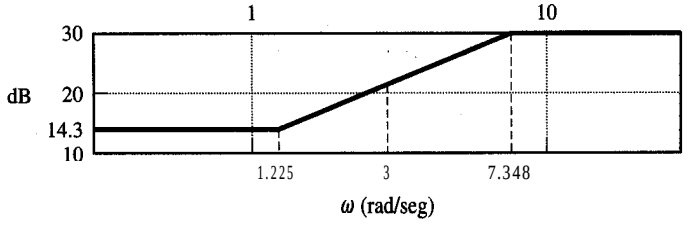


Figura 9-38
Trazas de Bode del compensador de adelanto diseñado en el problema A-9-5.

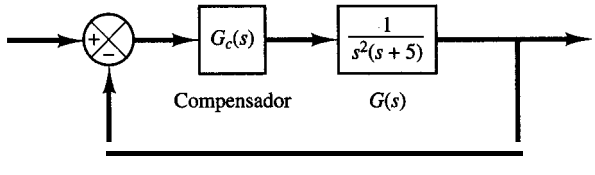


Figura 9-39
Sistema en lazo cerrado.

Solución. Observe que

$$G_c(j\omega)G(j\omega) = K_c\alpha\left(\frac{Tj\omega + 1}{\alpha Tj\omega + 1}\right)\frac{0.2}{(j\omega)^2(0.2j\omega + 1)}$$

Dado que el ancho de banda del sistema en lazo cerrado está cerca de la frecuencia de cruce de ganancia, seleccionamos esta última como 1 radlseg. En $\omega = 1$, el ángulo de fase de $G(j\omega)$ es de 191.31". Por tanto,la red de adelanto necesita aportar 50° + 11.31" = 61.31" en $\omega = 1$. Así, a se determina a partir de

$$\text{sen } \phi_m = \text{sen } 61.31" = \frac{1 - a}{1 + a} = 0.8772$$

del modo siguiente:

$$a = 0.06541$$

Considerando que el ángulo de adelanto de fase máximo ϕ_m ocurre en la media geométrica de las dos frecuencias de esquina, tenemos que

$$\omega_m = \sqrt{\frac{1}{T}\frac{1}{\alpha T}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T} = \frac{1}{\sqrt{0.06541}T} = \frac{3.910}{T} = 1$$

Por tanto,

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{3.910} = 0.2558$$

Y

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{0.2558}{0.06541} = 3.910$$

Entonces,

$$G_c(j\omega)G(j\omega) = 0.06541K_c\frac{3.910j\omega + 1}{0.2558j\omega + 1}\frac{0.2}{(j\omega)^2(0.2j\omega + 1)}$$

o bien

$$\frac{G_c(j\omega)G(j\omega)}{0.06541K_c} = \frac{3.910j\omega + 1}{0.2558j\omega + 1}\frac{0.2}{(j\omega)^2(0.2j\omega + 1)}$$

La figura 9-40 contiene las trazas de Bode para $G_c(j\omega)G(j\omega)/(0.06541\ K_c)$. Mediante cálculos simples (o a partir de las trazas de Bode) encontramos que la curva de magnitud debe elevarse 2.306 dB para que la magnitud sea igual a 0 dB en $\omega = 1$ rad/seg. En este caso, establecemos

$$20 \log 0.06541\ K_c = 2.306$$

o bien

$$0.06541\ K_c = 1.3041$$

lo cual produce

$$K_c = 19.94$$

Las curvas de magnitud y de fase del sistema compensado muestran que el sistema tiene un margen de fase de 50" y un margen de ganancia de 16 dB. Por tanto, se satisfacen las especificaciones de diseño.

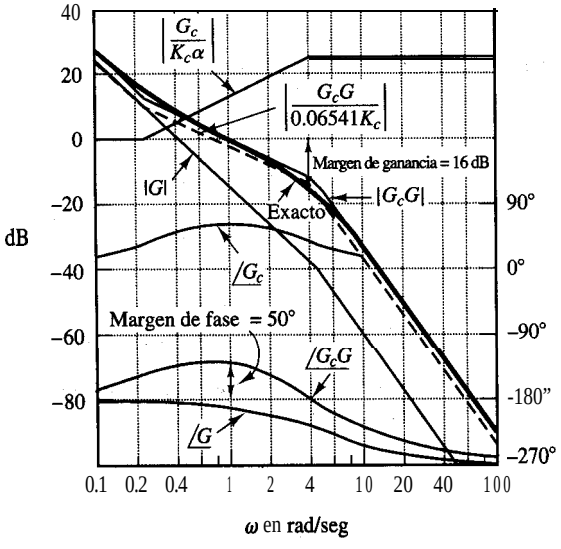


Figura 9–40
Trazas de Bode del sistema de la figura 9-39.

La figura 9-41 muestra el lugar geométrico de $G_c(j\omega)G(j\omega)$ sobrepuesto a la carta de Nichols. A partir de este diagrama, encontramos que el ancho de banda es aproximadamente 1.9 radlseg. Los valores de M_r y ω_r se leen del modo siguiente:

$$M_r = 2.13\ \text{dB}, \qquad \omega_r = 0.58\ \text{rad/seg}$$

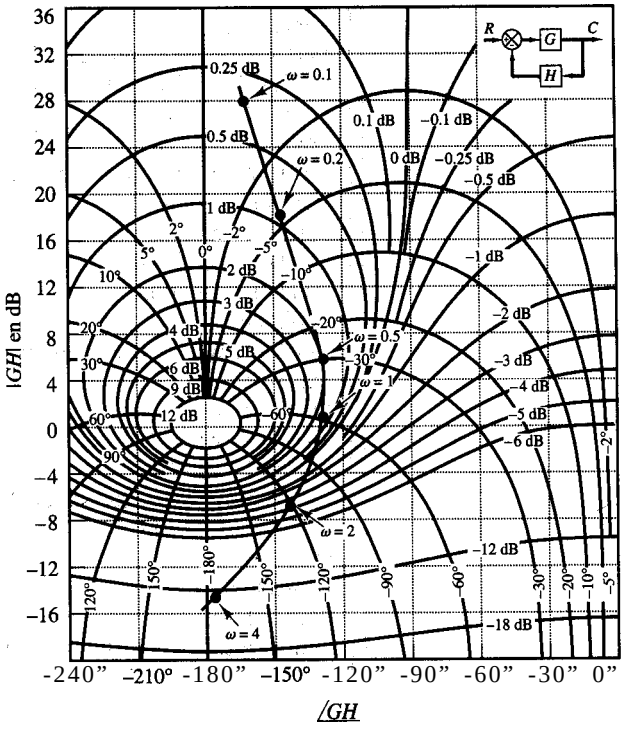


Figura 9-41
Lugar geométrico de $G_c(j\omega)G(j\omega)$ sobrepuesto a una carta de Nichols (problema A-9-6).

A-9-7. Remitiéndonos al ejemplo 9-1, dibuje las trazas de Nyquist de $G(j\omega)$, $G_1(j\omega)$ y $G_c(j\omega)G(j\omega)$ con MATLAB. (Compare las trazas de Nyquist obtenidas aquí con la figura 9-10.) Escriba un programa MATLAB posible para dibujar las trazas de Nyquist en un diagrama. Considere que $G(j\omega)$, $G_1(j\omega)$ y $G_c(j\omega)G(j\omega)$ se obtienen mediante

$$G(j\omega) = \frac{4}{j\omega(j\omega + 2)}$$

$$G_1(j\omega) = \frac{40}{j\omega(j\omega + 2)}$$

$$G_c(j\omega)G(j\omega) = 41.7\,\frac{j\omega + 4.41}{j\omega + 18.4}\,\frac{4}{j\omega(j\omega + 2)}$$

Solución. El programa MATLAB 9-5 es una solución posible para este problema. Las trazas de Nyquist resultantes aparecen en la figura 9-42.

Programa MATLAB 9-5

```
%*****Trazas de Nyquist en coordenadas
% polares*****

num1 = [0   0   4];
den1 = [1   2   0];
num2 = [0   0   40];
den2 = [1   2   0];
num3 = [0   0   166.8   735.588];
den3 = [1   20.4   36.8   0];
w = 0.2:0.1:10;
ww = 1.5:0.1:10;
[re1,im1,w] = nyquist(num1,den1,w);
z1 = re1 + i*im1;
r1 = abs(z1);
theta1 = angle(z1);
polar(theta1,r1,'o')
hold on
[re2,im2,ww] = nyquist(num2,den2,ww);
z2 = re2 + i*im2;
r2 = abs(z2);
theta2 = angle(z2);
polar(theta2,r2,'o')
[re3,im3,ww] = nyquist(num3,den3,ww);
z3 = re3 + i*im3;
r3 = abs(z3);
theta3 = angle(z3);
polar(theta3,r3,'x')
title('Trazas de Nyquist de G(jw), G1(jw), y Gc(jw)G(jw)')
text(0.7,-8.8,'G(jw)')
text(-11.7,-8.7,'G1(jw)')
text(-6.6,-12.3,'Gc(jw)G(jw)')
```

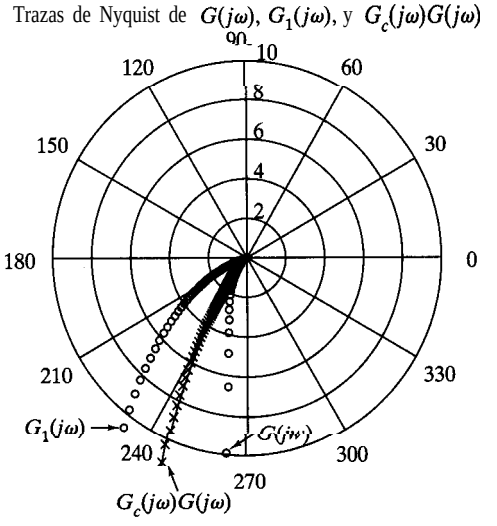


Figura 9–42
Trazas de Nyquist de $G(j\omega)$, $G_1(j\omega)$, y $G_c(j\omega)G(j\omega)$.

A-9-8. Considere el sistema de la figura 9–43(a). Diseñe un compensador tal que el sistema en lazo cerrado satisfaga los requerimientos siguientes:

Constante de error estático de velocidad = 20 seg^{-1}

Margen de fase = 50°

Margen de ganancia $\geqq$ 10 dB

Solución. Para satisfacer los requerimientos, probaremos un compensador de adelanto $G_c(s)$ de la forma

$$G_c(s) = K_c\alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}$$

$$= K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

(Si éste no funciona, usaremos un compensador con una forma diferente.) El sistema compensado aparece en la figura 9–43(b).

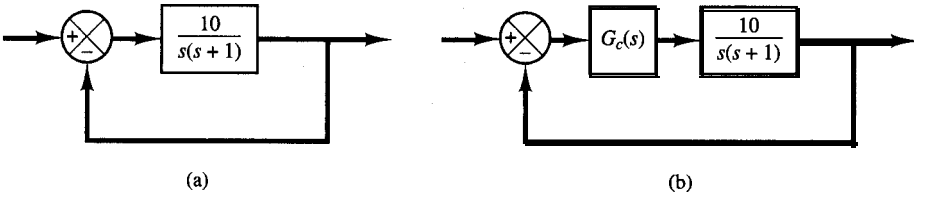


Figura **9–43**
(a) Sistema de control; (b) sistema compensado.

Definamos

$$G_1(s) = KG(s) = \frac{10K}{s(s + 1)}$$

en donde $K = K_c\alpha$.

El primer paso en el diseño es ajustar la ganancia K para que se cumpla la especificación de desempeño en estado estable o para aportar la constante de error estático de velocidad requerida. Dado que la constante de error estático de velocidad K_v está dada como 20 seg^{-1}, tenemos que

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} G_1(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{s10K}{s(s + 1)} = 10K = 20$$

$$= 10K = 20$$

o bien

$$K = 2$$

Con K = 2, el sistema compensado cumplirá el requerimiento en estado estable.

A continuación graficaremos las trazas de Bode de

$$G_1(s) = \frac{20}{s(s + 1)}$$

El programa MATLAB 9-6 produce las trazas de Bode de la figura 9-44. A partir de estas trazas, se encuentra que el margen de fase es de 14°. El margen de ganancia es $+\infty$ dB.

Programa MATLAB 9–6

```
num = [0   0   20];
den = [1   1   0];
w = logspace(-1,2,100);
bode(num,den,w)
subplot(2,1,1);
title('Trazas de Bode de G1(s) = 20/[s(s + 1)]')
```

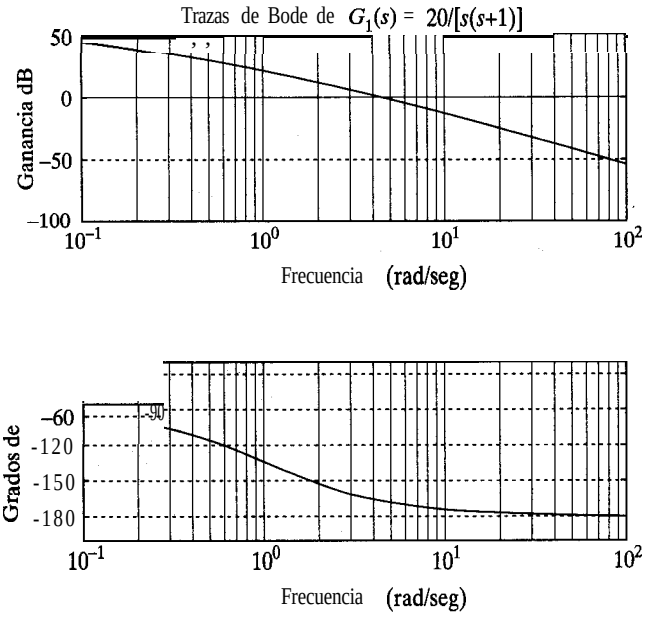


Figura 9-44
Trazas de Bode de $G_1(s)$.

Dado que la especificación solicita un margen de fase de 50°, el adelanto de fase adicional necesario para satisfacer el requerimiento de margen de fase es de 36". Un compensador de adelanto contribuye a este monto.

Considerando que la adición de un compensador de adelanto modifica la curva de magnitud de las trazas de Bode, comprendemos que la frecuencia de cruce de ganancia se moverá a la derecha. Debemos compensar el atraso de fase incrementado de $G_1(j\omega)$ producido por este incremento en la frecuencia de cruce de ganancia. Tomando en consideración la frecuencia de cruce de ganancia, suponemos que ϕ_m, adelanto de fase máximo requerido, es de aproximadamente 41". (Esto significa que se han añadido aproximadamente 5" para compensar el cambio en la frecuencia de cruce de ganancia.) Dado que

$$\operatorname{sen} \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

ϕ_m = 41" corresponde a a = 0.2077. Observe que a = 0.21 corresponde a ϕ_m = 40.76". No representa gran diferencia en la solución final si seleccionamos ϕ_m = 41" o ϕ_m = 40.76". Por tanto, optemos por a = 0.21.

Una vez determinado el factor de atenuación a con base en el ángulo de adelanto de fase requerido, el paso siguiente es determinar las frecuencias de esquina $\omega = 1/T$ y $\omega = 1/(\alpha T)$ del compensador de adelanto. Observe que el ángulo de adelanto de fase máximo ϕ_m ocurre en la media geométrica de las dos frecuencias de esquina, o $\omega = 1/(\sqrt{\alpha}T)$.

El monto de la modificación de la curva de magnitud en $\omega = 1/(\sqrt{\alpha}T)$ producida por la inclusión del término $(Ts + 1)/(\alpha Ts + 1)$ es

$$\left|\frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega\alpha T}\right|_{\omega=\frac{1}{\sqrt{\alpha}T}} = \left|\frac{1 + j\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}{1 + j\alpha\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Observe que

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{0.21}} = 6.7778 \text{ dB}$$

Necesitamos encontrar el punto de frecuencia tal que, al añadir el compensador de adelanto, la magnitud total se vuelva 0 **dB.**

En la figura 9-44 observamos que el punto de frecuencia para el cual la magnitud de $G_1(j\omega)$ es -6.7778 **dB** ocurre entre ω = 1 y ω = 10 radlseg. Por tanto, **graficamos** unas nuevas trazas de Bode de $G_1(j\omega)$ en el rango de frecuencias entre $\omega = 1$ y $\omega = 10$ para ubicar el punto exacto en el que $G_1(j\omega)$ = -6.7778 **dB.** El programa MATLAB 9-7 produce las trazas de Bode de este rango

Programa MATLAB 9–7

```
num = [0  0  20];
den = [1  1  0];
w = logspace(0,1,100);
bode(num,den,w)
subplot(2,1,1);
title('Trazas de Bode de G1(s) = 20/[s(s + 1)]')
```

de frecuencias, que se observa en la figura **9–45.** A partir de estas trazas, encontramos que el punto de frecuencia en el que $|G_1(j\omega)|$ = -6.7778 **dB** ocurre en ω = 6.5 **rad/seg.** Seleccionamos ésta como la nueva frecuencia de cruce de ganancia, o ω_c = 6.5 radlseg. Considerando que esta frecuencia corresponde a $1/(\sqrt{\alpha}T)$, o

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$$

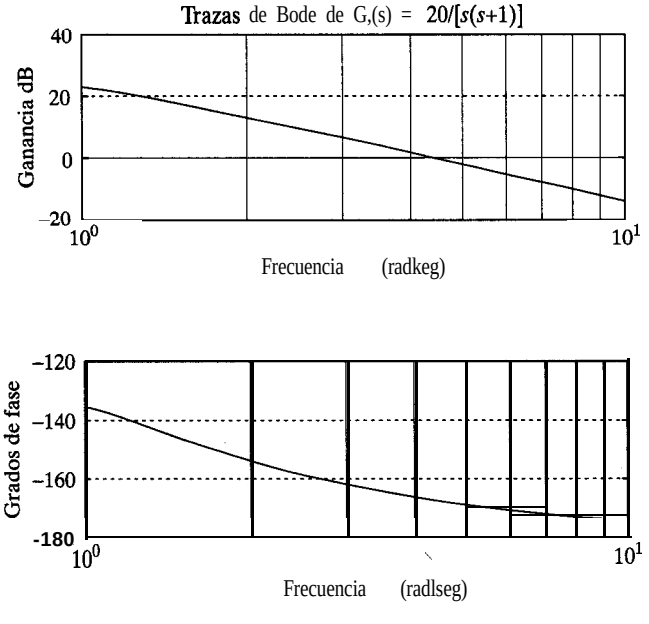


Figura 9–45
Trazas de Bode de $G_1(s)$.

obtenemos

$$\frac{1}{T} = \omega_c\sqrt{\alpha} = 6.5\sqrt{0.21} = 2.9787$$

y

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\alpha}} = \frac{6.5}{\sqrt{0.21}} = 14.1842$$

El compensador de adelanto determinado así es

$$G_c(s) = K_c\frac{s + 2.9787}{s + 14.1842} = K_c\alpha\frac{0.3357s + 1}{0.07050s + 1}$$

en donde K_c se especifica como

$$K_c = \frac{K}{\alpha} = \frac{2}{0.21} = 9.5238$$

Por tanto, la función de transferencia del compensador se vuelve

$$G_c(s) = 9.5238\frac{s + 2.9787}{s + 14.1842} = 2\frac{0.3357s + 1}{0.07050s + 1}$$

El programa MATLAB 9-8 produce las trazas de Bode de este compensador de adelanto, que se observa en la figura 9-46.

Programa MATLAB 9–8

```
numc = [9.5238  28.3685];
denc = [1  14.1842];
w = logspace(-1,3,100);
bode(numc,denc,w)
subplot(2,1,1);
title('Trazas de Bode de Gc(s) = 9.5238(s + 2.9787)/(s + 14.1842)')
```

La función de transferencia en lazo abierto del sistema diseñado es

$$G_c(s)G(s) = 9.5238\frac{s + 2.9787}{s + 14.1842}\frac{10}{s(s + 1)}$$

$$= \frac{95.238s + 283.6854}{s^3 + 15.1842s^2 + 14.1842s}$$

El programa MATLAB 9-9 producirá las trazas de Bode de $G_c(s)G(s)$, mismas que se observan en la figura 9-47.

En la figura 9–47 se aprecia claramente que el margen de fase es de alrededor de 50" y que el margen de ganancia es de $+\infty$ dB. Dado que la constante de error estático de velocidad K_v es de 20 seg^{-1}, se cumplen todas las especificaciones. Antes de concluir este problema, necesitamos verificar las características de la respuesta transitoria.

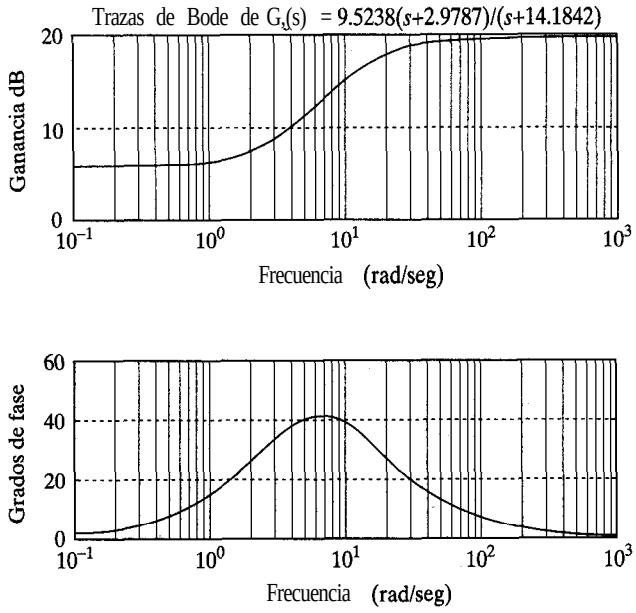


Figura 9–46
Trazas de Bode de $G_c(s)$.

Respuesta escalón unitario: compararemos la respuesta escalón unitario del sistema compensado y la del sistema no compensado original.

Programa MATLAB 9–9

```
num = [0  0  95.238  283.6854];
den = [1  15.1842  14.1842  0];
w = logspace(-1,3,100);
bode(num,den,w)
subplot(2,1,1);
title('Trazas de Bode de Gc(s)G(s)')
```

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema no compensado original es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^2 + s + 10}$$

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema compensado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{95.238s + 283.6854}{s^3 + 15.1842s^2 + 109.4222s + 283.6854}$$

El programa MATLAB 9-10 produce las respuestas escalón unitario de los sistemas no compensado y compensado. Las curvas de respuesta resultantes aparecen en la figura 9-48. Es evidente que el sistema compensado exhibe una respuesta satisfactoria. Observe que el cero y los **polos** en lazo cerrado se ubican del modo siguiente:

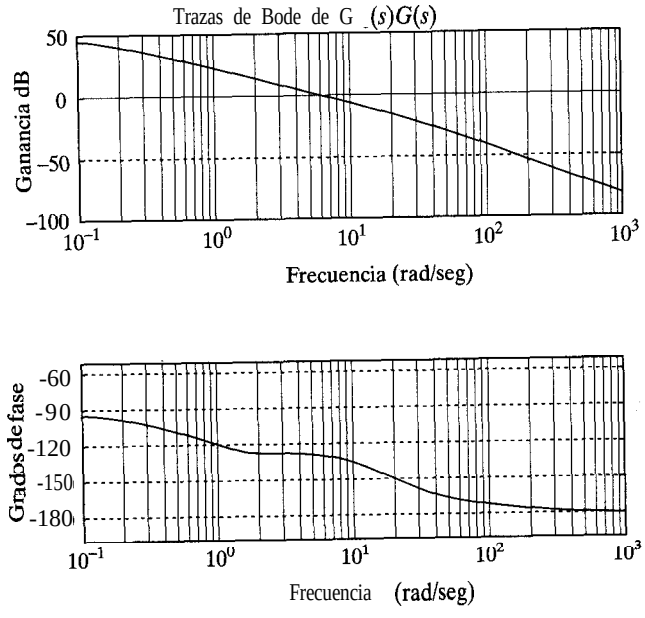


Figura 9–47
Trazas de Bode de $G_c(s)G(s)$.

Programa MATLAB 9–10

```
%*****Respuesta escalón unitario*****
num1 = [0  0  10];
den1 = [1  1  10];
num2 = [0  0  95.238  283.6854];
den2 = [1  15.1842  109.4222  283.6854];
t = 0:0.01:6;
[c1,x1,t] = step(num1,den1,t);
[c2,x2,t] = step(num2,den2,t);
plot(t,c1,'-',t,c2,'--')
grid
title('Respuestas escalón unitario de los sistemas compensado y no compensado')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salidas')
text(1.1,0.5,'Sistema compensado')
text(1.7,1.46,'Sistema no compensado')
```

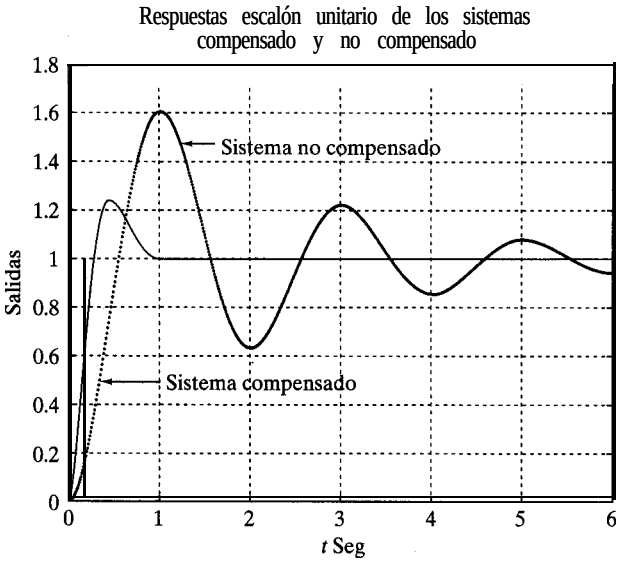


Figura 9–48
Respuestas escalón unitario de los sistemas compensado y no compensado.

Cero en $s = -2.9787$

Polos en $s = -5.2270 \pm j5.7141$, $s = -4.7303$

Respuesta rampa unitaria: vale la pena verificar la respuesta rampa unitaria del sistema compensado. Dado que $K_v = 20\ \text{seg}^{-1}$, el error en estado estable después de la entrada rampa unitaria será de $1/K_v = 0.05$. La constante de error estático de velocidad del sistema no compensado es $10\ \text{seg}^{-1}$. Por tanto, el sistema no compensado original tendrá un error en estado estable dos veces mayor después de la entrada rampa unitaria.

El programa MATLAB 9-11 produce las curvas de respuesta rampa unitaria. [Observe que la respuesta rampa unitaria se obtiene como la respuesta escalón unitario de $C(s)/sR(s)$.] Las curvas resultantes aparecen en la figura 9-49. El sistema compensado tiene un error en estado estable igual a un medio del sistema no compensado original.

A-9-9. Considere el sistema con realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

Diseñe un compensador $G_c(s)$ tal que la constante de error estático de velocidad sea de $10\ \text{seg}^{-1}$, el margen de fase sea de 50° y el margen de ganancia sea de 10 dB o más.

Solución. Diseñaremos un compensador de atraso-adelanto en la forma

$$G_c(s) = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)}$$

Programa MATLAB 9–11

```
%*****Respuestas rampa unitaria*****

num1 = [0   0   0   10];
den1 = [1   1   10   0];
num2 = [0   0   0   95.238   283.6854];
den2 = [1   15.1842   109.4222   283.6854   0];
t = 0:0.01:3;
[c1,x1,t] = step(num1,den1,t);
[c2,x2,t] = step(num2,den2,t);
plot(t,c1,'.',t,c2,'-',t,t,'- -')
grid
title('Respuestas rampa unitaria de los sistemas compensado y no compensado')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salidas')
text(0.07,1.3,'Sistema compensado')
text(1.2,0.65,'Sistema no compensado')
```

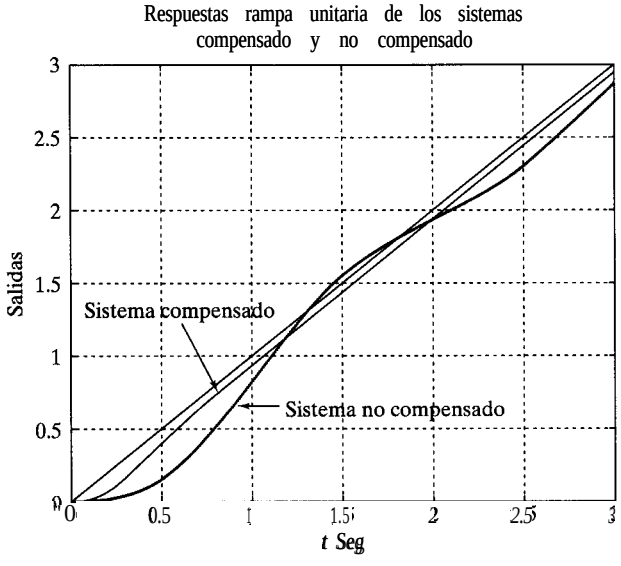


Figura 9-49
Respuestas rampa unitaria de los sistemas compensado y no compensado.

Por tanto, la función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado es $G_c(s)G(s)$. Dado que la ganancia K de la planta es ajustable, supongamos que $K_c = 1$. Entonces, $\lim_{s\to 0}$ G,(s) = 1. A partir del requerimiento de la constante de error estático de velocidad, obtenemos

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0} sG_c(s)\frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

$$= \frac{K}{4} = 10$$

Así,

$$K = 40$$

Primero graficaremos las trazas de Bode del sistema no compensado con $K = 40$. El programa MATLAB 9-12 se usa para graficar estas trazas de Bode. La traza obtenida aparece en la figura 9-50.

Programa MATLAB 9–12

```
num = [0  0  0  40];
den = [1  5  4  0];
w = logspace(-1,1,100);
bode(num,den,w)
subpole(2,1,1);
title('Trazas de Bode de G(s) = 40/[s(s + 1)(s + 4)]')
```

De la figura 9-50, vemos que el margen de fase del sistema no compensado es de $-16°$, lo cual indica que el sistema no compensado es inestable. El paso siguiente en el diseño de un compensador de atraso-adelanto es seleccionar una nueva frecuencia de cruce de ganancia. A partir de la curva del ángulo de fase para $G(j\omega)$, observamos que la frecuencia de cruce de fase es $\omega = 2$ radlseg. Seleccionamos la nueva frecuencia de cruce de ganancia como 2 rad/seg para que el ángulo de adelanto de fase requerido en $\omega = 2$ radlseg sea de alrededor de 50". Un único compensador de atraso-adelanto proporciona este monto del ángulo de adelanto de fase con mucha facilidad.

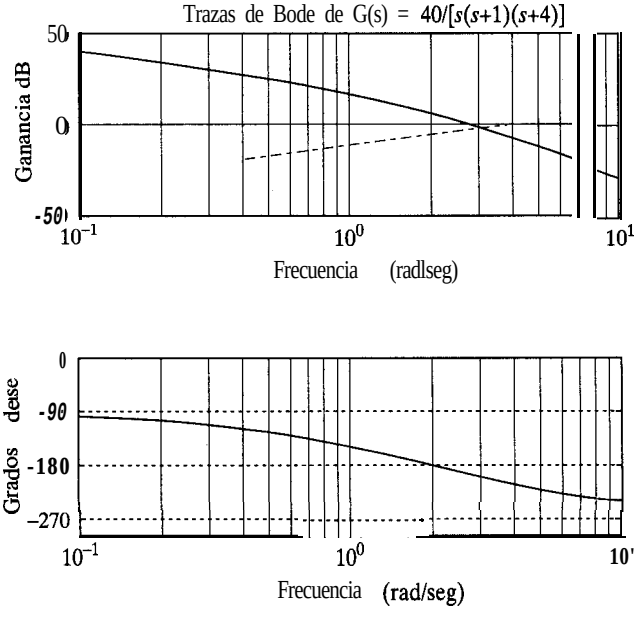


Figura 950
Trazas de Bode de G(s) = $40/[s(s+1)(s+4)]$.

Una vez seleccionada la frecuencia de cruce de ganancia como 2 rad/seg determinamos las frecuencias de esquina de la parte de atraso de fase del compensador de atraso-adelanto. Seleccionamos una frecuencia de esquina $\omega = 1/T_2$ (que corresponde al cero de la parte de atraso de fase del compensador) tal que esté una década abajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia, o en $\omega = 0.2$ rad/seg. Para otra frecuencia de esquina $\omega = 1/(\beta T_2)$, necesitamos el valor de β. Éste se determina a partir de la consideración de la parte de adelanto del compensador, como se muestra a continuación.

Para el compensador de adelanto, el ángulo de adelanto de fase máximo ϕ_m se obtiene mediante

$$\operatorname{sen} \phi_m = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}$$

Observe que $\beta = 10$ corresponde a $\phi_m = 54.9°$. Dado que necesitamos un margen de fase de 50°, elegimos $\beta = 10$. (Observe que usaremos varios grados menos que el ángulo máximo, 54.9°.) Por tanto,

$$\beta = 10$$

Entonces, la frecuencia de esquina $\omega = 1/(\beta T_2)$ (que corresponde al polo de la parte de atraso de fase del compensador) se convierte en

$$\omega = 0.02$$

La función de transferencia de la parte de atraso de fase del compensador de atraso-adelanto se vuelve

$$\frac{s + 0.2}{s + 0.02} = 10\left(\frac{5s + 1}{50s + 1}\right)$$

La parte de adelanto de fase se determina del modo siguiente: dado que la nueva frecuencia de cruce de ganancia es $\omega = 2$ rad/seg, de la figura 9-50, $|G(j2)|$ es 6 dB. Por tanto, si el compensador de atraso-adelanto contribuye -6 dB en $\omega = 1$ radlseg, la que se busca es la nueva frecuencia de cruce de ganancia. A partir de este requerimiento es posible dibujar una recta con pendiente de 20 dB/década que pase por el punto (-6 dB, 2 rad/seg). (Esta recta se dibujó manualmente en la figura 9-50.) Las intersecciones de esta recta con las rectas 0 dB y -20 dB determinan las frecuencias de esquina. A partir de esta consideración, las frecuencias de esquina para la parte de adelanto se obtienen como $\omega = 0.4$ rad/seg y $\omega = 4$ radlseg. Así, la función de transferencia de la parte de adelanto del compensador de atraso-adelanto se vuelve

$$\frac{s + 0.4}{s + 4} = \frac{1}{10}\left(\frac{2.5s + 1}{0.25s + 1}\right)$$

Combinando las funciones de transferencia de las partes de atraso y adelanto del compensador, obtenemos la función de transferencia G,(s) del compensador de atraso-adelanto. Dado que elegimos $K_c = 1$, tenemos que

$$G_c(s) = \frac{s + 0.4}{s + 4}\,\frac{s + 0.2}{s + 0.02} = \frac{(2.5s + 1)(5s + 1)}{(0.25s + 1)(50s + 1)}$$

Las trazas de Bode del compensador de atraso-adelanto G,(s) se obtienen introduciendo en la computadora el programa MATLAB 9-13. Las trazas resultantes aparecen en la figura 9-51.

Programa MATLAB 9-13

```
numc = [1  0.6  0.08];
denc = [1  4.02  0.08];
bode(numc,denc)
subplot(2,1,1);
title('Trazas de Bode del compensador de atraso-adelanto')
```

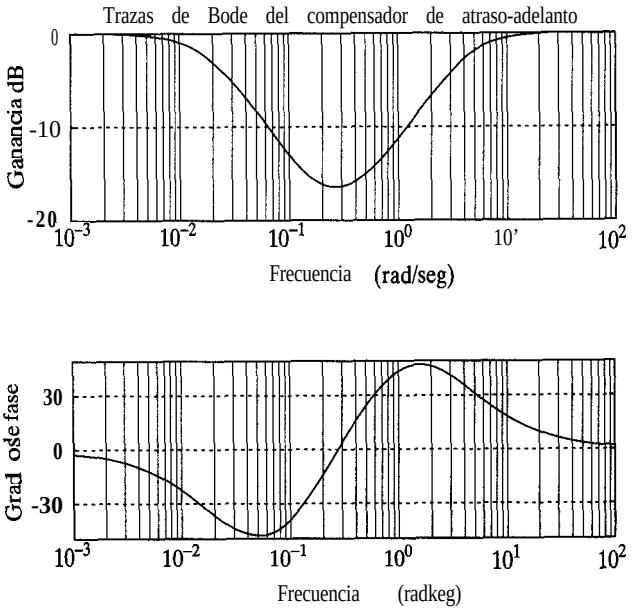


Figura 9-51
Trazas de Bode del compensador de atraso-adelanto diseñado.

La función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado es

$$G_c(s)G(s) = \frac{(s + 0.4)(s + 0.2)}{(s + 4)(s + 0.02)} \frac{40}{s(s + 1)(s + 4)}$$

$$= \frac{40s^2 + 24s + 3.2}{s^5 + 9.02s^4 + 24.18s^3 + 16.48s^2 + 0.32s}$$

Usando el programa MATLAB 9-14 se obtienen las curvas de magnitud y de ángulo de fase de la función de transferencia en lazo abierto $G_c(s)G(s)$ diseñada, como se observa en la figura 9-52. Observe que el polinomio del denominador den se obtuvo mediante el comando conv, del modo siguiente:

```
a = [1  4.02  0.081;
b = [1   5    4   0];
conv(a,b)

ans =

    1.0000   9.0200   24.1800   16.4800   0.320000   0
```

En la figura 9-52 vemos que la frecuencia de cruce de ganancia real cambió ligeramente de 2 radlseg a un valor inferior. Para encontrar la frecuencia de cruce de ganancia real se grafica las trazas de Bode de la región $1 \leq \omega \leq 10$. Dicha frecuencia se encuentra como $\omega = 1.86$ rad/seg. [Ese pequeño desfasamiento de la frecuencia de fase de cruce de ganancia a partir de la frecuencia de cruce de ganancia supuesta (2 radlseg en este caso) ocurre siempre en el método de diseño actual.]

```
Programa MATLAB 9-14

num1 = [0  0  0  40  24  3.2];
den1 = [1  9.02  24.18  16.48  0.32  0];
bode(num1,den1)
subplot(2,1,1);
title('Trazas de Bode de Gc(s)G(s)')
```

Dado que el margen de fase del sistema compensado es de 50°, el margen de ganancia es de 12.5 dB y la constante de error estático de velocidad es de 10 seg^{-1}, todos los requerimientos se cumplen.

La figura 9-53 muestra las trazas de Nyquist de $G(j\omega)$ (caso no compensado) y $G_c(j\omega)G(j\omega)$ (caso compensado). Se usó el programa MATLAB 9-15 para obtener la figura 9-53.

A continuación investigaremos las características de respuesta transitoria del sistema diseñado.

Respuesta escalón unitario: considerando que

$$G_c(s)G(s) = \frac{40(s + 0.4)(s + 0.2)}{(s + 4)(s + 0.02)s(s + 1)(s + 4)}$$

tenemos que

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$$

$$= \frac{40(s + 0.4)(s + 0.2)}{(s + 4)(s + 0.02)s(s + 1)(s + 4) + 40(s + 0.4)(s + 0.2)}$$

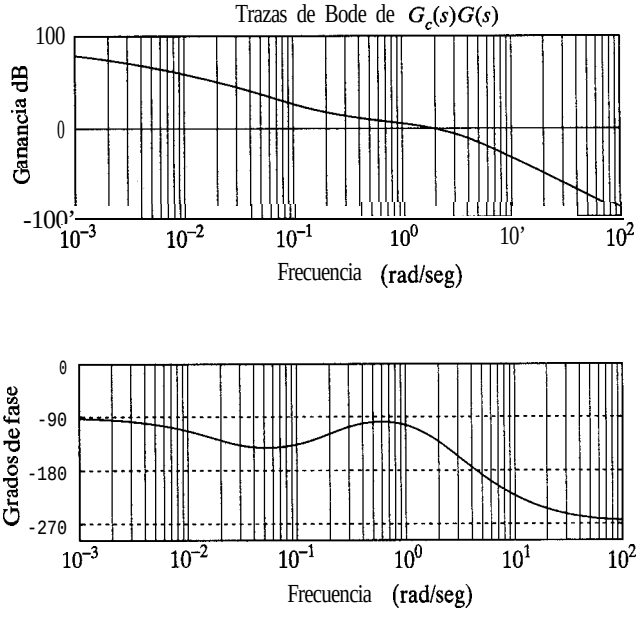


Figura 9–52
Trazas de Bode de la función de transferencia en lazo abierto $G_c(s)G(s)$ del sistema compensado.

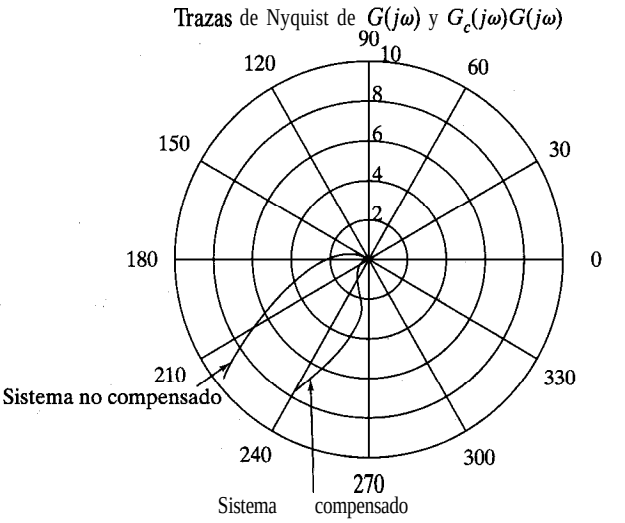


Figura 9-53
Trazas de Nyquist de $G(j\omega)$ y $G_c(j\omega)G(j\omega)$.

Programa MATLAB 9–15

```
%*****Trazas de Nyquist*****

num0 = [0   0   0   40];
den0 = [1   5   4   0];
num1 = [0   0   0   40   24   3.2];
den1 = [1   9.02   24.18   16.48   0.32   0];
w = 0.8:0.02:10;
ww = 0.2:0.02:10;
[re0,im0,w] = nyquist(num0,den0,w);
z0 = re0 + i*im0;
r0 = abs(z0);
theta0 = angle(z0);
polar(theta0,r0)
hold on
[re1,im1,ww] = nyquist(num1,den1,ww);
z1 = re1 + i*im1;
r1 = abs(z1);
theta1 = angle(z1);
polar(theta1,r1)
text(−8, −12.7,'Sistema compensado')
text(−18.8, −7,'Sistema no compensado')
title('Trazas de Nyquist de G(jw) y Gc(jw)G(jw)')
```

Para determinar el polinomio del denominador con MATLAB, procedemos del modo siguiente: definimos

$$a(s) = (s + 4)(s + 0.02) = s^2 + 4.02s + 0.08$$

$$b(s) = s(s + 1)(s + 4) = s^3 + 5s^2 + 4s$$

$$c(s) = 40(s + 0.4)(s + 0.2) = 40s^2 + 24s + 3.2$$

Entonces tenemos que

```
a = [1  4.02  0.081
b = [1   5    4    0]
c = [40  24  3.21
```

Usando el siguiente programa MATLAB, obtenemos el polinomio del denominador.

```
a = [1  4.02  0.081;
b = [1   5   4   0];
c = [40  24  3.21;
p = [conv(a,b)] + [0  0  0  c]
p =
    1.0000   9.0200  24.1800  56.4800  24.3200  3.2000
```

El programa MATLAB 9-16 se usa para obtener la respuesta escalón unitario del sistema compensado. La curva de la respuesta escalón unitario resultante aparece en la figura 9-54. (Observe que el sistema no compensado es inestable.)

Programa MATLAB 9-16

```
%*****Respuesta escalón unitario*****

num = [0  0  0  40  24  3.2];
den = [1  9.02  24.18  56.48  24.32  3.2];
t = 0:0.2:40;
step(num,den,t)
grid
title('Respuesta escalón unitario del sistema compensado')
```

Respuesta rampa unitaria: la respuesta rampa unitaria de este sistema se obtuvo introduciendo el programa MATLAB 9-17 en la computadora. Aquí convertimos la respuesta rampa unitaria de $G_cG/(1 + G_cG)$ en la respuesta escalón unitario de $G_cG/[s(1 + G_cG)]$. La curva de respuesta rampa unitaria obtenida mediante este programa aparece en la figura 9-55.

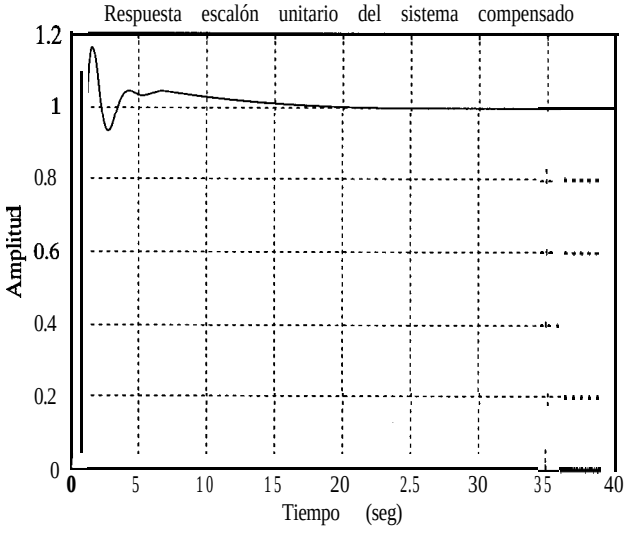


Figura 9-54
Curva de respuesta escalón unitario del sistema compensado.

Programa MATLAB 9–17

```
%*****Respuesta rampa unitaria*****

num = [0  0  0  0  40  24  3.2];
den = [1  9.02  24.18  56.48  24.32  3.2  0];
t = 0:0.05:20;
c = step(num,den,t);
plot(t,c,'-',t,t,'.')
grid
title('Respuesta rampa unitaria del sistema compensado')
xlabel('Tiempo (seg)')
ylabel('Amplitud')
```

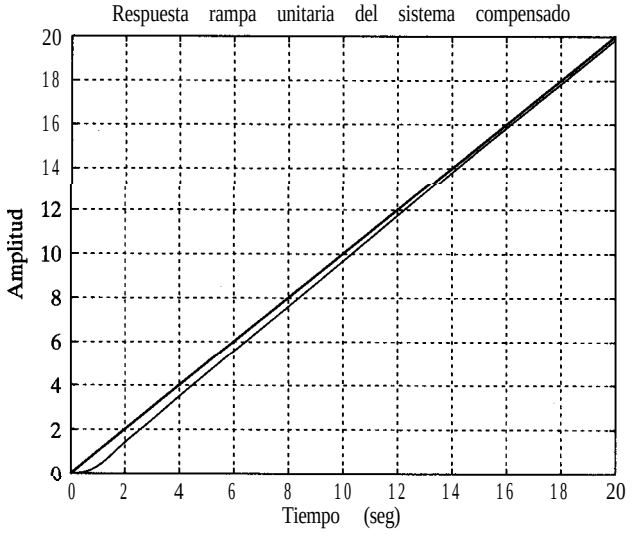


Figura 9-55
Respuesta rampa unitaria del sistema compensado.

B-9-1. Dibuje las trazas de Bode de la red de adelanto y de la red de atraso que aparecen en las figuras 9–56(a) y (b), respectivamente.

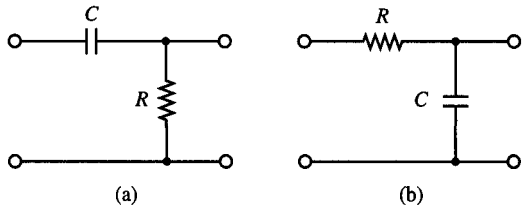


Figura 9-56 (a) Red de adelanto; (b) red de atraso

B-9-2. Dibuje las trazas de Bode del controlador PI obtenido mediante

$$G_c(s) = 5\left(1 + \frac{1}{2s}\right)$$

y del controlador PD obtenido mediante

$$G_c(s) = 5(1 + 0.5s)$$

B-9-3. Considere un controlador PID obtenido mediante

$$G_c(s) = 30.3215\,\frac{(s + 0.65)^2}{s}$$

Dibuje las trazas de Bode del mismo.

B-9-4. La figura 9-57 muestra un diagrama de bloques de un sistema de control de posición de un vehículo espacial. Determine la constante de ganancia proporcional K_p y el tiempo derivativo T_d tales que el ancho de banda del sistema en lazo cerrado sea de 0.4 a 0.5 rad/seg. (Observe que el ancho de banda en lazo cerrado está cerca de la frecuencia de cruce de ganancia.) El sistema debe tener un margen de fase adecuado. Grafique las curvas de respuesta en frecuencia en lazo abierto y en lazo cerrado sobre trazas de Bode.

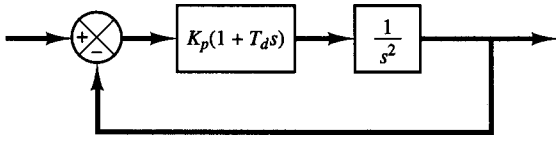


Figura 9-57 Diagrama de bloques de un sistema de control de posición de un vehículo espacial.

B-9-5. Remitiéndonos al sistema en lazo cerrado de la figura 9-58, diseñe un compensador de adelanto $G_c(s)$ tal que el margen de fase sea de 45°, el margen de ganancia no sea menor que 8 dB y la constante de error de velocidad K_v sea de 4.0 seg^{-1}. Grafique con MATLAB las curvas de respuesta escalón unitario y rampa unitaria del sistema compensado.

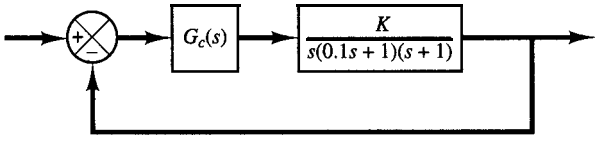


Figura 9-58 Sistema en lazo cerrado.

B-9-6. Considere el sistema de la figura 9-59. Diseñe un compensador tal que la constante de error estático de velocidad K_v sea de 50 seg^{-1}, el margen de fase sea de 50° y el margen de ganancia no sea menor que 8 dB. Grafique con MATLAB las curvas de respuesta escalón y rampa unitaria de los sistemas compensado y no compensado.

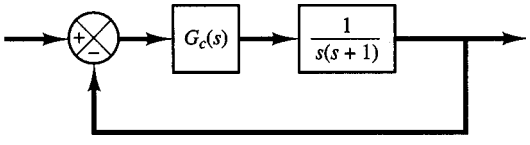


Figura 9-59 Sistema de control.

B-9-7. Considere el sistema de la figura 9-60. Diseñe un compensador tal que la constante de error estático de velocidad sea de 4 seg^{-1}, el margen de fase sea de 50° y el margen de ganancia sea de 10 dB o más. Grafique con MATLAB las curvas de respuesta escalón unitario y rampa unitaria del sistema compensado. Asimismo dibuje la traza de Nyquist del sistema compensado con MATLAB.

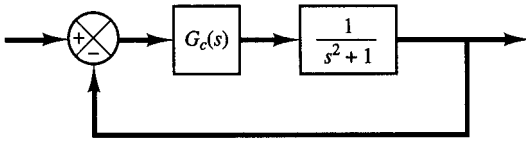


Figura 9–60 Sistema de control.

B-9-8. Considere el sistema de la figura 9-61. Se desea diseñar un compensador tal que la constante de error estático de ve-

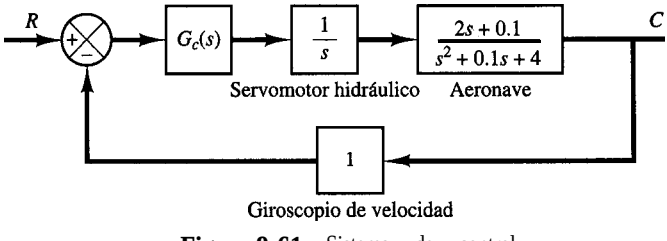


Figura 9-61 Sistema de control.

locidad sea de 4 seg^{-1}, el margen de fase sea de 50° y el margen de ganancia de 8 dB o más. Grafique con MATLAB las curvas escalón unitario y rampa unitaria del sistema compensado.

B-9-9. Considere el sistema de la figura 9-62. Diseñe un compensador de atraso-adelanto tal que la constante de error estático de velocidad K_v sea de 20 seg^{-1}, el margen de fase sea de 60" y el margen de ganancia no sea menor que 8 dB. Grafique con MATLAB las curvas de respuesta escalón unitario y rampa unitaria del sistema compensado.

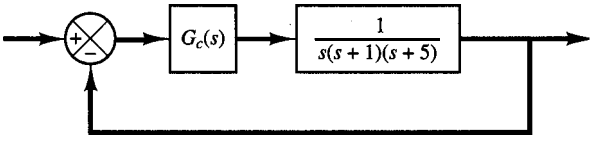


Figura 9–62 Sistema de control.

Controles PID e introducción al control robusto

10-1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores, alguna vez analizamos los esquemas básicos de control PID; por ejemplo, en el capítulo 5 presentamos los controladores PID hidráulicos, neumáticos y electrónicos. En los capítulos 7 y 9 diseñamos sistemas de control que contenían controladores PID.

En este capítulo presentaremos primero las reglas de sintonización para los controladores PID básicos y a continuación analizaremos las formas modificadas de los esquemas de control PID, incluyendo el control PI-D, el control I-PD y el control PID con dos grados de libertad. Por último, introduciremos el concepto de diseño robusto.

Es interesante señalar que más de la mitad de los controladores industriales que se usan hoy en día utilizan esquemas de control PID o PID modificado. Los controladores PID analógicos son, principalmente, de tipo hidráulico, neumático, electrónico, eléctrico o sus combinaciones. En la actualidad, muchos de éstos se transforman en formas digitales mediante el uso de microprocesadores.

Debido a que casi todos los controladores PID se ajustan en el sitio, en la literatura se han propuesto muchos tipos diferentes de reglas de sintonización, que permiten llevar a cabo una sintonización delicada y fina de los controladores PID en el sitio. Asimismo, se han desarrollado métodos automáticos de sintonización y algunos de los controladores PID poseen capacidad de sintonización automática en línea. Actualmente se usan en la industria formas modificadas del control PID, tales como el control I-PD y el control PID con dos grados de libertad. Es posible obtener muchos métodos prácticos para una conmutación sin choque (desde la operación manual hasta la operación automática) y una programación del aumento.

La utilidad de los controles PID estriba en que se aplican en forma casi general a la mayoría de los sistemas de control. En el campo de los sistemas para control de procesos, es un hecho bien conocido que los esquemas de control PID básicos y modificados han

demostrado su utilidad para aportar un control satisfactorio, aunque tal vez no aporten un control óptimo en muchas situaciones específicas.

Panorama del capítulo. La sección 10-1 presentó el material introductorio al capítulo. La sección 10-2 aborda los métodos de sintonización para el control PID básico, conocidos comúnmente como reglas de sintonización de Ziegler-Nichols. La sección 10-3 analiza los esquemas del control PID modificado, tales como el control PI-D y el control I-PD. La sección 10-4 presenta los esquemas de control PID con dos grados de libertad. La sección 10-5 introduce el concepto del control robusto usando como ejemplo un sistema de control con dos grados de libertad.

10 -2 REGLAS DE SINTONIZACIÓN PARA CONTROLADORES PID

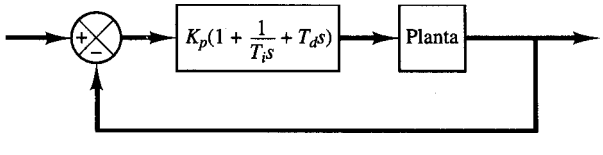
Control PID de plantas. La figura 10-1 muestra el control PID de una planta. Si se puede obtener un modelo matemático de la planta, es posible aplicar diversas técnicas de diseño con el fin de determinar los parámetros del controlador que cumpla las especificaciones en estado transitorio y en estado estable del sistema en lazo cerrado. Sin embargo, si la planta es tan complicada que no es fácil obtener su modelo matemático, tampoco es posible un enfoque analítico para el diseño de un controlador PID. En este caso, debemos recurrir a los enfoques experimentales para la sintonización de los controladores PID.

El proceso de seleccionar los parámetros del controlador que cumplan con las especificaciones de desempeño se conoce como sintonización del controlador. Ziegler y Nichols sugirieron más reglas para sintonizar los controladores PID (lo cual significa establecer valores K_p, T_i y T_d) con base en las respuestas escalón experimentales o basadas en el valor de K_p que se produce en la estabilidad marginal cuando sólo se usa la acción de control proporcional. Las reglas de Ziegler-Nichols, que se presentan a continuación, son muy convenientes cuando no se conocen los modelos matemáticos de las plantas. (Por supuesto, estas reglas se aplican al diseño de sistemas con modelos matemáticos conocidos.)

Reglas de Ziegler-Nichols para sintonizar controladores PID. Ziegler y Nichols propusieron unas reglas para determinar los valores de la ganancia proporcional K_p, del tiempo integral T_i y del tiempo derivativo T_d, con base en las características de respuesta transitoria de una planta específica. Tal determinación de los parámetros de los controladores PID o de la sintonización de los controles PID la realizan los ingenieros en el sitio mediante experimentos sobre la planta. (Se han propuesto numerosas reglas de sintonización para los controladores PID desde la propuesta de Ziegler-Nichols Se les encuentra en la literatura. Sin embargo, aquí sólo presentamos las reglas de sintonización de Ziegler-Nichols.)

Existen dos métodos denominados reglas de sintonización de Ziegler-Nichols. En ambos se pretende obtener un 25% de sobrepaso máximo en la respuesta escalón (véase la figura 10-2).

Primer método. En el primer método, la respuesta de la planta a una entrada escalón unitario se obtiene de manera experimental, como se observa en la figura 10-3. Si la planta no



Figural0- Control PID de una planta.

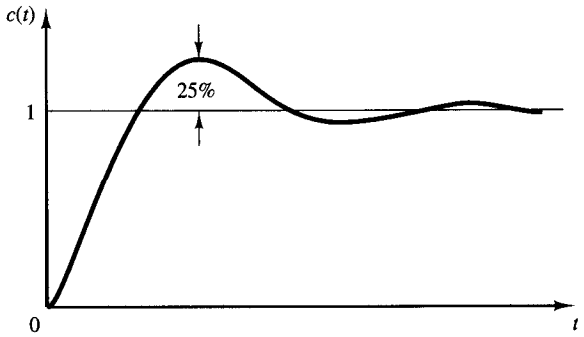


Figura 10–2
Curva de respuesta escalón unitario que muestra un sobrepaso máximo de 25 %

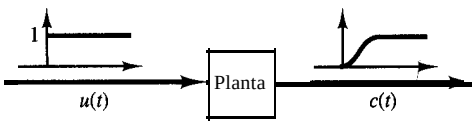


Figura10-3
Respuesta escalón unitario de una planta.

contiene integradores ni polos dominantes complejos conjugados, la curva de respuesta escalón unitario puede tener forma de S, como se observa en la figura 10–4. (Si la respuesta no exhibe una curva con forma de S, este método no es pertinente.) Tales curvas de respuesta escalón se generan experimentalmente o a partir de una simulación dinámica de la planta.

La curva con forma de S se caracteriza por dos parámetros: el tiempo de retardo ***L y*** la constante de tiempo ***T.*** El tiempo de retardo y la constante de tiempo se determinan dibujando una recta tangente en el punto de inflexión de la curva con forma de S y determinando las intersecciones de esta tangente con el eje del tiempo y la línea $c(t) = K$, como se aprecia en la figura 10–4. En este caso, la función de transferencia $C(s)/U(s)$ se aproxima mediante un sistema de primer orden con un retardo de transporte del modo siguiente:

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts + 1}$$

Ziegler y Nichols sugirieron establecer los valores de K_p, T_i y T_d de acuerdo con la fórmula que aparece en la tabla 10–1.

Observe que el controlador PID sintonizado mediante el primer método de las reglas de Ziegler-Nichols produce

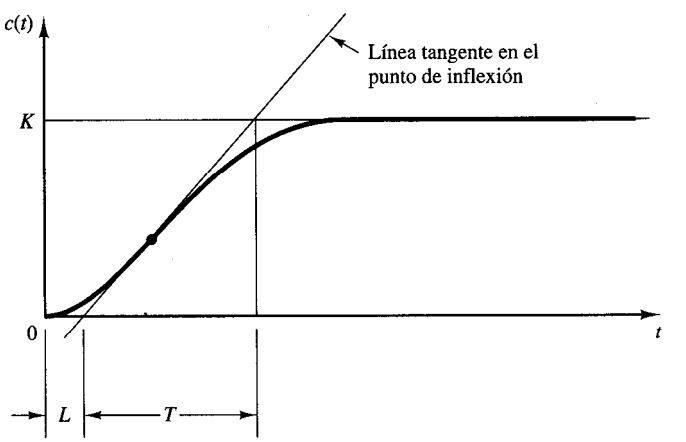


Figura10-4
Curva de respuesta con forma de S.

Tabla 10–1 Regla de sintonización de Ziegler-Nichols basada en la respuesta escalón de la planta (primer método)

Tipo de controlador	K_p	Ti	T_d
P	$\frac{T}{L}$	∞	θ
PI	$0.9\frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$1.2\frac{T}{L}$	$2L$	$0.5L$

$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$
$$= 1.2\frac{T}{L}\left(1 + \frac{1}{2Ls} + 0.5Ls\right)$$
$$= 0.6T\frac{\left(s + \frac{1}{L}\right)^2}{s}$$

Por tanto, el controlador PID tiene un polo en el origen y un cero doble en $s = -1/L$.

Segundo método. En el segundo método,primero establecemos T_i = CC y T_d = 0. Usando sólo la acción de control proporcional (véase la figura 10–5), incremente K_p de 0 aun valor crítico K_{cr} en donde la salida exhiba primero oscilaciones sostenidas. (Si la salida no presenta oscilaciones sostenidas para cualquier valor que pueda tomar K_p, no se aplica este método.) Por tanto, la ganancia crítica K_{cr} y el periodo P_{cr} correspondiente se determinan experimentalmente (véase la figura 10–6). Ziegler-Nichols sugirieron que se establecieran los valores de los parámetros K_p, T_i y T_d de acuerdo con la fórmula que aparece en la tabla 10-2.

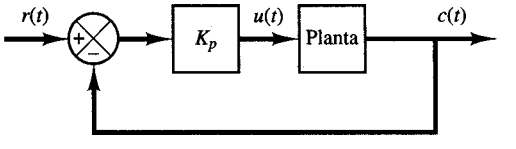


Figura 10–5
Sistema en lazo cerrado con controlador proporcional.

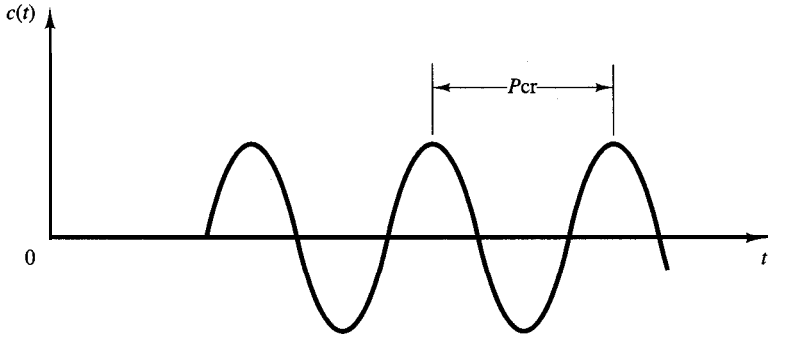


Figura 10–6
Oscilación sostenida con un periodo P_{cr}.

Tabla 10–2 Regla de sintonización de Ziegler-Nichols basada en la ganancia crítica K_{cr} y en el periodo crítico P_{cr} (segundo método)

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{cr}$	∞	0
PI	$0.45K_{cr}$	$\frac{1}{1.2}P_{cr}$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

Observe que el controlador PID sintonizado mediante el segundo método de las reglas de Ziegler-Nichols produce

$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$
$$= 0.6K_{cr}\left(1 + \frac{1}{0.5P_{cr}s} + 0.125\,P_{cr}s\right)$$
$$= 0.075K_{cr}P_{cr}\frac{\left(s + \frac{4}{P_{cr}}\right)^2}{s}$$

Por tanto, el controlador PID tiene un polo en el origen y cero doble en $s = -4/P_{cr}$.

Comentarios. Las reglas de sintonización de Ziegler-Nichols (y otras reglas de sintonización que se presentan en la literatura) se han usado ampliamente para sintonizar controladores PID en los sistemas de control de procesos en los que no se conoce con precisión la dinámica de la planta.Tales reglas de sintonización han demostrado ser muy útiles durante muchos años. Por supuesto, las reglas de sintonización de Ziegler-Nichols se aplican a las plantas cuya dinámica se conoce. (En estos casos, se cuenta con muchos enfoques analíticos y gráficos para el diseño de controladores PID, además de las reglas de sintonización de Ziegler-Nichols)

Si se conoce la función de transferencia de la planta, se calcula la respuesta escalón unitario o la ganancia crítica K_{cr} y el periodo crítico P_{cr}. A continuación, empleando los valores calculados, es posible determinar los parámetros K_p, T_i y T_d a partir de las tablas 10-1 o 10-2. Sin embargo, la utilidad real de las reglas de sintonización de Ziegler-Nichols (y otras) se vuelve evidente cuando no se conoce la dinámica de la planta, por lo que no se cuenta con enfoques analíticos o gráficos para el diseño de controladores.

En general, para aquellas plantas con una dinámica complicada y sin integradores, se han aplicado las reglas de sintonización de Ziegler-Nichols. Sin embargo, si la planta tiene un integrador, en algunos casos estas reglas no son pertinentes. Para ilustrar una situación en la que las reglas de Ziegler-Nichols no se aplican, considere el caso siguiente: suponga que un sistema de control con realimentación unitaria tiene una planta cuya función de transferencia es

$$G(s) = \frac{(s + 2)(s + 3)}{s(s + 1)(s + 5)}$$

Debido a la presencia de un integrador, no se aplica el primer método. Remitiéndonos a la

figura 10-3, la respuesta escalón de esta planta no tendrá una curva de respuesta con forma de S; más bien, la respuesta se incrementa con el tiempo. Asimismo, si se intenta el segundo método (véase figura 10–5), el sistema en lazo cerrado con un controlador proporcional no exhibirá oscilaciones sostenidas, sin importar el valor que pueda tomar la ganancia K_p. Esto se aprecia a partir del siguiente análisis. Dado que la ecuación característica es

$$s(s+1)(s+5) + K_p(s+2)(s+3) = 0$$

o bien

$$s^3 + (6 + K_p)s^2 + (5 + 5K_p)s + 6K_p = 0$$

el arreglo de Routh se convierte en

s^3	1	$5 + 5K_p$
s^2	$6 + K_p$	$6K_p$
s^1	$\dfrac{30 + 29K_p + 5K_p^2}{6 + K_p}$	0
s^0	$6K_p$	

Los coeficientes de la primera columna son positivos para todos los valores de K_p positivos. Por tanto, en el caso actual, el sistema en lazo cerrado no exhibirá oscilaciones sostenidas y, por tal motivo, no existe el valor de ganancia crítica K_{cr}. De esta forma, no se aplica el segundo método.

Si es posible aplicar en la planta las reglas de Ziegler-Nichols, la planta con un controlador PID sintonizado mediante las reglas de Ziegler-Nichols exhibirá un sobrepaso máximo aproximado de 10% ~ 60% en la respuesta escalón. En promedio (experimentado en muchas plantas diferentes), el sobrepaso máximo aproximado es de 25%. (Esto se comprende muy bien porque los valores sugeridos en las tablas 10-1 y 10-2 se basan en el promedio.) En un caso específico, si el sobrepaso máximo es excesivo, siempre es posible (en forma experimental o de otro modo) hacer una sintonización precisa para que el sistema en lazo cerrado exhiba respuestas transitorias satisfactorias. De hecho, las reglas de sintonización de Ziegler-Nichols proporcionan una conjetura razonada para los valores de los parámetros y ofrecen un punto inicial para una sintonización conveniente.

EJEMPLO 10-1

Considere el sistema de control de la figura 10-7, en el cual se usa un controlador PID para controlar el sistema. El controlador PID tiene la función de transferencia

$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

Aunque existen muchos métodos analíticos para el diseño de un controlador PID en el sistema actual, apliquemos una regla de sintonización de Ziegler-Nichols para la determinación de los valores de los parámetros K_p, T_i y T_d. A continuación, obtenga una curva de respuesta escalón unitario y verifique si el sistema diseñado exhibe un sobrepaso máximo aproximado de 25%. Si el sobrepaso máximo es excesivo (40% o más), haga una sintonización fina y reduzca la cantidad del sobrepaso máximo aproximado de 25%.

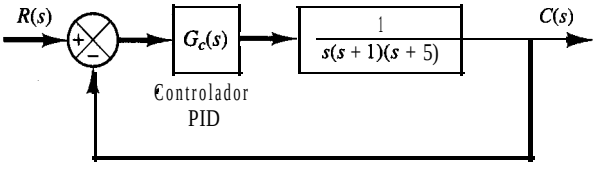


Figura 10–7
Sistema con un controlador PID.

Dado que la planta tiene un integrador, usamos el segundo método de las reglas de sintonización de Ziegler-Nichols. Estableciendo $T_i = \infty$ y $T_d = 0$, obtenemos la función de transferencia en lazo cerrado del modo siguiente:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{s(s + 1)(s + 5) + K_p}$$

El valor de K_p que hace al sistema marginalmente estable para que ocurra una oscilación sostenida se obtiene mediante el criterio de estabilidad de Routh. Dado que la ecuación característica para el sistema en lazo cerrado es

$$s^3 + 6s^2 + 5s + K_p = 0$$

el arreglo de Routh se convierte en:

s^3	1	5
s^2	6	K_p
s^1	$\frac{30 - K_p}{6}$	
s^0	K_p	

Examinando los coeficientes de la primera columna del arreglo de Routh, encontramos que ocurrirá una oscilación sostenida si $K_p = 30$. Por tanto, la ganancia crítica K_{cr} es

$$K_{cr} = 30$$

Con la ganancia K_p establecida igual a K_{cr} (= 30), la ecuación característica se vuelve

$$s^3 + 6s^2 + 5s + 30 = 0$$

Para encontrar la frecuencia de la oscilación sostenida, sustituimos $s = j\omega$ en la ecuación característica, del modo siguiente:

$$(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 30 = 0$$

o bien

$$6(5 - \omega^2) + j\omega(5 - \omega^2) = 0$$

a partir de lo cual encontramos que la frecuencia de la oscilación sostenida es $\omega^2 = 5$ o $\omega = \sqrt{5}$. Así, el periodo de la oscilación sostenida es

$$P_{cr} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = 2.8099$$

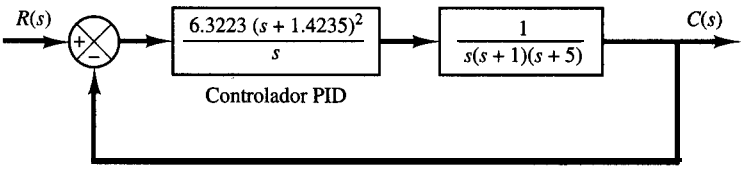
Remitiéndonos a la tabla 10-2, determinamos K_p, T_i, y T_d del modo siguiente:

$$K_p = 0.6K_{cr} = 18$$
$$T_i = 0.5P_{cr} = 1.405$$
$$T_d = 0.125P_{cr} = 0.35124$$

Por tanto, la función de transferencia del controlador PID es

$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$
$$= 18\left(1 + \frac{1}{1.405s} + 0.35124s\right)$$
$$= \frac{6.3223(s + 1.4235)^2}{s}$$

Figura 10-8
Diagrama de bloques del sistema con un controlador PID diseñado mediante las reglas de sintonización de Ziegler-Nichols (segundo método).



El controlador PID tiene un polo en el origen y un cero doble en s = -1.4235. La figura 10-8 contiene un diagrama de bloques del sistema de control con el controlador PID diseñado.

A continuación, examinemos la respuesta escalón unitario del sistema. La función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$ se obtiene mediante

$$\frac{C(s)}{\mathrm{R(s)}} = \frac{6.3223s^2 + 18\mathrm{s} + 12.811}{s^4 + 6s^3 + 11.3223s^2 + 18s + 12.811}$$

La respuesta escalón unitario de este sistema se obtiene fácilmente con MATLAB. Véase el programa MATLAB 10-1. La figura 10-9 presenta la curva de respuesta escalón unitario resultante. El sobrepaso máximo en la respuesta escalón unitario es de aproximadamente 62%. La cantidad sobrepaso máximo es excesiva. Se reducen los parámetros del controlador mediante un sintonizado fino. Dicha sintonización se hace en la computadora. Encontramos que conservando $K_p = 18$ y moviendo el cero doble del controlador PID as = -0.65, es decir, usando el controlador PID

$$G_c(s) = 18\left(1 + \frac{1}{3.077s} + 0.7692\mathrm{s}\right) = 13.846\,\frac{(\mathrm{s} + 0.65)'}{s} \qquad (10\text{–}1)$$

el sobrepaso máximo en la respuesta escalón unitario se reduce a, aproximadamente, 18% (véase la figura 10-10). Si la ganancia proporcional K_p se incrementa a 39.42, sin modificar la ubicación del cero doble (s = − 0.65), es decir, usando el controlador PID

$$G_c(s) = 39.42\left(1 + \frac{1}{3.077s} + 0.7692\mathrm{s}\right) = 30.322\,\frac{(\mathrm{s} + 0.65)^2}{s} \qquad (10\text{–}2)$$

la velocidad de respuesta entonces se incrementa, pero el valor del sobrepaso máximo también aumenta a aproximadamente 28%, como se observa en la figura 10-11. Dado que, en este caso, el sobrepaso máximo está bastante cerca del 25% y la respuesta es más rápida que el sistema con G,(s) obtenido mediante la ecuación (10–1), consideramos aceptable la G,(s) obtenida a partir de la ecuación (10-2). En este caso, los valores sintonizados de K_p, T_i y T_d se convierten en

$$K_p = 39.42, \qquad T_i = 3.077, \qquad T_d = 0.7692$$

Es interesante observar que estos valores son de alrededor del doble de los valores sugeridos mediante el segundo método de las reglas de sintonización de Ziegler-Nichols. Lo que se debe señalar aquí es que las reglas de sintonización de Ziegler-Nichols han aportado un punto inicial para la sintonización.

Es instructivo señalar que, para el caso en el que el cero doble'se ubica en s = − 1.4235, incrementar el valor de K_p aumenta la velocidad de respuesta, pero, en lo que se refiere al sobrepaso

Programa MATLAB 10–1

```
% ---------- Respuesta escalón unitario ----------

num = [0   0   6.3223   18   12.811];
den = [1   6   11.3223   18   12.811];
step(num,den)
grid
title('Respuesta escalón unitario')
```

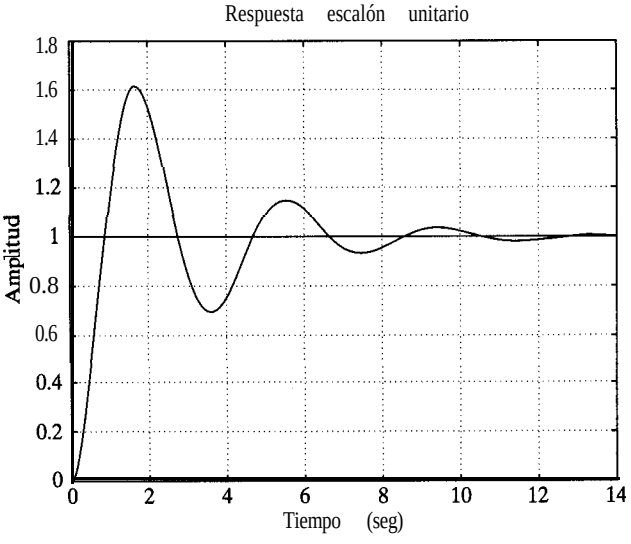


Figura 10–9
Curva de respuesta escalón unitario del sistema con un controlador PID diseñado mediante las reglas de sintonización de Ziegler-Nichols (segundo método).

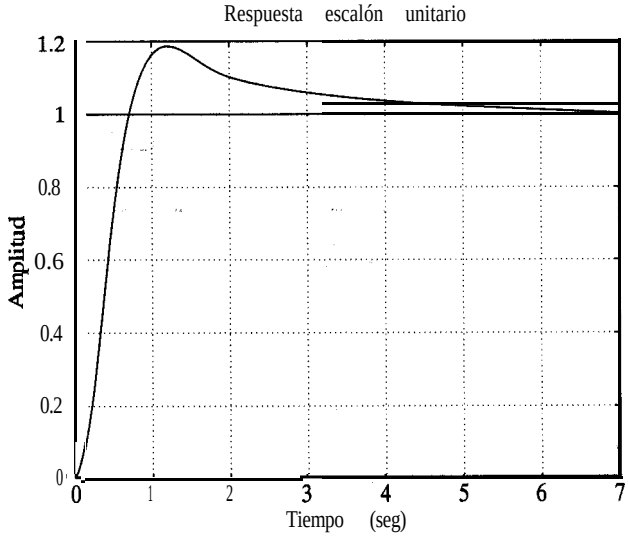


Figura 10–10
Respuesta escalón unitario del sistema de la figura 10-7, donde el controlador PID tiene los parámetros $K_p = 18$, $T_i = 3.077$, y $T_d = 0.7692$.

máximo en porcentaje, variar la ganancia K_p tiene un efecto mínimo. La razón de esto se observa a partir del análisis del lugar geométrico de las raíces. La figura 10-12 muestra el diagrama del lugar geométrico de las raíces para el sistema diseñado mediante el segundo método de las reglas de sintonización de Ziegler-Nichols. Dado que las ramificaciones dominantes de los lugares geométricos de las raíces están a lo largo de las líneas $\zeta = 0.3$ para un rango considerable de K, variar el valor de K (de 6 a 30) no modifica mucho el factor de amortiguamiento relativo de los polos dominantes en lazo cerrado. Sin embargo, variar la ubicación del cero doble tiene un efecto significativo en el sobrepaso máximo, porque cambia mucho el factor de amortiguamiento relativo de los polos dominantes en lazo cerrado. Esto también se observa a partir del análisis del lugar geométrico de las raíces. La figura 10-13 muestra el diagrama del lugar geométrico de las raíces para el sistema en el cual el controlador PID tiene un cero doble en $s = -0.65$. Observe el cambio en la configuración del lugar geométrico de las raíces. Este cambio hace posible modificar el factor de amortiguamiento relativo de los polos dominantes en lazo cerrado.

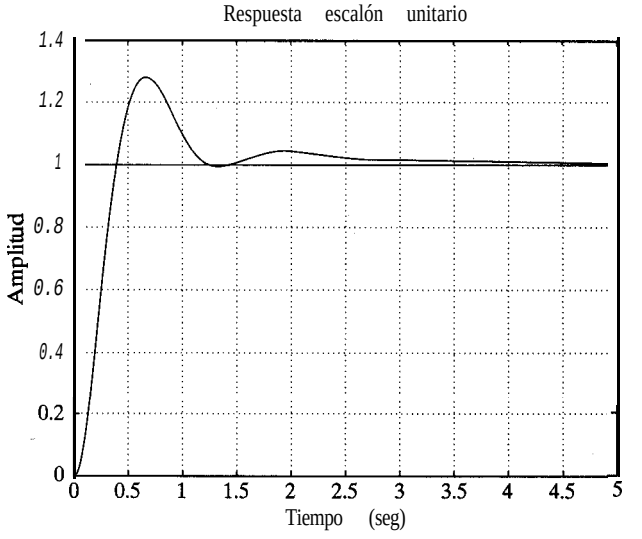


Figura 10–11
Respuesta escalón unitario del sistema de la figura 10-7 donde el controlador PID tiene los parámetros $K_p = 39.42$, $T_i = 3.077$, y $T_d = 0.7692$.

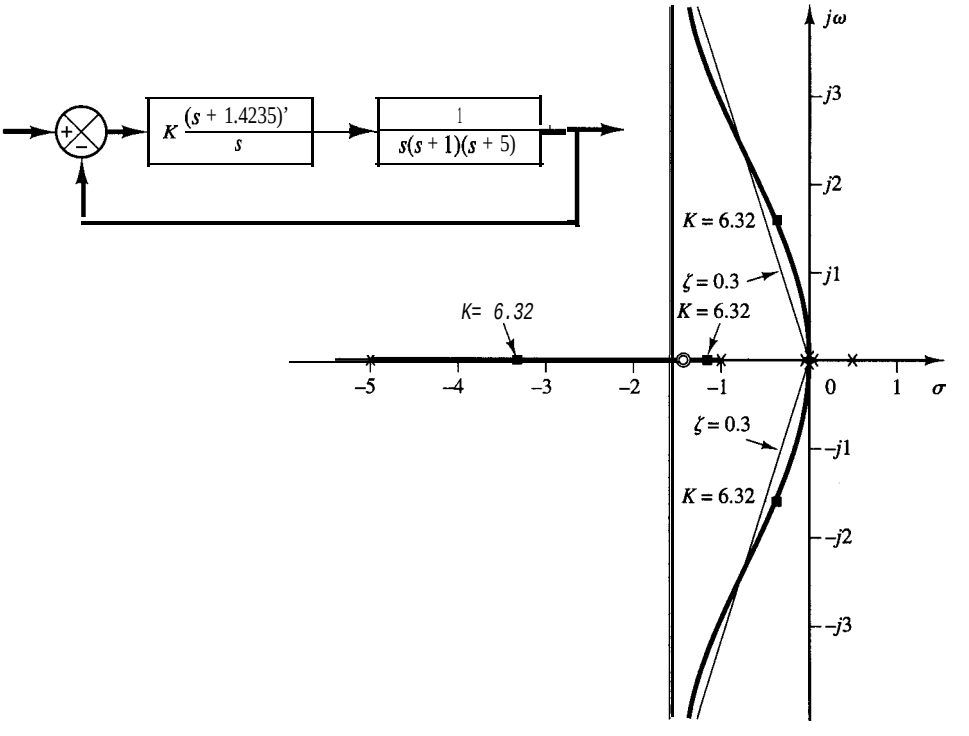


Figura **10–12**
Diagrama del lugar geométrico de las raíces del sistema cuando el controlador PID tiene un cero doble en $s = -1.4235$.

En la figura 10-13, observe que, en el caso en el que el sistema tiene la ganancia $K = 30.322$, los polos en lazo cerrado en $s = -2.35 \pm j4.82$ funcionan como polos dominantes. Dos polos adicionales en lazo cerrado están muy cerca del cero doble en $s = -0.65$, por lo que estos polos en lazo cerrado y el cero doble casi se cancelan uno al otro. El par de polos dominantes en lazo cerrado determina realmente la naturaleza de las respuestas. Por otra parte, cuando el sistema tiene $K = 13.846$, los polos en lazo cerrado en $s = -2.35 \pm j2.62$ no son realmente dominantes, porque los otros dos polos en lazo cerrado cerca del cero doble en $s = -0.65$ tienen un efecto considera-

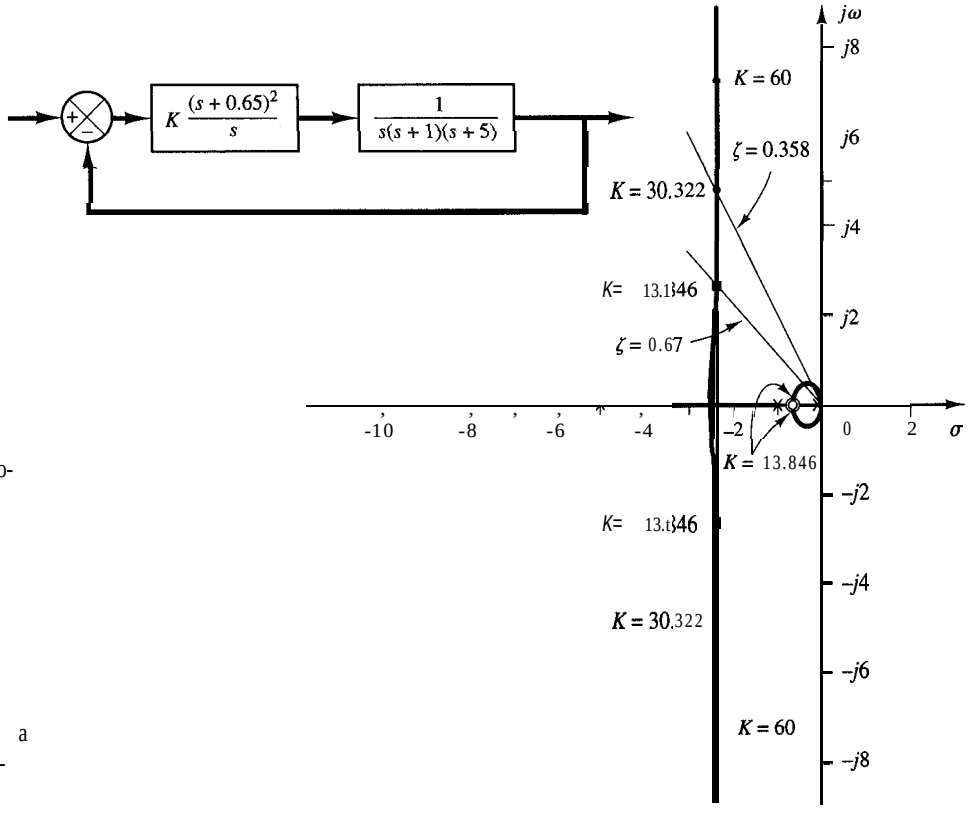


Figura10-13
Diagrama del lugar geométrico de las raíces del sistema cuando el controlador PID tiene un cero doble en $s = -0.65$. $K = 13.846$ corresponde a $G_1(s)$ obtenido mediante la ecuación (10-1) y $K = 30.322$ corresponde a $G_2(s)$ obtenido mediante la ecuación (10-2).

ble en la respuesta. En este caso, el sobrepaso máximo en la respuesta escalón (18%) es mucho más grande que en el caso del sistema de segundo orden que tiene **sólo** polos dominantes en lazo cerrado. (Para este último, el sobrepaso máximo en la respuesta escalón sería de aproximadamente 6% .)

10–3 MODIFICACIONES DE LOS ESQUEMAS DE CONTROL PID

Considere el sistema de control PID básico de la figura 10–14(a), en el cual el sistema está sujeto a perturbaciones y ruido. La figura 10–14(b) es un diagrama de bloques modificados del mismo sistema. En el sistema de control PID básico, como el de la figura 10–14(b), si la entrada de referencia es una función escalón, debido a la presencia del término derivativo en la acción de control, la variable manipulada $u(t)$ contendrá una función impulso (una función delta). En un controlador PID real, en lugar del término derivativo puro $T_d s$ empleamos

$$\frac{T_d}{1 + \gamma T_d s}$$

donde el valor de γ está en algún punto alrededor de 0.1. Por tanto, cuando la entrada de referencia es una función escalón, la variable manipulada u(t) no contendrá una función impulso, sino que implicará una función de pulso aguda. Tal fenómeno se denomina ***reacción del punto de ajuste.***

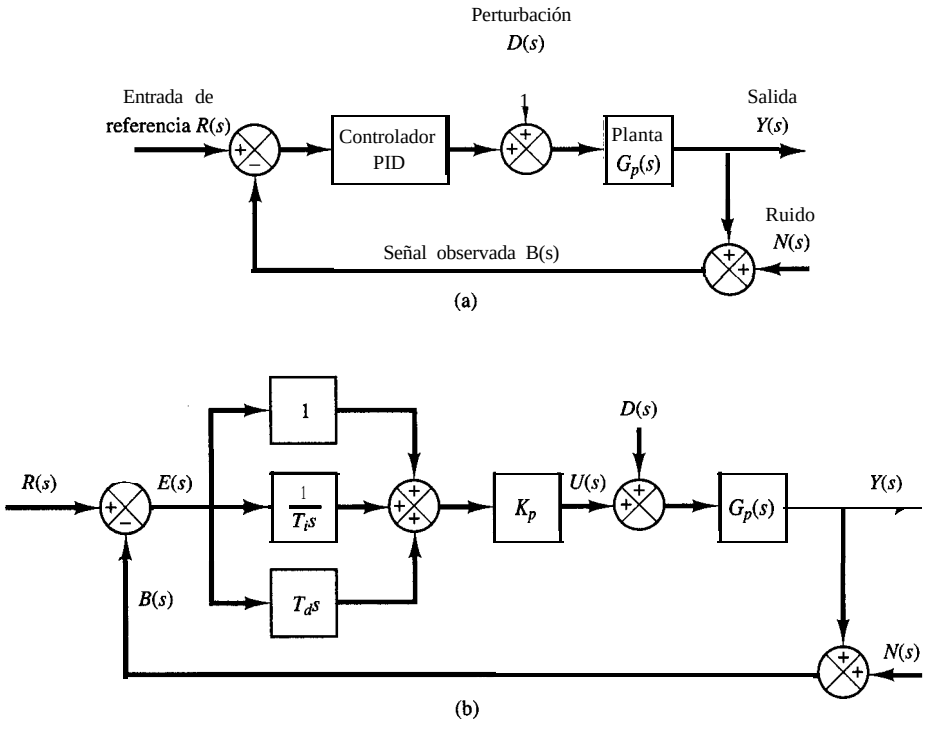


Figura10-14
(a) Sistema con un controlador PID; (b) diagrama de bloques equivalente.

Control PI-D. Para evitar el fenómeno de la reacción del punto de ajuste, pretendemos operar la acción derivativa sólo en la trayectoria de realimentación, a fin de que la diferenciación ocurra únicamente en la señal de realimentación y no en la señal de referencia. El esquema de control ordenado de esta forma se denomina control PI-D. La figura 10-15 muestra un sistema con un control PI-D.

A partir de la figura 10-15, se observa que la señal manipulada $U(s)$ se obtiene mediante

$$U(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)R(s) - K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)B(s)$$

Observe que, en ausencia de perturbaciones y ruido, la función de transferencia en lazo cerrado del sistema de control PID básico [que aparece en la figura 10–14(b)] y el sistema de control PI-D (de la figura 10–15) se obtienen, respectivamente, mediante

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)\frac{K_p G_p(s)}{1 + \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)K_p G_p(s)}$$

Y

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)\frac{K_p G_p(s)}{1 + \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)K_p G_p(s)}$$

Es importante señalar que, en ausencia de la entrada de referencia y el ruido, la función de transferencia en lazo cerrado entre la perturbación $D(s)$ y la salida Y(s) es igual en cualquier caso y se obtiene mediante

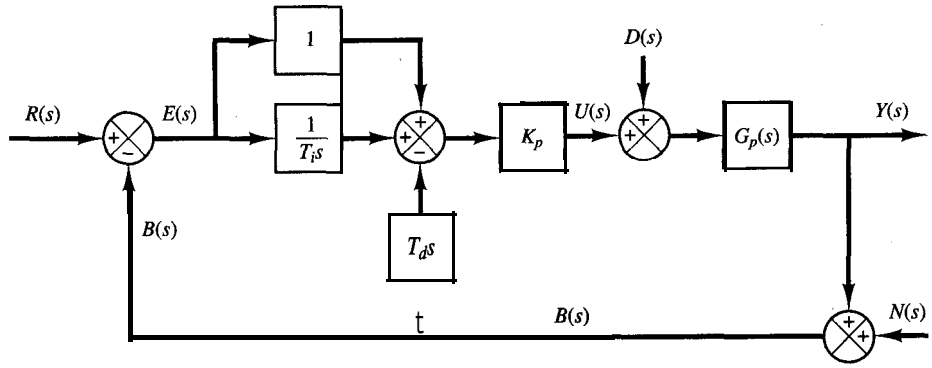


Figura 10–15
Sistema con un control PI-D.

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + K_p G_p(s)\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)}$$

Control I-PD. Vuelva a considerar el caso en el que la entrada de referencia es una función escalón. Tanto el control PID como el control PI-D implican una función escalón en la señal manipulada. En muchas ocasiones, tal cambio escalón en la señal manipulada tal vez no sea conveniente. Por tanto, puede convenir mover la acción proporcional y la acción derivativa a la trayectoria de realimentación, a fin de que estas acciones sólo afecten la señal de realimentación. La figura 10-16 muestra tal esquema de control, que se denomina control I-PD. La señal manipulada se obtiene mediante

$$U(s) = K_p \frac{1}{T_i s} R(s) - K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) B(s)$$

Observe que la entrada de referencia $R(s)$ sólo aparece en la parte de control integral. Por tanto, en el control I-PD es imperativo tener la acción de control integral para una operación adecuada del sistema de control.

La función de transferencia en lazo cerrado $Y(s)/R(s)$ en ausencia de la entrada de perturbación y la entrada de ruido se obtiene mediante

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left(\frac{1}{T_i s}\right) \frac{K_p G_p(s)}{1 + K_p G_p(s)\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)}$$

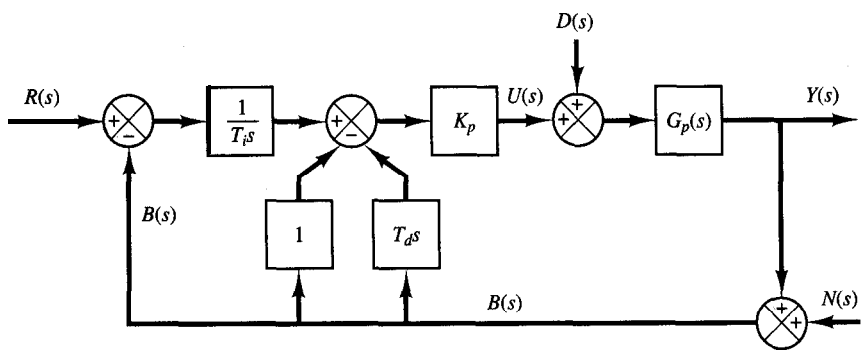


Figura 10–16
Sistema con un control I-PD.

Observe que, en ausencia de la entrada de referencia y las señales de ruido, la función de transferencia en lazo cerrado entre la entrada de perturbación y la salida se obtiene mediante

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + K_p G_p(s)\left(1 + \dfrac{1}{T_i s} + T_d s\right)}$$

Esta expresión es igual para el control PID y para el control PI-D.

Extensión de la configuración de un control I-PD al control integral con configuración de realimentación del estado. La figura 10–17(a) muestra un sistema de control que contiene una acción de control integral y una realimentación del estado. La configuración de control de la figura 10–17(a) es una extensión de la configuración de control I-PD de la figura 10-16. La configuración de control de la figura 10–17(a) es mejor que la de la figura 10-16 cuando $G_p(s)$ es de una planta de orden superior. Es decir, en el sistema de la figura 10-16, es posible especificar los polos dominantes en lazo cerrado (especificar ζ y ω_n), pero no otros polos en lazo cerrado. En cambio, en el caso del sistema de la figura 10–17(a) es posible especificar todos los polos en lazo cerrado.

Si la planta $G_p(s)$ es de n-ésimo orden, el vector de estado se convierte en un vector de dimensión n y el vector de ganancias K se convierte en

$$\mathrm{K} = [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n]$$

por lo que los parámetros de diseño son k_I y $k_1, k_2, \ldots, k_n$. En este caso, hay $n + 1$ parámetros por determinar. Esto significa que puede obtenerse un control más fino si se especifican todos los polos en lazo cerrado. Sin embargo, el esquema de control en este caso es mucho más complejo que el control I-PD.

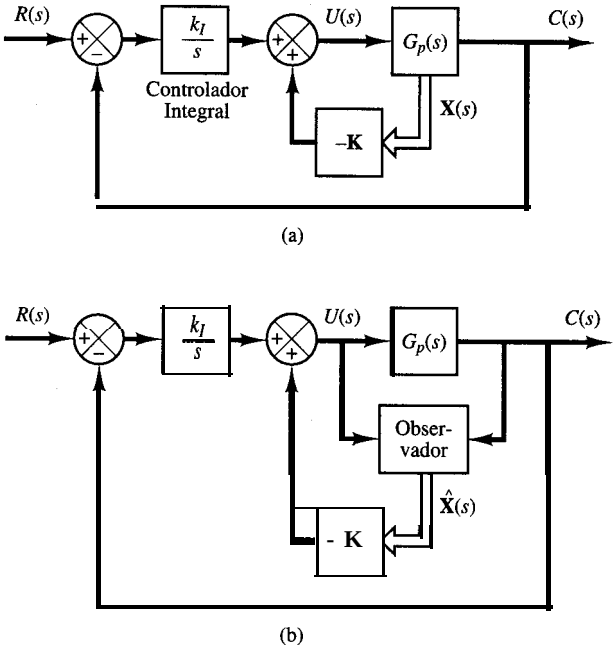


Figura 10–17
(a) Configuración del control integral con realimentación del estado; (b) configuración de un control integral con realimentación del estado observado.

En la mayor parte de las situaciones prácticas, tal vez no sea posible medir todas las variables de estado. En este caso, se vuelve necesario usar un observador. [Un observador es un dispositivo que genera un vector de estado X(t) estimado. Consulte los detalles del **observador** en el capitulo 12.] En lugar del estado x(t) para la realimentación, usamos el estado observado (estado estimado) X(t) para la realimentación. La figura 10–17(b) muestra un diagrama de bloques del sistema modificado para emplear un observador. (El diseño de controladores basados en el control integral con realimentación del estado o realimentación del estado observado se presenta en el capitulo 12.)

Control **PID** con dos **grados** de libertad. Hemos mostrado que el control PI-D se obtiene moviendo la **acción** de control derivativa a la trayectoria de realimentación y que el control I-PD se obtiene moviendo las acciones de control proporcional y derivativa a la trayectoria de realimentación. En lugar de mover la **acción** de control derivativa completa o la acción de control proporcional a la trayectoria de realimentación, es posible mover **sólo** partes de estas acciones de control a la trayectoria de realimentación, conservando las partes restantes en la trayectoria directa. En la literatura se ha propuesto un control PI-PD, cuyas características **se** encuentran entre el control PID y el control I-PD. Asimismo, se puede considerar un control PID-PD. En estos esquemas de control tenemos un controlador en la trayectoria directa y otro en la trayectoria de realimentación. Tales esquemas de control nos conducen a un esquema de control más general con dos grados de libertad. Analizaremos los detalles de tal esquema de control con dos grados de libertad en la sección 10–4.

10–4 CONTROL CON DOS GRADOS DE LIBERTAD

Considere 61 sistema de la **figura** 10-18, en el cual el sistema está sujeto a la entrada de perturbación $d(t)$ y a la entrada de ruido n(t). $G_c(s)$ es **la función** de transferencia del controlador y $G_p(s)$ es la **función de** transferencia de la planta. Suponemos que $G_p(s)$ es fija e inalterable.

Para este sistema, se obtienen tres funciones de transferencia en lazo cerrado $Y(s)/R(s) = G_{yr}$, $Y(s)/D(s) = G_{yd}$, y $Y(s)/N(s) = G_{yn}$. Son

$$G_{yr} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p}$$

$$G_{yd} = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + G_c G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{Y(s)}{N(s)} = -\frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p}$$

[Al obtener $Y(s)/R(s)$ supusimos que $D(s) = 0$ y $N(s) = 0$. Se aplican comentarios similares a las obtenciones de $Y(s)/D(s)$ y $Y(s)/N(s)$.] Los grados de libertad del sistema de control se refieren al número de funciones de transferencia en lazo cerrado que son independientes. En el caso actual tenemos

$$G_{yr} = \frac{G_p - G_{yd}}{G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{G_{yd} - G_p}{G_p}$$

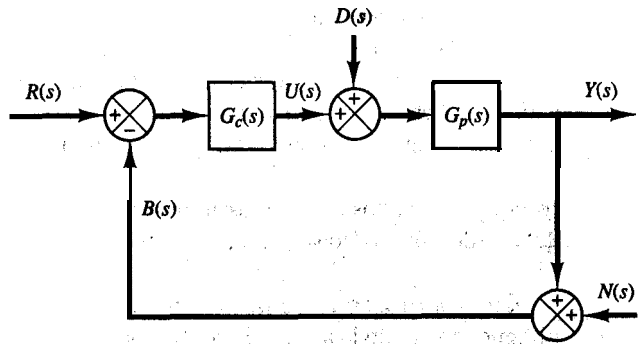


Figura 10–18
Sistema de control con un grado de libertad.

Si una de las tres funciones de transferencia en lazo cerrado G_{yr}, G_{yn} y G_{yd}, está dada, las dos restantes están fijas. Esto significa que el sistema de la figura 10-18 es de un grado de libertad.

A continuación considere el sistema de la figura 10–19, en el cual $G_p(s)$ es la función de transferencia de la planta y se supone que es fija e inalterable. Para este sistema, las funciones de transferencia en lazo cerrado G_{yr}, G_{yn} y G_{yd} se obtienen, respectivamente, mediante

$$G_{yr} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{c1}G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2})G_p}$$

$$G_{yd} = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2})G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{Y(s)}{N(s)} = -\frac{(G_{c1} + G_{c2})G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2})G_p}$$

Por,tanto, tenemos que

$$G_{yr} = G_{c1}G_{yd}$$

$$G_{yn} = \frac{G_{yd} - G_p}{G_p}$$

En este caso, si G_{yd} está dada, entonces G_{yn} está fija, pero G_{yr} no lo está, porque G_{c1} es independiente de G_{yd}. Por tanto, dos funciones de transferencia en lazo cerrado entre las tres funciones de transferencia en lazo cerrado G_{yr}, G_{yd}, y G_{yn} son independientes. En este caso, se trata de un sistema con dos grados de libertad.

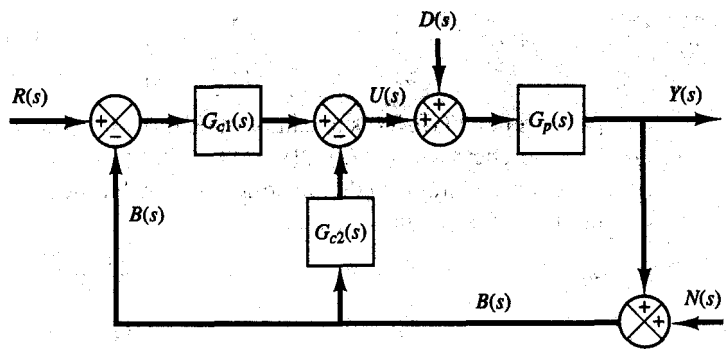


Figura 10–19
Sistema de control con dos grados de libertad.

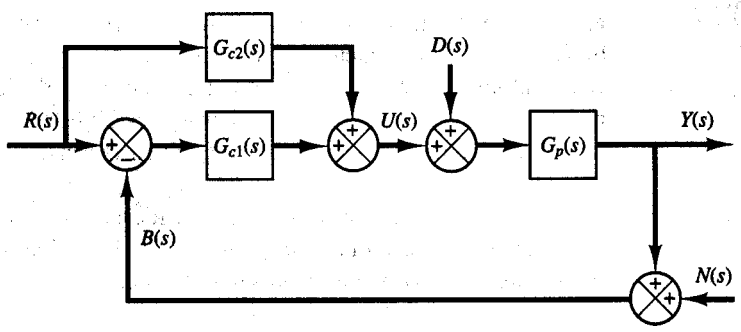


Figura 10–20
Sistema de control con dos grados de libertad.

Asimismo, el sistema de la figura 10-20 también es un sistema de control con dos grados de libertad, porque, para este sistema,

$$G_{yr} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{c1}G_p}{1 + G_{c1}G_p} + \frac{G_{c2}G_p}{1 + G_{c1}G_p}$$

$$G_{yd} = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + G_{c1}G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{Y(s)}{N(s)} = -\frac{G_{c1}G_p}{1 + G_{c1}G_p}$$

Por tanto,,

$$G_{yr} = G_{c2}G_{yd} + \frac{G_p - G_{yd}}{G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{G_{yd} - G_p}{G_p}$$

Es evidente que, si se obtiene G_{yd}, entonces G_{yn} esta fija, pero G_{yr} no lo está, porque G_{c2} es independiente de G_{yd}.

. En la sección 10–5 se observará que, en tal sistema de, control con dos grados de libertad, las características en lazo cerrado y las características de realimentación sé ajustan en forma independiente para mejorar el desempeño de respuesta del sistema.

10–5 CONSIDERACIONES DE DISEÑO PARA EL CONTROL ROBUSTO

En capitulos ‘anteriores hemos visto que las características de respuesta transitoria, tales como el tiempó de levantainiento, el sobrepaso máximo y el’tiempo de asentamiento en la respuesta escalón, asf como las caracterfsticas en estado estable, tales como los errores después de la entrada rampa, son consideraciones importantes del diseño. En los capítulos 7 y 9 diseñamos sistemas de control basados en las especificaciones de respuesta transitoria o en las especificaciones de respuesta en frecuencia.

Es un hecho bien conocido que la realimentación reduce el efecto de las perturbaciones y modera los errores de modelado o los cambios de parámetros en el desempeño de un sistema de control. Sin embargo,’ ante la presencia de perturbaciones y ruido en el sensor, si pretendemos diseñar sistemas de control de alto desempeño, debemos incluir las siguientes consideraciones en los pasos del diseño:

a. Desempeño del seguimiento (reducir el error de seguimiento)
b. Rechazo a perturbaciones (reducir la salida y para una entrada de perturbación)
c. Sensibilidad ante los errores en el modelado (reducir la sensibilidad)
d. Margen de estabilidad (establecer una estabilidad robusta)
e. Sensibilidad a ruido en el sensor (reducir la sensibilidad)

A continuación, analizaremos estas consideraciones con detalle.

Considere el sistema de la figura 10-20. Usándolo como ejemplo, desarrollaremos las cinco consideraciones anteriores con detalle.

a. ***Desempeño del*** seguimiento. El desempeño del seguimiento se determina mediante la función de transferencia G_{yr}, en la cual

$$G_{yr} = \frac{G_p}{1 + G_{c1}G_p}(G_{c1} + G_{c2})$$

Para obtener un buen desempeño del seguimiento, G_{yr} debe estar cerca de la unidad en un rango de frecuencias amplio. Esto se obtiene ajustando los controladores G_{c1} y G_{c2}.

b. ***Rechazo a perturbaciones.*** El grado de rechazo a perturbaciones se expresa mediante el cociente entre G_{yd} (función de transferencia en lazo cerrado entre la perturbación d y la salida y) y G_p (función de transferencia de la trayectoria directa entre la perturbación d y la salida y), o bien

$$S_d = \frac{G_{yd}}{G_p} = \frac{1}{1 + G_{c1}G_p} \tag{10-3}$$

Para mejorar el rechazo a perturbaciones, reduzca S_d en un rango de frecuencias amplio.

c. Sensibilidad ante los errores en el modelado. Al diseñar sistemas de control, nuestro diseño se basa en el modelo de una planta específica. Tal modelo no es de ninguna manera preciso, sino sólo una aproximación a la dinámica real de la planta. La diferencia entre la dinámica de la planta real y la dinámica de un modelo se denomina error de modelado. Los errores de modelado ocurren por alguna de las razones siguientes:

1. Características no lineales de la planta no consideradas
2. Características de alta frecuencia de la planta no consideradas (por ejemplo, los sistemas mecánicos tienen un fenómeno dinámico de alta frecuencia, incluyendo las resonancias, el efecto de una masa de resorte no considerada, etcétera.)
3. La precisión de los parámetros no es suficientemente buena
4 Las características de la planta cambian con el tiempo

Para simplificar la notación, definamos la función de transferencia de la planta real como $\hat{G}_p$, el modelo de la función de transferencia de la planta como G_p, y la diferencia entre $\hat{G}_p$ y G_p como ΔG, o

$$\mathbf{AG} = \hat{G}_p - G_p$$

Aquí, la sensibilidad se refiere a la diferencia entre la respuesta del sistema en presencia de errores en el modelo y ante la ausencia de errores en el modelo. Dado que

$$G_{yr} = \frac{(G_{c1} + G_{c2})G_p}{1 + G_{c1}G_p}$$

la variación de G_{yr} se obtiene mediante

$$AG_{yr} = \frac{(G_{c1} + G_{c2})(G_p + AG)}{1 + G_{c1}(G_p + AG)} - \frac{(G_{c1} + G_{c2})G_p}{1 + G_{c1}G_p}$$

$$= \frac{(G_{c1} + G_{c2})\Delta G}{[1 + G_{c1}(G_p + \Delta G)](1 + G_{c1}G_p)}$$

Por tanto,

$$\frac{\Delta G_{yr}}{G_{yr}} = \frac{AG}{G_p} \frac{1}{1 + G_{c1}\hat{G}_p} \tag{10-4}$$

La ecuación (10-4) plantea que la variación relativa de G_{yr} es $1/(1 + G_{c1}\hat{G}_p)$ por la variación relativa de la función de transferencia de la planta. (Observe que, aunque G_{yr} depende tanto de G_{c1} como de G_{c2}, la variación relativa $\Delta G_{yr}/G_{yr}$ sólo depende de G_{c1}.) Defina

$$S = \frac{1}{1 + G_{c1}G_p} \tag{10-5}$$

Observe que S es una función de la frecuencia ω. Desde el punto de vista de la sensibilidad, $S(j\omega)$ debe ser pequeña en el rango de frecuencias considerado.

Observe que la S definida mediante la ecuación (10-10) es igual que la S definida mediante la ecuación (10-5). La S de la ecuación (10-5) se denomina función de sensibilidad

En los modelos matemáticos de los sistemas de alto desempeño debe incluirse la dinámica de alta frecuencia, y los compensadores deben diseñarse con base en tales modelos. Si se desconoce la dinámica de alta frecuencia de la planta, es conveniente mantener la ganancia de alta frecuencia baja para suprimir el fenómeno de alta frecuencia.

d. Margen de estabilidad. Una cuestión importante es cómo afecta los errores en el modelado la estabilidad de los sistemas de control. La estabilidad del sistema de control con realimentación se determina mediante la condición de si la función de transferencia en lazo abierto

$$G_{c1}\hat{G}_p = G_{c1}(G_p + AG)$$

satisface el requerimiento de la condición de estabilidad de Nyquist. Observe que siempre diseñamos sistemas de control tales que la función de transferencia en lazo abierto $G_{c1}G_p$ satisfaga la condición de estabilidad de Nyquist. Si la magnitud de $G_{c1}(j\omega)\Delta G(j\omega)$ es menor que la distancia entre el punto $-1 + j0$ y el punto $G_{c1}(j\omega)G_p(j\omega)$ para una frecuencia ω definida $G_{c1}\hat{G}_p$ también satisface la condición de estabilidad de Nyquist. Es decir, si

$$|G_{c1}\,\Delta G| < |1 + G_{c1}G_p| \tag{10-6}$$

el sistema de control es estable. Defina

$$T = \frac{G_{c1}G_p}{1 + G_{c1}G_p} \tag{10-7}$$

Entonces, la desigualdad (10-6) se escribe como

$$\left|\frac{\Delta G}{G_p}\right| < \left|\frac{1}{T}\right| \tag{10-8}$$

Esta desigualdad aporta un margen de estabilidad en una forma general. Observe que, entre más pequeño es el valor de $T(j\omega)$ en una frecuencia determinada, más grande es el margen de estabilidad en tal frecuencia. La Tdefinida mediante la ecuación (10-7) se denomina función de sensibilidad complementaria.

Supongamos que el límite superior del error en el modelo relativo es $l(j\omega)$, o

$$\left|\frac{\Delta G(j\omega)}{G_p(j\omega)}\right| \leq l(j\omega)$$

En muchos casos se observa que $l(j\omega)$ es demasiado pequeño (en el orden de 0.1) para el rango de frecuencias bajas, aproximadamente de una unidad para el rango de frecuencias medias y muy grande para el rango de frecuencias altas. La figura 10-21 contiene una traza de Nyquist común del sistema diseñado. Conforme G_p se perturba hacia $\hat{G}_p(s)$, la traza de Nyquist se desplaza, pero permanece dentro de la región sombreada. El sistema de fase mínima permanece estable siempre y cuando la región sombreada de la traza de Nyquist no incluya el punto -1 + $j0$. Remitiéndonos a la desigualdad (10–8), seleccionamos $1/T($ jo) más grande que $l(j\omega)$, o

$$\left|\frac{1}{T(j\omega)}\right| \geq l(j\omega) \qquad (10\text{–}9)$$

Si la desigualdad (10-9) se satisface, se garantiza que el sistema sea estable. Esto significa que el sistema es estable mientras los errores en el modelado se mantengan abajo de $1/T$ para todas las frecuencias.

Remitiéndonos a las ecuaciones (10–5) y (10–7), tenemos la relación

$$S(j\omega) + T(j\omega) = 1 \qquad (10\text{-}10)$$

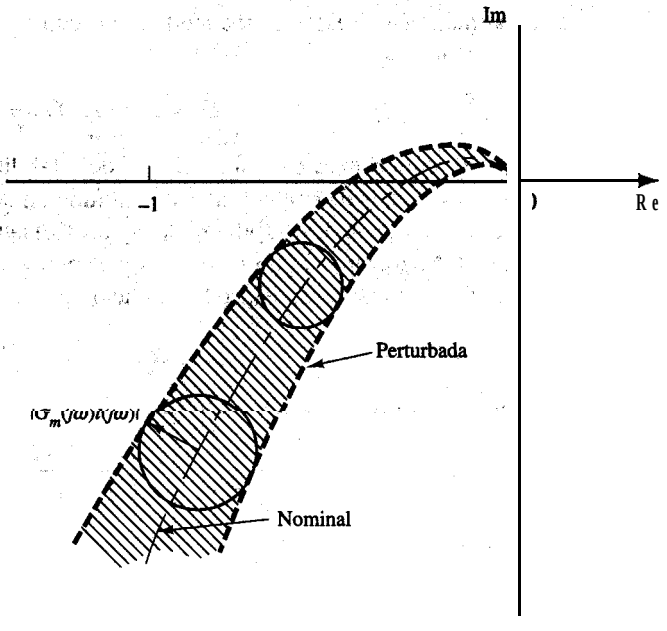


Figura10-21
Trazas de Nyquist nominal y perturbada.

Es decir, la suma de la función de sensibilidad y la función de sensibilidad complementaria siempre es la unidad. Por tanto, es imposible aumentar o disminuir $S(j\omega)$ y $T(j\omega)$ en la misma frecuencia.

Remitiéndonos a la ecuación (10–10), para la región de frecuencias altas, en la que $l(j\omega)$ es mayor que la unidad, tenemos que

$$|T(j\omega)| \leq \frac{1}{l(j\omega)} \tag{10-11}$$

$$|S(j\omega)| = 1 - |T(j\omega)| \geq 1 - \frac{1}{l(j\omega)} \qquad [l(j\omega) > 1]$$

Si $S(j\omega)$ y $T(j\omega)$ satisfacen estas desigualdades, se garantiza la estabilidad del sistema.

Observe que $l(j\omega)$ especifica un limite superior en la magnitud de $T(j\omega)$. Dado que

$$T(j\omega) = \frac{G_{c1}(j\omega)G_p(j\omega)}{1 + G_{c1}(j\omega)G_p(j\omega)} ,$$

y que $|G_{c1}(j\omega)G_p(j\omega)| \ll 1$ para frecuencias altas, $T(j\omega)$ tiende a $G_{c1}(j\omega)G_p(j\omega)$ conforme ω tiende a infinito. Por tanto, para este rango de frecuencias altas

$$|G_{c1}(j\omega)G_p(j\omega)| < \frac{1}{l(j\omega)}$$

lo cual significa que los errores en el modelado especifica un límite superior en la ganancia del lazo.

e. El ***efecto de ruido en el sensor*** se determina mediante la función de transferencia G_{yn}. Observe que el negativo de esta función de transferencia es igual a la función de sensibilidad complementaria *T*. Por tanto, si $T(j\omega)$ disminuye, el efecto del ruido en el sensor en el desempeño del sistema disminuye también.

Resumen. A partir del análisis anterior, tenemos las conclusiones siguientes:

1. Para mejorar el rechazo a perturbaciones, se debe reducir $S(j\omega)$.
2. Para disminuir la sensibilidad a los errores en el modelado, se debe reducir $S(j\omega)$.
3. Para mejorar el margen de estabilidad, se debe reducir $T(j\omega)$.
4. Para disminuir la sensibilidad al ruido en el sensor, se debe reducir $T(j\omega)$.

Tome en cuenta que $S(j\omega) + T(j\omega) = 1$.

Es interesante observar que, aunque el desempeño del seguimiento depende de G_{c1} y G_{c2}, el rechazo a perturbaciones, la sensibilidad a los errores en el modelado, el margen de estabilidad y la sensibilidad al ruido en el sensor sólo dependen de G_{c1}. Esto significa que G_{c1} determina la característica del lazo de realimentación y que G_{c2} afecta la función de transferencia en lazo cerrado entre la entrada de referencia y la salida del sistema.

Al diseñar sistemas de control PID con dos grados de libertad (o al ajustar las acciones P, 1 y D de los sistemas de control PID con dos grados de libertad), primero debemos mejorar las características de realimentación con G_{c1} y después mejorar las características en lazo cerrado entre la entrada de referencia y la salida del sistema. Una ventaja de un sistema de control con dos grados de libertad es que las características de realimentación y las características en lazo cerrado se ajustan sin depender unas de otras.

El análisis completo en esta sección se hizo usando el sistema de control con dos grados de libertad de la figura 10-20. Por supuesto, el análisis completo se aplica a los sistemas de control de un'grado de libertad suponiendo que G_{c2} es cero.

Requerimientos sobre el diseño robusto en términos de las trazas de Bode. Es posible colocar sobre las trazas de Bode las condiciones de la función de transferencia en lazo abierto para satisfacer las condiciones impuestas sobre la sensibilidad, los errores en estado estable y el ruido en el sensor.

El requerimiento sobre una $S(j\omega)$ pequeña en la región de frecuencias bajas especifica el límite mínimo para una ganancia de frecuencia baja, y el requerimiento sobre la sensibilidad baja del ruido en el sensor [que $T(j\omega)$ sea pequeña] establece un límite superior en la ganancia de frecuencia alta. La figura 10-22 muestra unas trazas de Bode aceptables de la función de transferencia en lazo abierto. La frecuencia de cruce de ganancia debe ubicarse cerca del ancho de banda requerido y la pendiente de la curva de magnitud en la frecuencia de cruce de ganancia debe ser de -20 dB/década.

Comentarios finales. Las ideas para evaluar el desempeño de un sistema de control con base& la función de sensibilidad $S(j\omega)$ y en la función de sensibilidad complementaria $T(j\omega)$ se desarrollaron durante la década de los años setenta y finales de los ochenta. Tales descubrimientos aportaron un nuevo aspecto a los viejos métodos de respuesta en frecuencia. Los avances recientes en el control H infinito, el control robusto y los temas afines, se basan, en parte, en el enfoque de respuesta en frecuencia.

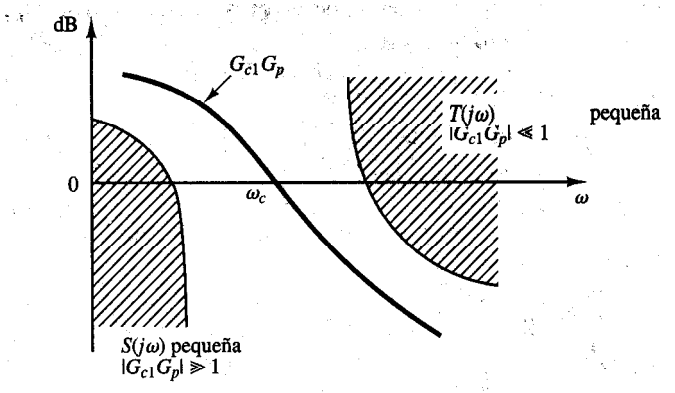


Figura10-22
Requerimientos sobre el diseño robusto en las trazas de Bode.

EJEMPLO DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

A-lo-l. Describa brevemente las características dinámicas del controlador PI, del controlador PD y del controlador PID.

Solución. El controlador PI se caracteriza por la función de transferencia

$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

El controlador PI es un compensador de atraso.Tiene un cero en $s = -1/T_i$ y un polo en $s = 0$. Por tanto, la característica del controlador PI es de ganancia infinita a una frecuencia cero. Esto mejora las características en estado estable. Sin embargo, la inclusión de la acción de control PI en el sistema incrementa en 1 el tipo del sistema compensado, y esto provoca que el sistema compensado sea menos estable o, incluso, que se vuelva inestable. Por tanto, deben elegirse con cuidado los valores de K_p y T_i para asegurar una respuesta transitoria adecuada. Si el controlador PI se diseña adecuadamente, es posible hacer que la respuesta transitoria para una entrada es-

calón no exhiba ningún sobrepaso o presente uno relativamente pequeño. Sin embargo, la velocidad de respuesta se hace mucho más lenta. Esto se debe a que el controlador PI, puesto que es un filtro paso-bajas, atenúa los componentes de frecuencia alta de la señal.

El controlador PD es una versión simplificada del compensador de adelanto; tiene la función de transferencia G,(s), en la que

$$G_c(s) = K_p(1 + T_d s)$$

Por lo general, el valor de K_p se determina para satisfacer el requerimiento en estado estable. La frecuencia de esquina $1/T_d$ se escoge de modo que el adelanto de fase ocurra en la cercanía de la frecuencia de cruce de ganancia. Aunque el margen de fase puede aumentar, la magnitud del compensador sigue incrementándose para la región de frecuencia $1/T_d < \omega$. (Por tanto, el controlador PD es un filtro paso-altas.) Tal incremento continuo de la magnitud es inconveniente, dado que amplifica el ruido de alta frecuencia que puede estar presente en el sistema. En este caso, se prefiere una compensación de adelanto a un control PD. La compensación de adelanto ofrece un adelanto de fase suficiente, en tanto que el incremento de la magnitud para la región de frecuencia alta es mucho más pequeño que aquél para el control PD.

Debido a que la función de transferencia del controlador PD contiene un cero pero ningún polo, no es posible realizarla eléctricamente sólo mediante elementos *RLC* pasivos. Puede realizarse un controlador PD que use amplificadores operacionales, resistores y capacitores, pero, debido a que el controlador PD es un filtro paso-altas, como se mencionó antes, el proceso de diferenciación implícito puede provocar serios problemas de ruido en algunos casos Sin embargo, no hay problema si el controlador PD se realiza usando los elementos hidráulicos o neumáticos

El control PD, como en el caso del compensador de adelanto, mejora las características de respuesta transitoria, mejora la estabilidad del sistema e incrementa el ancho de banda del sistema, cosa que implica un tiempo corto de levantamiento.

El controlador PID es una combinación de los controladores PI y PD. Es un compensador de atraso-adelanto. Observe que la acción de control PI y la acción de control PD ocurren en regiones de frecuencia diferentes: la acción de control PI ocurre en la región de frecuencia baja y la acción de control PD ocurre en la región de frecuencia alta. El control PID se usa cuando el sistema requiere de una mejora tanto en el desempeño transitorio como en el desempeño en estado estable.

A-10-2. Grafique las trazas de Bode de un controlador PID obtenido mediante

$$G_c(s) = 2.2 + \frac{2}{s} + 0.2s$$

Solución. La función de transferencia del controlador G,(s) se escribe como

$$G_c(s) = 2\,\frac{(0.1s + 1)(s + 1)}{s}$$

La figura 10-23 muestra las trazas de Bode del controlador PID especificado.

A-10-3, Demuestre que la función de transferencia $U(s)/E(s)$ del controlador PID de la figura 10-24 es

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_0\,\frac{T_1 + T_2}{T_1}\left[1 + \frac{1}{(T_1 + T_2)s} + \frac{T_1 T_2 s}{T_1 + T_2}\right]$$

Suponga que la ganancia K es muy grande en comparación con la unidad, o sea, que $K \gg 1$.

Solución.

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K}{1 + K\left(\frac{1}{K_0}\,\frac{T_1 s}{1 + T_1 s}\,\frac{1}{1 + T_2 s}\right)}$$

$$\doteq \frac{K}{K\left(\frac{1}{K_0}\,\frac{T_1 s}{1 + T_1 s}\,\frac{1}{1 + T_2 s}\right)}$$

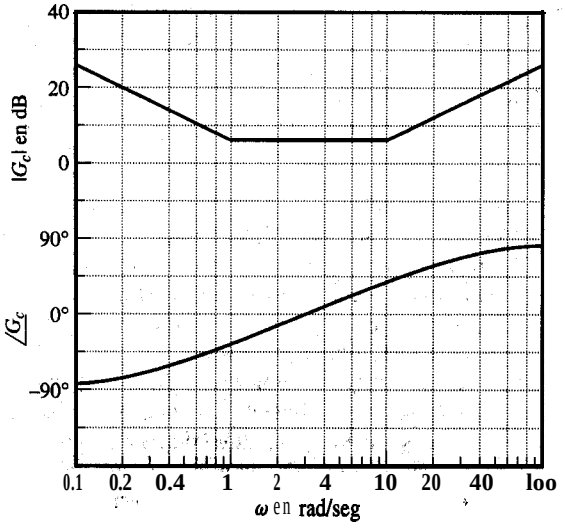


Figura10-23
Trazas de Bode del controlador PID obtenido mediante $G_c(s) = 2(0.1s + 1)(s + 1)/s$.

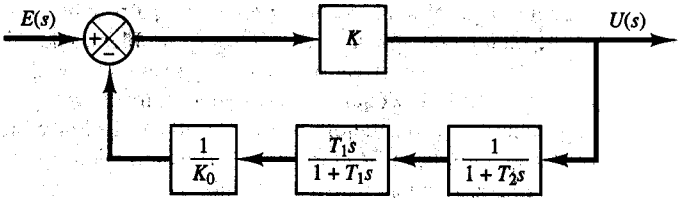


Figura10-24
Controlador PID.

$$= \frac{K_0(1 + T_1s)(1 + T_2s)}{T_1s}$$

$$= K_0\left(1 + \frac{1}{T_1s}\right)(1 + T_2s)$$

$$= K_0\left(1 + \frac{1}{T_1s} + T_2s + \frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$= K_0\frac{T_1 + T_2}{T_1}\left[1 + \frac{1}{(T_1 + T_2)s} + \frac{T_1T_2s}{T_1 + T_2}\right]$$

A-10-4. Considere el circuito electrónico con dos amplificadores **operacionales** que aparecen en la figura **10–25.** Se **trata** de un controlador PID modificado, en el cual la función de transferencia contiene **ún integrador y** un término de retraso de primer orden. Obtenga la **función de transferencia** de este controlador PID.

Solución. **Dado** que

$$Z_1 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + C_1s} + R_3 = \frac{R_1 + R_3 + R_1R_3C_1s}{1 + R_1C_1s}$$

Y

$$Z_2 = R_2 + \frac{1}{C_2s}$$

tenemos que

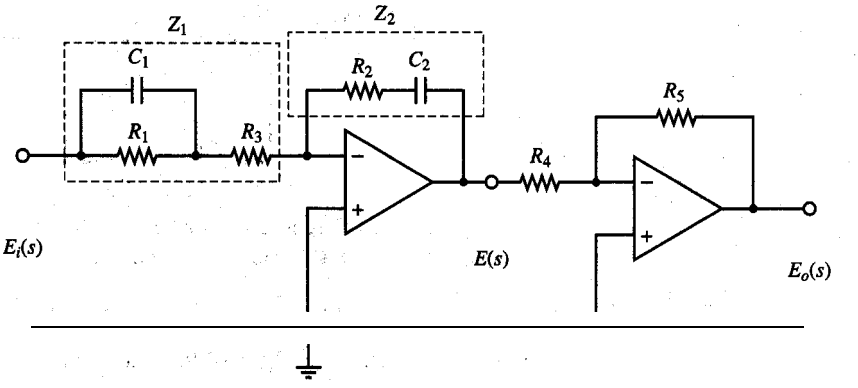


Figura1045
Controlador PID modificado;

$$\frac{E(s)}{\&(s)} = \frac{Z_{2z}}{Z_1} = \frac{(R_2C_2 + 1)(R_1C_1s + 1)}{C_2s(R_1 + R_3 + R_1R_3C_1s)}$$

Asimismo,

$$\frac{E_o(s)}{E(s)} = -\frac{R_5}{R_4}$$

En consecuencia,

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{E_o(s)}{E(s)}\frac{E(s)}{E_i(s)} = \frac{R_5}{R_4(R_1 + R_3)C_2}\frac{(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1)}{s\left(\frac{R_1R_3}{R_1 + R_3}C_1s + 1\right)}$$

$$= \frac{R_5R_2}{R_4R_3}\frac{\left(s + \frac{1}{R_1C_1}\right)\left(s + \frac{1}{R_2C_2}\right)}{s\left(s + \frac{R_1 + R_3}{R_1R_3C_1}\right)}$$

Observe que R_1C_1 y R_2C_2 determinan las **ubicaciones** de los ceros del controlador, en tanto que R_3 afecta la ubicación del polo en el eje real negativo. R_5/R_4 ajusta la ganancia del controlador.

A-10-5. En la práctica, es imposible realizar el verdadero **diferenciador.** Por tanto, es necesario aproximar el **diferenciador** verdadero T_ds mediante algo parecido a

$$\frac{T_ds}{1 + \gamma T_ds}$$

Una forma de realizar un **diferenciador** aproximado es utilizar un integrador en la trayectoria de **realimentación. Demuestre** que la **función de** transferencia en lazo cerrado del sistema de la figura 10-26 se obtiene mediante la expresión anterior. (En los diferenciadores que se obtienen comercialmente, el valor de γ se establece como 0.1).

Solución. La **función** de **transferencia** en **lazo cerrado** del sistema de la figura 10-26 es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{1}{\gamma}\frac{T_ds}{}}{1 + \frac{1}{\gamma T_ds}} = 1 + \gamma T_ds$$

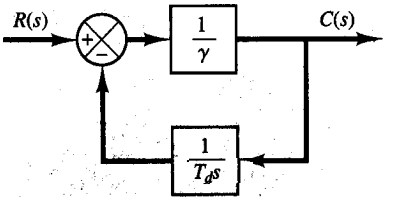


Figura 10–26
Diferenciador aproximado.

Observe que semejante diferenciador con un retraso de primer orden reduce el ancho de banda del sistema de control en lazo cerrado y reduce el efecto nocivo de las señales de ruido.

A-10-6. Considere el sistema de la figura 10-27. Se trata de un control PID de una planta de segundo orden $G(s)$. Suponga que las perturbaciones $D(s)$ entran al sistema como se aprecia en el diagrama. Suponga también que la entrada de referencia R(s) normalmente se mantiene constante y que las características de respuesta a las perturbaciones son una consideración muy importante en este sistema.

Diseñe un sistema de control tal que la respuesta ante cualquier perturbación escalón se amortigüe con rapidez (en 2 a 3 seg en términos del tiempo de asentamiento de 2%). Elija la configuración de los polos en lazo cerrado tal que exista un par de polos dominantes en lazo cerrado. A continuación obtenga la respuesta para la entrada de perturbación escalón imitario. También obtenga la respuesta para la entrada de referencia escalón unitario.

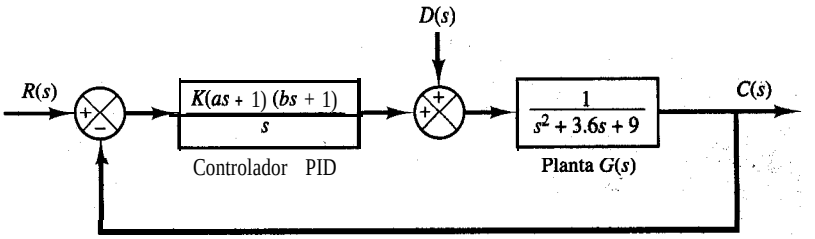


Figura 10–27
Sistema con un control PID.

Solución. El controlador PID tiene la función de transferencia

$$G_c(s) = \frac{K(as + 1)(bs + 1)}{s}$$

Para la entrada de perturbación, en ausencia de la entrada de referencia, la función de transferencia en lazo cerrado se vuelve

$$\frac{C_d(s)}{U_d(s)} = \frac{s}{s(s^2 + 3.6s + 9) + K(as + 1)(bs + 1)}$$

$$= \frac{s}{s^3 + (3.6 + Kab)s^2 + (9 + Ka + Kb)s + K} \qquad (10\text{-}12)$$

La especificación requiere que la respuesta a la perturbación escalón unitario sea tal que el tiempo de asentamiento sea de 2 a 3 segundos y que el sistema tenga un amortiguamiento razonable. Podemos interpretar la especificación como $\zeta = 0.5$ y $\omega_n = 4$ rad/seg para los polos dominantes en lazo cerrado. Elegimos el tercer polo en $s = -10$, a fin de que el efecto de este polo real sobre la respuesta sea pequeño. A continuación, la ecuación característica deseada se escribe como

$$(s + 10)(s^2 + 2 \times 0.5 \times 4s + 4^2) = (s + 10)(s^2 + 4s + 16) = s^3 + 14s^2 + 56s + 160$$

La ecuación característica para el sistema obtenido mediante la ecuación (10-12) es

$$s^3 + (3.6 + Kab)s^2 + (9 + Ka + Kb)s + K = 0$$

Por tanto, requerimos que

$$3.6 + Kab = 14$$

$$9 + Ka + Kb = 56$$

$$K = 160$$

10 cual produce

$$ab = 0.065, \qquad a + b = 0.29375$$

Ahora, el controlador PID se convierte en

$$G_c(s) = \frac{K[abs^2 + (a + b)s + 1]}{s}$$

$$= \frac{160(0.065s^2 + 0.29375s + 1)}{s}$$

$$= \frac{10.4(s^2 + 4.5192s + 15.385)}{s}$$

Con este controlador PID, la respuesta a la perturbación se obtiene mediante

$$C_d(s) = \frac{s}{s^3 + 14s^2 + 56s + 160} U_d(s)$$

$$= \frac{s}{(s + 10)(s^2 + 4s + 16)} U_d(s)$$

Es evidente que, para una entrada de perturbación escalón unitario, la salida en estado estable es cero, dado que

$$\lim_{t \to \infty} c_d(t) = \lim_{s \to 0} sC_d(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s^2}{(s + 10)(s^2 + 4s + 16)} \frac{1}{s} = 0$$

La respuesta a una entrada de perturbación escalón **unitario** se obtiene fácilmente con MATLAB. El programa MATLAB **10-2** produce la curva de respuesta que aparece en la figura **10-28(a).** A partir de la curva de respuesta, vemos que el tiempo de asentamiento es de aproximadamente 2.7 seg. La respuesta se amortigua con rapidez. Por **tanto, el** sistema diseñado aquí es aceptable.

Programa MATLAB 10-2

```
% ***** Respuesta para una entrada de perturbación escalón unitario *****

numd = [0   0   1   0];
dend = [1   14   56   160];
t = 0:0.01:5;
[c1,x1,t] = step(numd,dend,t);
plot(t,c1)
grid
title('Respuesta para una entrada de perturbación escalón unitario')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salida para la entrada de perturbación')

% ***** Respuesta para una entrada de referencia escalón unitario *****

numr = [0   10.4   47   160];
denr = [1   14   56   160];
[c2,x2,t] = step(numr,denr,t);
plot(t,c2)
grid
title('Respuesta para una entrada de referencia escalón unitario')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salida para la entrada de referencia')
```

Para la entrada de referencia r(t), la función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C,(s)}{R(s)} = \frac{10.4(s^2 + 4.5192s + 15.385)}{s^3 + 14s^2 + 56s + 160}$$

$$= \frac{10.4s^2 + 47s + 160}{s^3 + 14s^2 + 56s + 160}$$

La respuesta para una entrada de referencia escalón unitario también se obtiene mediante el programa MATLAB 10-2. La curva de respuesta resultante se presenta en la figura 10–28(b). La

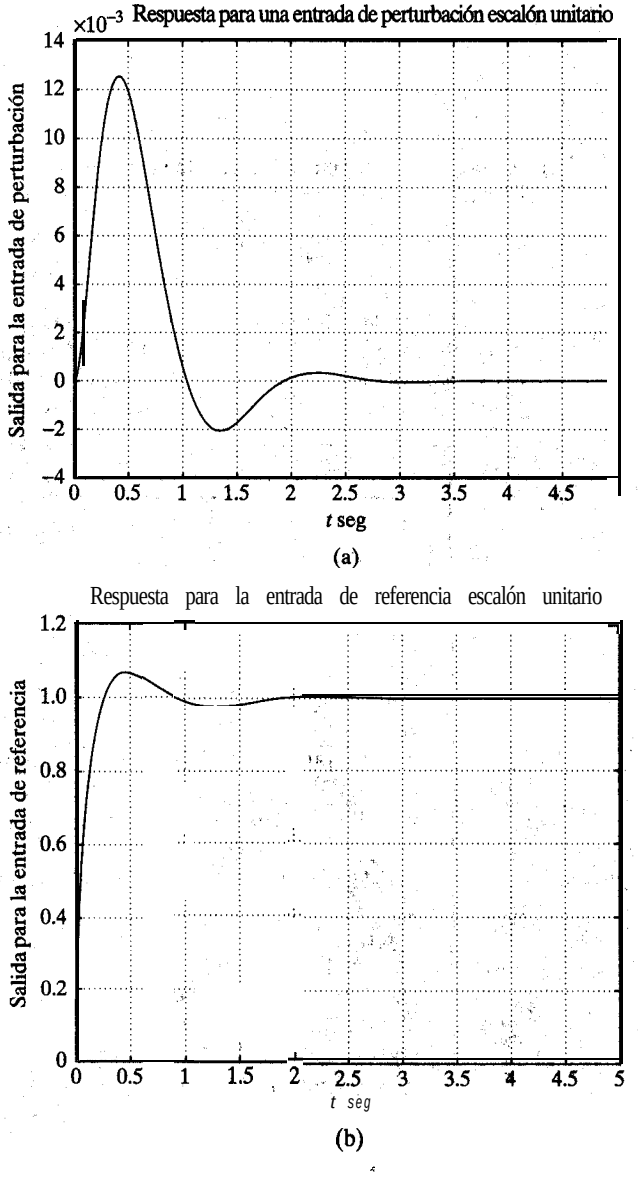
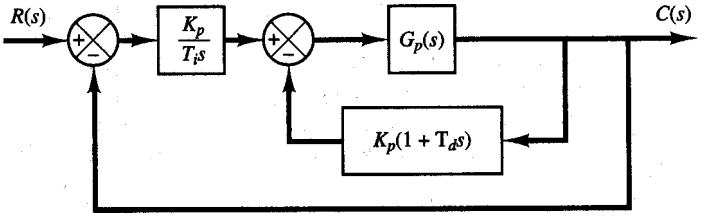


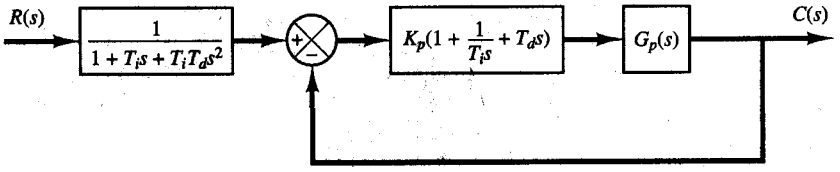
Figura10-28
(a) Respuesta para una entrada de perturbación escalón unitario; (b) respuesta para una entrada de referencia escalón unitario.

curva de respuesta muestra que el sobrepaso **máximo** es de 7.3% y que el tiempo de asentamiento es de 1.2 seg. El sistema tiene características de respuesta muy aceptables.

A-10-7. Demuestre que el sistema con un controlador I-PD de la figura **10–29(a)** es equivalente al sistema con un controlador PID con filtro de entrada que aparece en la figura **10–29(b).**



(a)



(b)

Figura 10–29
(a) Sistema con un controlador I-PD; (b) sistema con un controlador PID con filtro de entrada.

Solución. La función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$ del sistema con un controlador I-PD es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_p}{T_i s} G_p(s)}{1 + K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) G_p(s)}$$

La función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$ del sistema con un controlador PID con filtro de entrada que aparece en la figura **10–29(b)** es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) G_p(s)}{1 + T_i s + T_i T_d s^2 \quad 1 + K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) G_p(s)}$$

$$= \frac{\frac{K_p}{T_i s} G_p(s)}{1 + K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) G_p(s)}$$

Las funciones de transferencia en lazo cerrado de ambos sistemas son iguales. Por tanto, los dos sistemas son equivalentes.

A-10-8. La idea básica del control I-PD es evitar las señales de control grandes (que provocan fenómenos de saturación) dentro del sistema, Si se llevan las acciones de control proporcional y derivativa a la trayectoria de realimentación, es posible elegir valores más grandes para K_p y T_d que los posibles mediante el esquema de control PID.

Compare cualitativamente las respuestas del sistema con un controlador PID y del sistema con un controlador I-PD ante la entrada de perturbación y la entrada de referencia.

Solución. Considere primero la respuesta del sistema con un controlador I-PD ante la entrada de perturbación. Dado que en el control I-PD de una planta es posible seleccionar valores más grandes para K_p y T_d que aquéllos para el controlador PID, el sistema con un controlador I-PD atenuará el efecto de la perturbación más rápido que en el caso del controlador PID.

A continuación, considere la respuesta del sistema con un controlador I-PD ante una entrada de referencia. Dado que el sistema con el controlador I-PD es equivalente al sistema con el controlador PID con filtro de entrada (consulte el problema A-lo-?), el sistema con el controlador PID tendrá respuestas más rápidas que el sistema con el controlador I-PD correspondiente, siempre y cuando en el sistema con el controlador PID no ocurra un fenómeno de saturación.

A-10-9. En algunos casos, es conveniente proporcionar un filtro de entrada como el de la figura 10–30(a). Observe que el filtro de entrada $G_f(s)$ está fuera del lazo. Por tanto, no afecta la estabilidad de la porción del sistema en lazo cerrado. Una ventaja del filtro de entrada es que se modifican (se cancelan o se sustituyen por otros) los ceros de la función de transferencia en lazo cerrado a fin de que la respuesta en lazo cerrado sea aceptable.

Demuestre que la configuración de la figura 10–30(a) se convierte en la que aparece en la figura 10–30(b), en la que Gd(S) = $[G_f(s) - 1]$ G,(s).

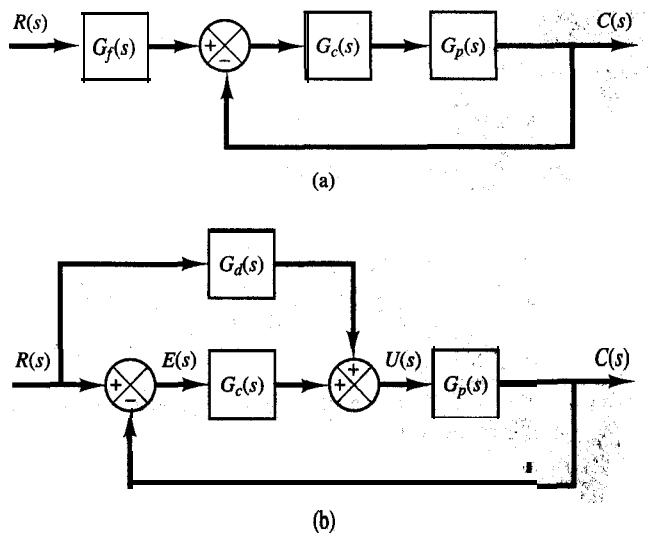


Figura 10–30
(a) Diagrama de bloques de un sistema de control con filtro de entrada; (b) diagrama de bloques modificado.

Solución. Para el sistema de la figura 10–30(a), tenemos que

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_f(s)\frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} \tag{10–13}$$

Para el sistema de la figura 10–30(b), tenemos que

$$U(s) = G_d(s)R(s) + G_c(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$C(s) = G_p(s)U(s)$$

Por tanto

$$C(s) = G_p(s)\{G_d(s)R(s) + G_c(s)[R(s) - C(s)]\}$$

0 bien

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{[G_d(s) + G_c(s)]G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} \qquad (10\text{-}14)$$

Sustituyendo $G_d(s) = [G_f(s) - 1]G_c(s)$ en la ecuación (10–14), obtenemos

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{[G_f(s)G_c(s) - G_c(s) + G_c(s)]G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}$$

$$= G_f(s)\frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}$$

que es igual a la ecuación (10-13). Por tanto, hemos demostrado que los sistemas de las figuras 10–30(a) y (b) son equivalentes.

Observe que el sistema de la figura 10–30(b) tiene un control prealimentado $G_d(s)$. Así, $G_d(s)$ no afecta la estabilidad de la parte del sistema con lazo cerrado.

A-10-10. Un sistema en lazo cerrado tiene la caracterfstica de que la función de transferencia en lazo cerrado es casi igual a la inversa de la función de transferencia de realimentación cada vez que la ganancia en lazo abierto es mucho más grande que la unidad.

La característica en lazo abierta se modifica agregando un lazo de realimentación interno con una caracterfstica igual a la inversa de la característica deseada en lazo abierto. Suponga que un sistema de realimentación unitaria tiene la función de transferencia en lazo abierto

$$G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

Determine la función de transferencia $H(s)$ del elemento en el lazo de realimentación interno tal que el lazo interior ya no sea efectivo en frecuencias bajas y altas.

Solución. La figura 10–31(a) muestra el sistema original. La figura 10–31(b) contiene la adición del lazo de realimentación interna alrededor de G(s). Dado que

$$\frac{C(s)}{E(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{H(s)}\frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

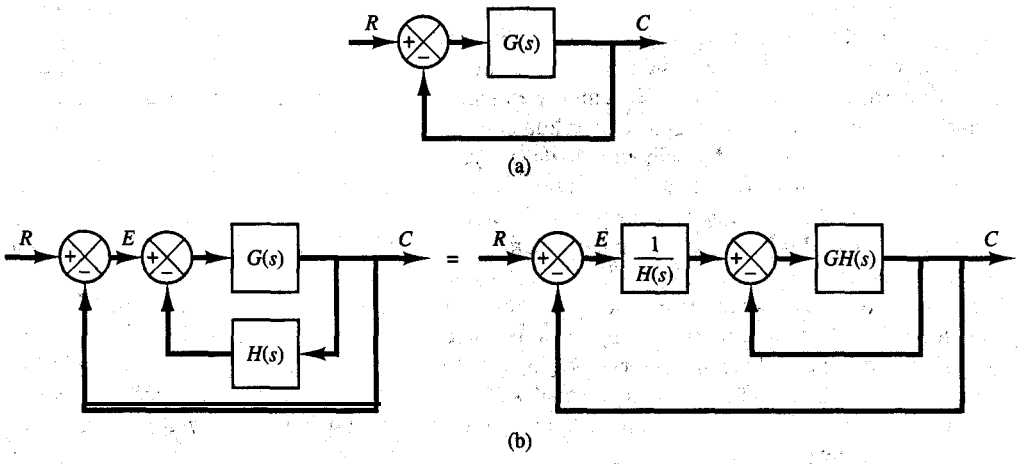


Figura 10–31
(a) Sistema de control; (b) adición del lazo de realimentación interna para modificar la caracterfstica de lazo cerrado.

si la ganancia alrededor del laxo interno es grande en comparación con la unidad, entonces $G(s)H(s)/[1 + G(s)H(s)]$ es aproximadamente igual a la unidad y la función de transferencia $C(s)/E(s)$ es aproximadamente igual a $1/H(s)$.

Por otra parte, si la ganancia $|G(s)H(s)|$ es mucho menor que la unidad, el laxo interior pierde su efectividad y $C(s)/E(s)$ se vuelve aproximadamente igual a G(s).

Para que el laxo interior pierda su efectividad en rangos de frecuencias bajas y altas, requerimos que

$$|G(j\omega)H(j\omega)| \ll 1, \qquad \text{para } \omega \ll 1 \text{ y } \omega \gg 1$$

Dado que en este problema

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}$$

el requerimiento se satisface si $H(s)$ se selecciona como

$$H(s) = ks$$

porque

$$\lim_{\omega \to 0} G(j\omega)H(j\omega) = \lim_{\omega \to 0} \frac{Kkj\omega}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)} = 0$$

$$\lim_{\omega \to \infty} G(j\omega)H(j\omega) = \lim_{\omega \to \infty} \frac{Kkjw}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)} = 0$$

Así, con $H(s) = ks$ (realimentación de velocidad), el laxo interior pierde su efectividad en las regiones de frecuencias bajas y altas. Se vuelve efectivo sólo en la región de frecuencias medias.

A-10-11. Si las perturbaciones son medibles, el control prealimentado de la perturbación es un método útil para cancelar los efectos sobre la salida del sistema. Por control realimentado de la perturbación nos referimos al control de los efectos indeseables de las perturbaciones medibles, compensándolos en forma aproximada antes de que se realicen. Esto es una ventaja pues, en un sistema de control con realimentación normal, la acción correctiva empieza sólo después de que se ha afectado la salida.

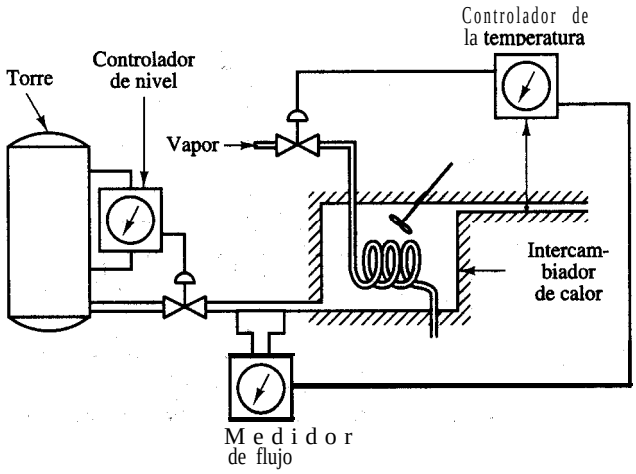
Considere el sistema de control de temperatura de la figura 10–32(a). En este sistema, se desea mantener la temperatura de salida en cierto valor constante. La perturbación en este sistema es la razón de cambio en el flujo de entrada, que depende del nivel de la torre. El efecto de la razón de cambio no se percibe de inmediato en la salida, debido a los retrasos de tiempo que contiene el sistema.

El controlador de temperatura, que controla la entrada de calor hacia el intercambiador de calor, no funcionará hasta que ocurra un error. Si el sistema contiene retrasos de tiempo grandes, transcurrirá cierto tiempo antes de que ocurra cualquier acción correctiva. De hecho, cuando el error ocurre, con cierto retardo de tiempo y empieza la acción correctiva, puede ser demasiado tarde para mantener la temperatura de salida dentro de los lfmites deseados.

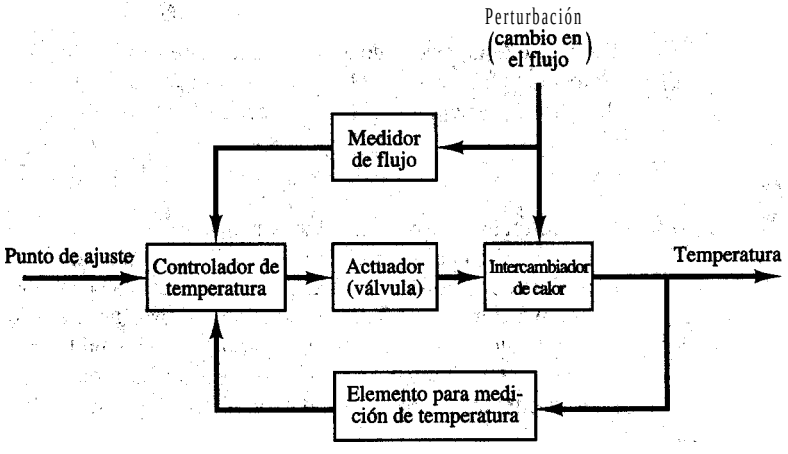
Si se incluye un control prealimentado de la perturbación en un sistema como este, tan pronto como ocurra un cambio en el flujo de entrada se llevará a cabo, al mismo tiempo, una medida correctiva que ajustar& la entrada de calor para el intercambiador de calor. Esto se hace alimentando la señal del medidor de flujo y la señal del elemento de medición de temperatura al controlador de temperatura.

El control prealimentado de la perturbación minimiza el error transitorio, pero, dado que es un control en laxo abierto, existen limitaciones para su precisión funcional. El control prealimentado de' la perturbación no cancelará los efectos de las perturbaciones que no se puedan medir bajo condiciones de operación normales. Por tanto, es necesario que un sistema de control prealimentado de la perturbación incluya un laxo de realimentación, como se aprecia en las figuras 10–32(a) y (b).

En esencia, el control prealimentado de la perturbación minimiza el error transitorio provocado por las perturbaciones que se pueden medir, en tanto que el control realimentado compensa las imperfecciones en la medición del control prealimentado de la perturbación y aporta las correcciones para las perturbaciones que no se pueden medir.



(a)



(b)

Figura 10-32
(a) Sistema de control de temperatura; (b) diagrama de bloques.

Considere el sistema de la figura 10-33. Suponga que se conocen la función de transferencia de la planta $G(s)$ y la función de transferencia de la perturbación $G_n(s)$. Determine una función de transferencia en la trayectoria directa de la perturbación conveniente $G_1(s)$.

Solución. Dado que la salida $C(s)$ se obtiene mediante

$$C(s) = G_c(s)G(s)E(s) + G_n(s)N(s)$$

en donde

$$E(s) = R(s) - C(s) + G_1(s)N(s)$$

obtenemos

$$C(s) = G_c(s)G(s)[R(s) - C(s)] + [G_c(s)G(s)G_1(s) + G_n(s)]N(s) \qquad (10\text{-}15)$$

La ecuación (10-15) proporciona la salida $C(s)$ en términos de [Z?(s) - C(s)] y una perturbación N(s).

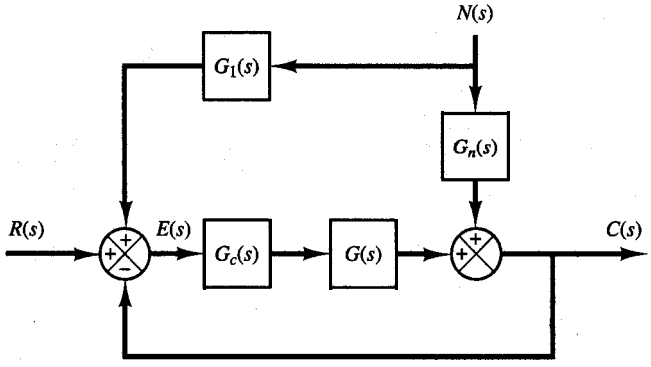


Figura 10–33
Sistema de control.

Dado que esto es cierto en cualquier caso, la función de transferencia del controlador $G_c(s)$ se diseña para satisfacer las especificaciones del sistema requerido en ausencia de perturbaciones. La función de transferencia en la trayectoria directa de la perturbación $G_1(s)$ se determina de modo que se eliminan los efectos de $N(s)$ en la salida C(s). Es decir, hacemos que el termino del coeficiente de $N(s)$ en la ecuación (10-15) sea igual a cero, o

$$G_c(s)G(s)G_1(s) + G_n(s) = 0 \qquad (10\text{-}16)$$

Dado que G,(s) se diseña antes de que se determine $G_1(s)$, G,(s) es una función de transferencia conocida en fa ecuación (10–16). Por tanto, la función de transferencia de perturbación $G_1(s)$ se determina despejando $G_1(s)$ en la ecuación (10–16), o

$$G_1(s) = -\frac{G_n(s)}{G_c(s)G(s)}$$

A-10-12. Cuando una perturbación actúa sobre una planta, es necesario que pase cierto tiempo antes de que se detecte cualquier efecto en la salida. Si medimos la perturbación misma (aunque esto sea imposible o muy difícil), en lugar de la respuesta á la perturbación, podemos efectuar una acción correctiva con mayor rapidez, así como esperar un mejor resultado. La figura 10-34 es un diagrama de bloques que muestra una compensación en la trayectoria directa para la perturbación.

Analice-las limitaciones del esquema realimentado para una perturbación en general. Despues discuta las ventajas y limitaciones del esquema de la figura 10-34.

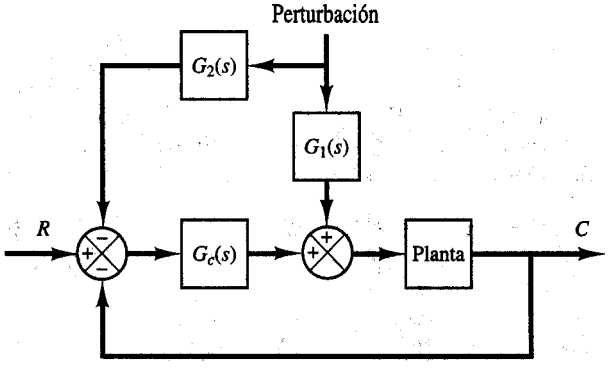


Figura 10–34
Sistema de control con compensación en la trayectoria directa para la perturbación.

Solución. Un esquema prealimentado para la perturbación es un esquema en lazo abierto y depende, por tanto,de la constancia de los valores de los parámetros. Cualquier desviación de estos valores provocará una compensación imperfecta.

En el sistema actual, los esquemas en lazo abierto y en lazo cerrado funcionan en forma simultánea. Los errores grandes producidos por la fuente de perturbación principal se reducen significativamente mediante la compensación en lazo abierto sin requerir una ganancia alta en el

lazo. Los errores más pequeños producidos por otras fuentes de perturbación se atienden mediante el esquema de control en lazo cerrado. Por tanto, los errores provocados por todas las causas se reducen sin requerir una ganancia grande en el lazo. Esto es una ventaja desde el punto de vista de la estabilidad.

Observe que tal esquema no se usa amenos que se pueda medir la perturbación principal misma.

PROBLEMAS

B-lo-l. Considere el controlador PID electrónico de la figura 10–35. Determine los valores de R_1, R_2, R_3, R_4, C_1, y C_2 del controlador, tales que la función de transferencia $G_c(s)$ sea

$$G_c(s) = 39.42\left(1 + \frac{1}{3.077s} + 0.7692s\right)$$

$$= 30.3215\,\frac{(s + 0.65)^2}{s}$$

B-10-2. Considere el controlador PID modificado. de la figura 10–25. Demuestre que su función de transferencia se obtiene mediante

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{1 + as} \qquad (a > 0)$$

Observe que la acción de control derivativo diferencia la señal y amplifica los efectos del ruido. El polo en $s = -1/a$ agregado al término de control derivativo atenúa los cambios rápidos en la salida del diferenciador.

B-10-3. Considere el sistema de control de la figura 10-36. Usando las reglas de sintonización de Ziegler-Nichcils, determine los valores de K_p, T_i y T_d. Se pretende que el sobrepaso máximo en la respuesta escalón unitario sea aproximadamente de 25 %.

Obtenga una gráfica de la respuesta escalón unitario del sistema diseñado con MATLAB. Si el sobrepaso máximo es mayor que 25%, haga ajustes finos de los parámetros K_p, T_i y T_d para obtener un sobrepaso máximo de 25%.

B-10-4.' Considere el sistema de control de la figura 10-37. Usando las reglas de sintonización de Ziegler–Nichols, determine los valores de K_p, T_i y T_d. Obtenga la respuesta escalón unitario del sistema diseñado. Haga ajustes finos de los parámetros K_p, T_i y T_d, a fin de que el sobrepaso máximo en la respuesta escalón unitario sea aproximadamente de 15%.

B-10-5. Considere el sistema de la figura 10–38. Suponga que se introducen al sistema las perturbaciones D(s), como se observa en el diagrama. Determine los parámetros K, a y b, tales que la respuesta para la entrada de perturbación escalón unitario y la respuesta para la entrada de referencia escalón unitario satisfagan las especificaciones siguientes: la respuesta para la entrada de perturbación escalón debe atenuarse rápidamente (2 seg en términos del tiempo de

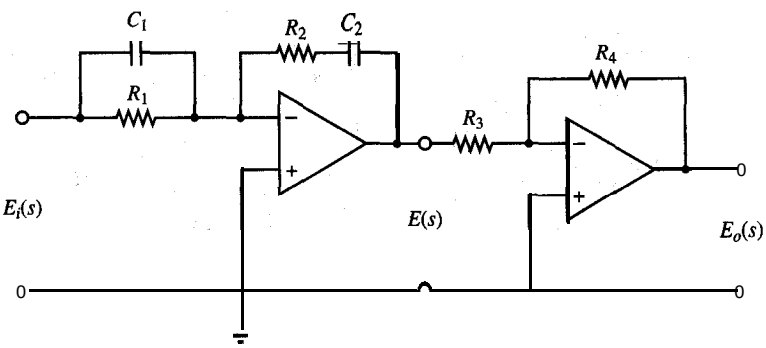


Figura10-35
Controlador PID electrónico.

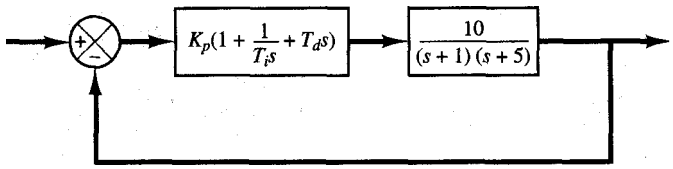


Figura10-36
Sistema con un control PID.

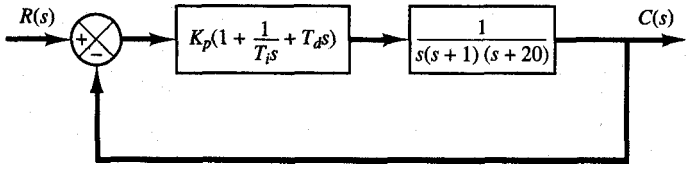


Figura10-37
Sistema con un control PID.

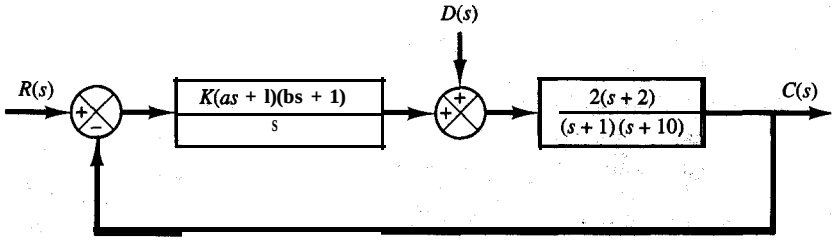


Figura10-38
Sistema de control.

asentamiento de 2%), y la respuesta ante la entrada de referencia escalón debe exhibir un sobrepaso máximo de 20% o menos y un tiempo de asentamiento de 2 seg.

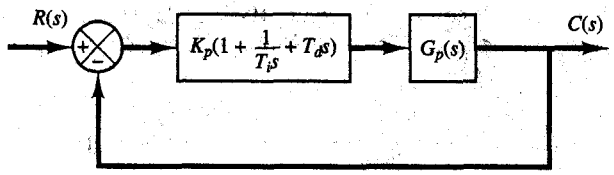
B-10-6. Demuestre que el sistema con un control PID que aparece en la figura 10–39(a) es equivalente al sistema con un control I-PD con control realimentado de la figura 10–39(b).

B-10-7. Considere los sistemas de las figuras 10–40(a) y (b). El primero es el sistema diseñado en el ejemplo 10–1. La respuesta a la entrada de referencia escalón unitario en ausencia de la entrada de perturbación se aprecia en la figura 10-11. El sistema de la figura 10–40(b) es el sistema con un controlador I-PD que usa los mismos K_p, T_i y T_d que el sistema de la figura 10–40(a).

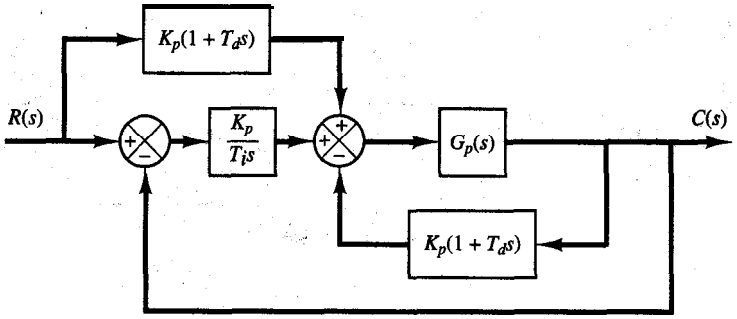
Obtenga con MATLAB la respuesta de un controlador I-PD para la entrada de referencia escalón unitario. Compare las curvas de respuesta escalón unitario de los dos sistemas

B-10-8. Remitiéndonos al problema B-10-7, obtenga la respuesta del sistema con un controlador PID que muestra la figura 10–40(a) para la entrada de perturbación escalón unitario.

Demuestre que las respuestas del sistema con un controlador PID [figura 10–40(a)] y el sistema con un controlador I-PD [figura 10–40(b)] ante la entrada de perturbación

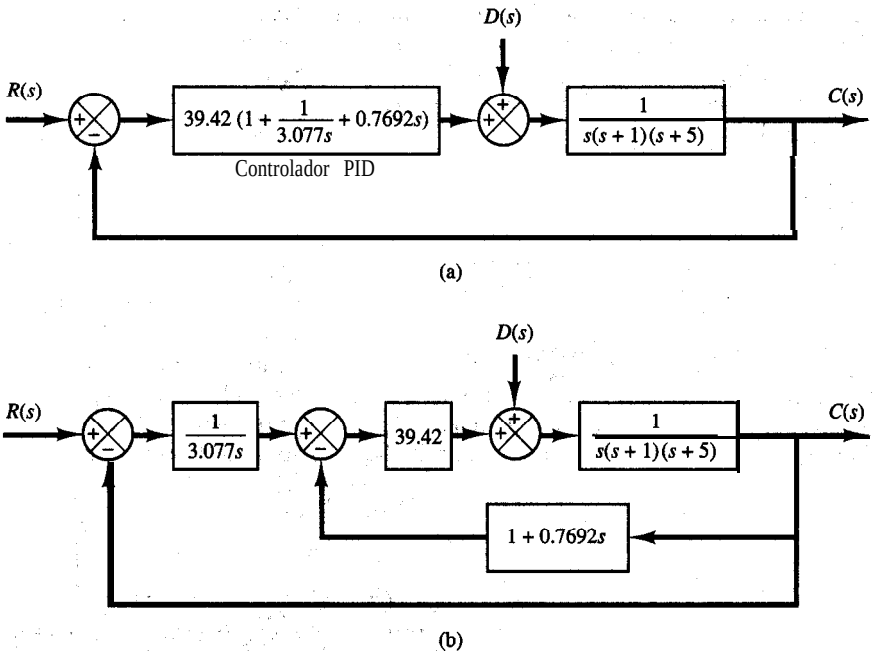


(a)



(b)

Figura10-39
(a) Sistema con un controlador PID; (b) sistema con un controlador I-PD con control prealimentado.



Figural0-
(a) Sistema con un controlador PID; (b) sistema con un controlador I-PD.

son exactamente iguales. [Cuando, considere la respuesta ante la entrada de perturbación $D(s)$, suponga que la entrada de referencia $R(s)$ es cero.]

B-10-9. Considere. el sistema de la figura 10–41. Este sistema está sujeto a tres señales de entrada: la entrada de referencia, la entrada de perturbación y la entrada de ruido, Demuestre que la ecuación característica de este sistema es la misma, sin considerar cuál señal de entrada se elige.

B-10-10. Considere el sistema de la figura 10–42. Demuestre que, eligiendo adecuadamente la función de transferencia $G_f(s)$, la función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$ se vuelve casi unitaria.

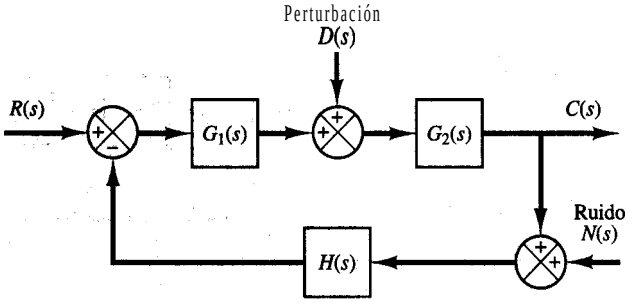


Figura 10–41
Sistema de control.

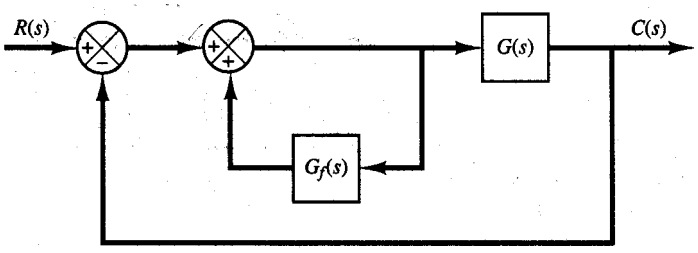


Figura 10–42
Sistema de control.

B-10-11. Considere el sistema de la figura 10–43. Obtenga la función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$ para la entrada de referencia y la función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/D(s)$ ante la entrada de perturbación. Al considerar R(s) como la entrada suponga que $D(s)$ es cero y viceversa.

B-10-12. Considere el sistema de la figura 10–44(a), en el que K es una ganancia ajustable y G(s) y $H(s)$ son componentes fijos. La función de transferencia en lazo cerrado para la perturbación es

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + KG(s)H(s)}$$

Para minimizar el efecto de las perturbaciones, la ganancia ajustable K debe elegirse lo más grande posible.

¿Es esto cierto también para el sistema de la figura 10–44(b)?

B-10-13. Considere el sistema de la figura 10–45. Si puede detectarse la perturbación D, puede pasarse por una función de transferencia G_3 y agregarse a la trayectoria directa entre el amplificador G_1 y la planta G_2, como se observa en la figura 10–45. Para reducir el efecto de esta perturbación D en el error en estado estable, determine una función de transferencia apropiada G_3. ¿Qué limitará el enfoque actual al reducir los efectos de esta perturbación?

B-10-14. La figura 10–46(a) muestra un control I-PD de la velocidad de un sistema del motor de cd. Suponiendo que la entrada de referencia es cero, o $\Omega_r(s) = 0$, obtenga la función de transferencia en lazo cerrado ante la entrada de perturbación $D(s)$, o $\Omega_c(s)/D(s)$. Después demuestre que el diagrama de bloques de la figura 10–44(a) se convierte en el de la figura 10–46(b). Observe que hay una trayectoria de control preali-

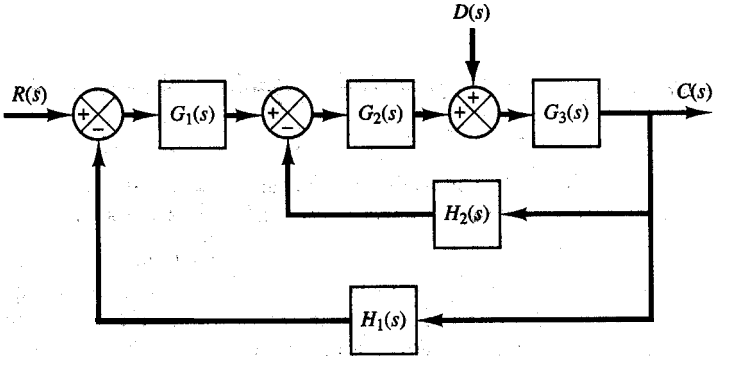


Figura10-43
Sistema de control.

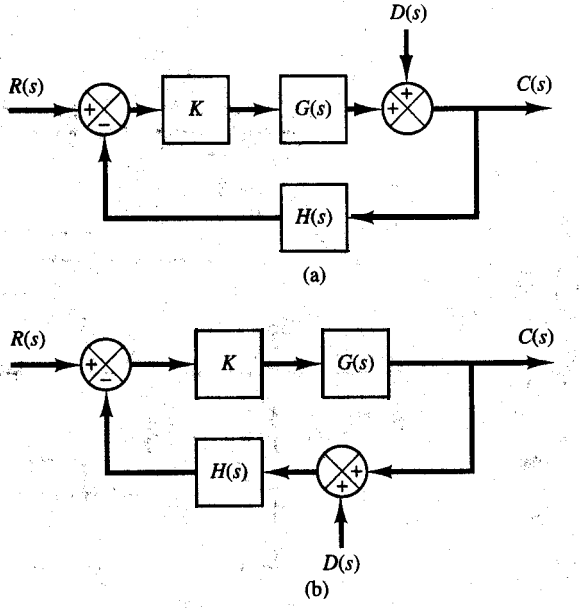


Figura 10–44
(a) Sistema de control con una introducción de perturbación en la trayectoria directa; (b) sistema de control con una introducción de perturbación en la trayectoria de realimentación.

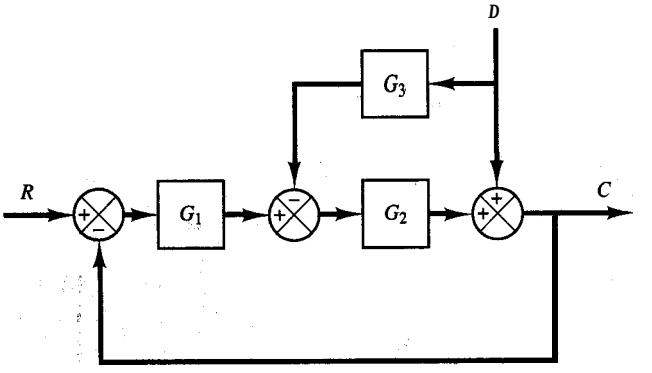
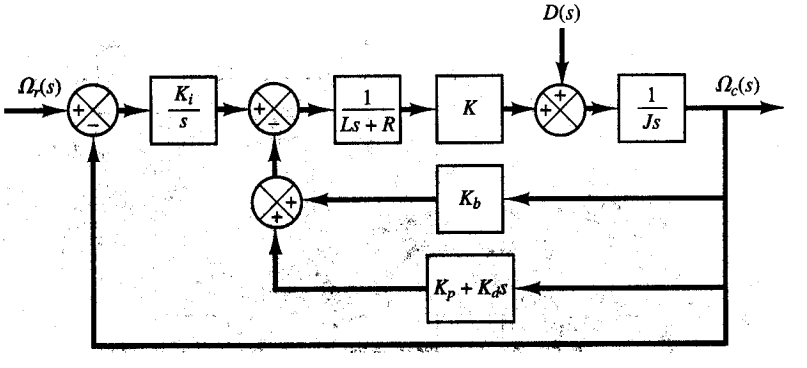
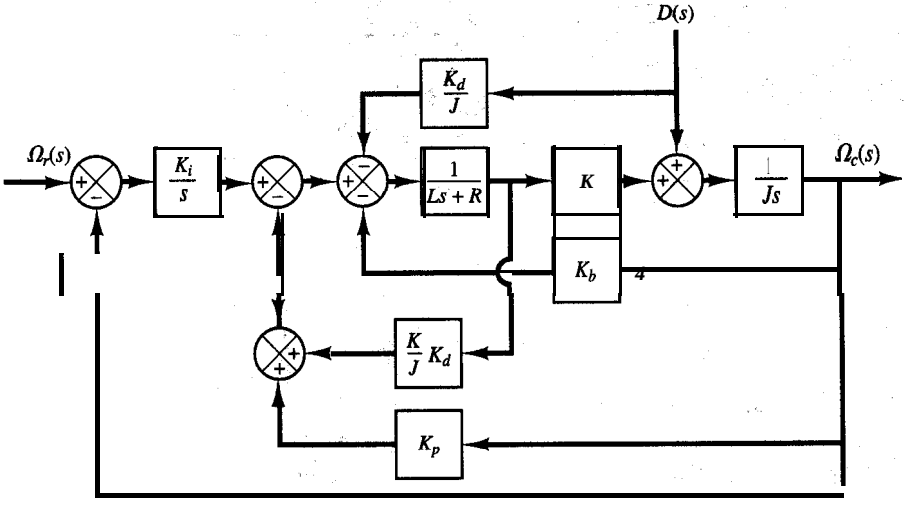


Figura 10–45
Sistema de control.



(a)



(b)

Figura1046
(a) Control I-PD de la velocidad de un sistema del motor de cd; (b) diagrama de bloques modificado.

mentado para la entrada de perturbación D(s). (En el diagrama, K_b es la constante de la fuerza contraelectromotriz.)

B-10-15. Demuestre que los sistemas de control de las figuras 10–47(a), (b) y (c) tienen dos grados de libertad.

B-10-16. Demuestre que el sistema de control de la figura 10–48 es un sistema con tres grados de libertad. Las funciones de transferencia G_{c1}, G_{c2} y G_{c3} son controladores. La planta está formada por las funciones de transferencia G_1 y G_2.

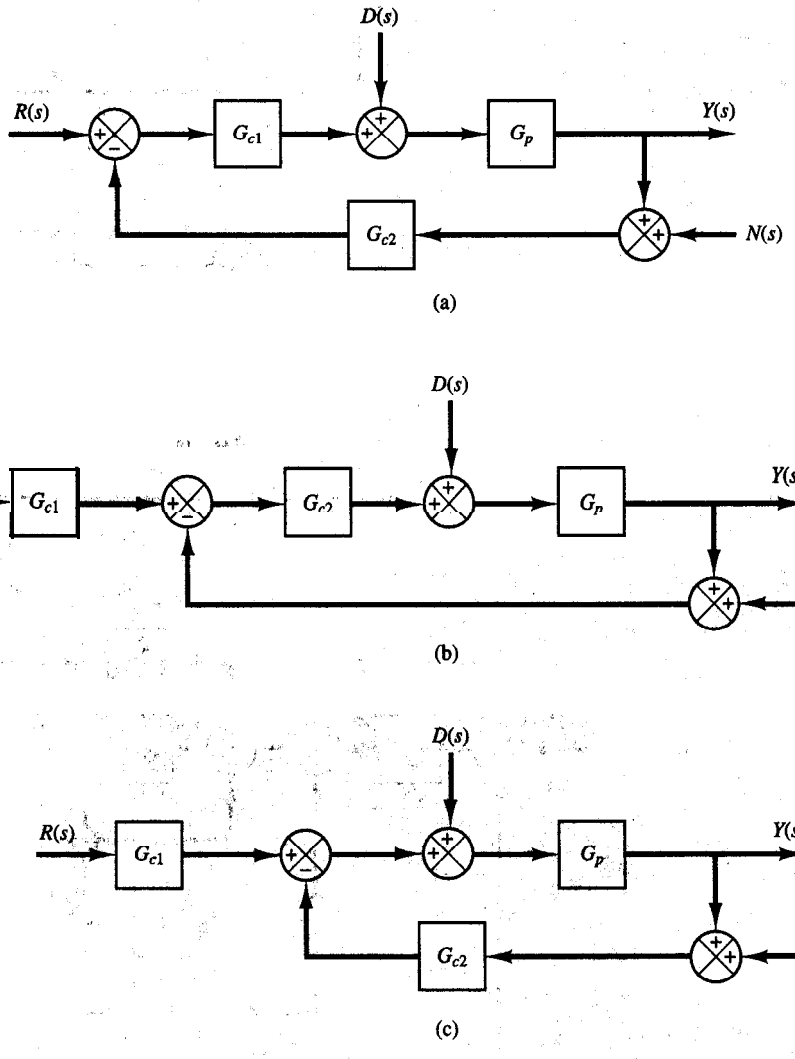


Figura 10-
(a),(b), (c) Sistemas con dos grados de libertad.

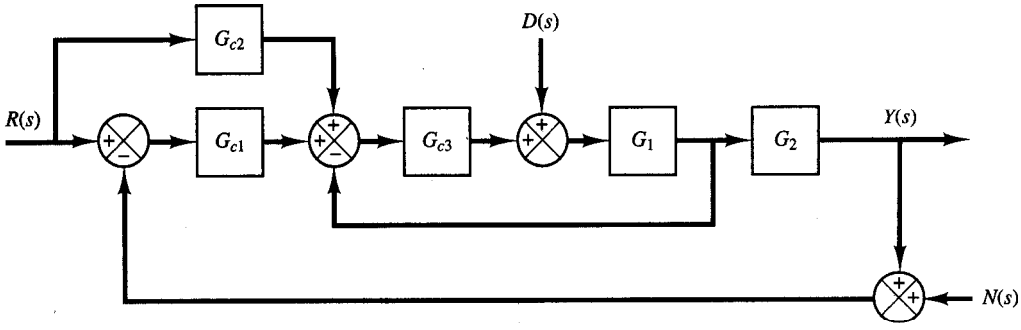


Figura 10–48
Sistema con tres grados de libertad.

11

Análisis de sistemas de control en el espacio de estados

1 l-l INTRODUCCIÓN*

Un sistema moderno complejo posee muchas entradas y muchas salidas que se relacionan entre sí en una forma complicada. Para analizar un sistema de este tipo, es esencial reducir la complejidad de las expresiones matemáticas, además de recurrir a una computadora que realice gran parte de los tediosos cálculos necesarios en el análisis. El enfoque en el espacio de estados para los análisis de sistemas es el más conveniente desde este punto de vista.

En tanto que la teoría de control convencional se basa en la relación entrada-salida, o función de transferencia, la teoría de control moderna se basa en la descripción de las ecuaciones de un sistema en términos de n ecuaciones diferenciales de primer orden, que se combinan en una ecuación diferencial matricial de primer orden. El uso de la notación matricial simplifica enormemente la representación matemática de los sistemas de ecuaciones. El incremento en la cantidad de variables de estado, de entradas o de salidas no aumenta la complejidad de las ecuaciones. De hecho, el análisis de los sistemas complicados con entradas y salidas múltiples se realiza mediante procedimientos sólo ligeramente más complicados que los requeridos para el análisis de sistemas de ecuaciones diferenciales escalares de primer orden.

Este capítulo y los dos siguientes abordan el análisis y el diseño de los sistemas de control en el espacio de estados. El material básico de análisis en el espacio de estados, incluyendo la representación de sistemas en el espacio de estados, la controlabilidad y la

En este libro, un asterisco como superíndice de una matriz, por ejemplo A, indica que se trata de la **transpuesta conjugada** de la matriz A. La transpuesta conjugada es el conjugado de la transpuesta de una matriz. Para una matriz real (aquélla cuyos elementos son todos reales), la transpuesta conjugada A* es igual a la transpuesta $\mathbf{A}^T$.

observabilidad, se presenta en este capítulo. Los métodos básicos de diseño de sistemas de control basados en la realimentación del estado se abordan en el capítulo 12. El capítulo 13 trata el análisis de la estabilidad de Liapunov y el control cuadrático óptimo.

Panorama del capítulo. La sección 11–1 presentó una introducción al análisis en el espacio de estados de los sistemas de control y una vista preliminar de los capítulos restantes del libro. La sección ll-2 aborda la representación en el espacio de estados de los sistemas basados en la función de transferencia. Aquí presentamos diversas formas canónicas de las ecuaciones en el espacio de estados. La sección ll-3 analiza la transformación de modelos de sistemas (por ejemplo, de un modelo basado en la función de transferencia a otro espacio en el espacio de estados y viceversa) con MATLAB. La sección ll-4 presenta la solución de las ecuaciones de estado lineales e invariantes con el tiempo. La sección 11-5 ofrece algunos resultados útiles en el análisis matricial, que además son necesarios para estudiar el análisis en el espacio de estados de los sistemas de control. La sección ll-6 analiza la controlabilidad de los sistemas de control y la sección ll-7 trata la observabilidad de los sistemas de control.

ll-2 REPRESENTACIONES EN EL ESPACIO DE ESTADOS DE LOS SISTEMAS BASADOS EN LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Existen muchas técnicas para obtener representaciones en el espacio de estados de los sistemas basados en la función de transferencia. En el capítulo 3 presentamos algunos métodos. Esta sección aborda las representaciones en el espacio de estados en la forma canónica controlable, observable, diagonal o de Jordan. (Los métodos para obtener representaciones en el espacio de estados de funciones de transferencia se analizan en los problemas A-ll-l al A-11-5.)

Representación en el espacio de estados en formas canónicas. Considere un sistema definido mediante

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u \qquad (11\text{-}1)$$

en donde u es la entrada y y es la salida. Esta ecuación también puede escribirse como

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \qquad (11\text{-}2)$$

A continuación presentaremos representaciones en el espacio de estados del sistema definido mediante las ecuaciones (ll-l) u (11–2), en una forma canónica controlable, en una forma canónica observable y en una forma canónica diagonal (o de Jordan).

Forma canónica controlable. La siguiente representación en el espacio de estados se denomina forma canónica controlable:

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \\ \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} u \qquad (11\text{-}3)$$

$$y = [b_n - a_n b_0 \mid b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \mid \cdots \mid b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \qquad (11\text{–}4)$$

La forma canónica controlable es importante cuando se analiza el enfoque de ubicación de polos para el diseño de sistemas de control. [La obtención de las ecuaciones (11-3) y (114) a partir de la ecuación (ll-l) u (11–2), se presenta en el problema A-ll-l.]

Forma canónica observable. La siguiente representación en el espacio de estados se denomina forma canónica observable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \\ \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u \qquad (11\text{-}5)$$

$$y = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \qquad (11\text{-}6)$$

Observe que la matriz de estado de n X n de la ecuación de estado obtenida mediante la ecuación (11-5) es la transpuesta de la ecuación de estado definida mediante la ecuación (11-3).

Forma canónica diagonal. Considere el sistema representado por la función de transferencia definida mediante la ecuación (11-2). Aquí consideramos el caso en el que el polinomio del denominador sólo contiene raíces distintas, para el cual, la ecuación (11-2) se escribe como:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

$$= b_0 + \frac{c_1}{s + p_1} + \frac{c_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s + p_n} \qquad (11\text{-}7)$$

La forma canónica diagonal de la representación en el espacio de estados de este Sistema se obtiene mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & & 0 \\ & -p_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{11-8}$$

$$\mathbf{Y} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \tag{11-9}$$

Forma canónica de Jordan. A **continuación consideraremos el caso en el que el polinomio** del denominador **de la ecuación (11-2) contiene raíces múltiples, para el cual la** forma canónica diagonal anterior debe modificarse a la forma canónica de Jordan. Suponga, por ejemplo, que todas las p_i, excepto las primeras tres, son diferentes entre sí, o sea, $p_1 = p_2 = p_3$. En este caso, la forma factorizada de $Y(s)/U(s)$ se vuelve

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{(s + p_1)^3 (s + p_4)(s + p_5) \cdots (s + p_n)}$$

La expansión en fracciones parciales de esta última ecuación se convierte en

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{c_1}{(s + p_1)^3} + \frac{c_2}{(s + p_1)^2} + \frac{c_3}{s + p_1} + \frac{c_4}{s + p_4} + \cdots + \frac{c_n}{s + p_n}$$

Una representación en el espacio de estados **de este sistema en la forma canónica de Jordan se obtiene mediante**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} -p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & \cdots & 0 & -p_4 & & 0 \\ \cdot & & \cdot & & & \\ \cdot & & \cdot & & & \\ \cdot & & \cdot & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & -p_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \\ \\ \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \\ \\ \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{11-10}$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \tag{11-11}$$

EJEMPLO 11–1 Considere el sistema obtenido mediante

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

Obtenga las representaciones en el espacio de estados en la forma canónica controlable, en la forma canónica observable y en la forma canónica diagonal.

Forma canónica controlable:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = [3 \quad 1]\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

Forma canónica observable:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 1]\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

Forma canónica diagonal:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = [2 \quad -1]\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

Valores característicos de una matriz A de *n* x *n*. Los valores característicos de una matriz A de *n* X *n* son las raíces de la ecuación característica

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

Los valores característicos también se denominan raíces características.

Por ejemplo, considere la matriz A siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}$$

La ecuación característica es

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 6 & 11 & \lambda + 6\end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

Los valores característicos de A son las raíces de la ecuación característica, o -1, -2 y -3.

Diagonalización de una matriz de *n* X *n*. Observe que, si una matriz A de *n* X *n* con valores característicos distintos, está dada por

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{vmatrix} \qquad (11\text{–}12)$$

la transformación x = Pz, en donde

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \cdot & \cdot & & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ = n valores característicos distintos de A transformará $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ en la matriz diagonal, o

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & & \\ 0 & & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

Si la matriz A definida mediante la ecuación (11-12) contiene valores característicos múltiples, la diagonalización es imposible. Por ejemplo, si la matriz **A** de 3 **x** 3, en la que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

tiene los valores característicos $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_3$, la transformación x = Sz, en donde

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}$$

producirá

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

que está en la forma canónica de Jordan.

EJEMPLO 11-2 Considere la siguiente representación en el espacio de estados de un sistema.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u \tag{11-13}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{11-14}$$

Las ecuaciones (11-13) y (11-14) se escriben en una forma **estándar** como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{11-15}$$

$$y = cx \tag{11-16}$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Los valores característicos de la matriz A son

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -2, \qquad \lambda_3 = -3$$

Por tanto, los tres valores característicos son distintos. Si definimos un nuevo **coniunto** de variables de estado z_1, z_2 y z_3, mediante la transformación

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

o bien

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z} \tag{11-17}$$

en donde

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \tag{11-18}$$

entonces, sustituyendo el primer miembro de la ecuación (11-1.5) por la ecuación (11-17), **obtenemos**

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{B}u$$

Premultiplicando ambos miembros de esta última ecuación por $\mathbf{P}^{-1}$, obtenemos

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}u \tag{11-19}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 0.5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 0.5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

Al simplificar produce

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} u \tag{11-20}$$

La ecuación (11-20) también es una ecuación de estado que describe el mismo sistema definido mediante la ecuación (11-13).

La ecuación de salida, ecuación (ll-16), se modifica a

$$y = \mathbf{CPz}$$

o bien

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \tag{11-21}$$

Observe que la matriz de transformación **P,** definida mediante la ecuación **(11–18),** modifica la matriz de coeficientes de z en la matriz diagonal. Como se aprecia claramente en la ecuación **(11–20),** las tres ecuaciones de estado escalares no están acopladas. Observe también que los elementos de la diagonal principal de la matriz $\mathbf{P^{-1}AP}$ en la ecuación (11-19) son idénticos a los tres valores característicos de **A.** Es muy importante señalar que los valores característicos de **A** son idénticos a los de $\mathbf{P^{-1}AP}$. A continuación demostraremos esto para un caso general.

Invariancia de los valores característicos. Para comprobar la invariancia de los valores característicos bajo una transformación lineal, debemos demostrar que los polinomios característicos $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ y $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{P^{-1}AP}|$ son idénticos.

Dado que la determinante de un producto es el producto de las determinantea obtenemos

$$\begin{aligned} |\mathbf{AI} - \mathbf{P^{-1}AP}| &= |\lambda\mathbf{P^{-1}P} - \mathbf{P^{-1}AP}| \\ &= |\mathbf{P^{-1}}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P}| \\ &= |\mathbf{P^{-1}}||\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}||\mathbf{P}| \\ &= |\mathbf{P^{-1}}||\mathbf{P}||\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| \end{aligned}$$

Considerando que el producto de las determinantes $|\mathbf{P^{-1}}|$ y $|\mathbf{P}|$ es la determinante del producto $|\mathbf{P^{-1}P}|$, obtenemos

$$\begin{aligned} |\mathbf{AI} - \mathbf{P^{-1}AP}| &= |\mathbf{P^{-1}P}||\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| \\ &= |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| \end{aligned}$$

Por tanto, hemos demostrado que los valores característicos de **A** no varían bajo una transformación lineal.

No unicidad de un conjunto de variables de estado. Se ha planteado que un conjunto de variables de estado no es único para un sistema específico. Suponga que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forman un conjunto de variables de estado. Luego, tomamos como otro conjunto de variables de estado cualquier conjunto de funciones

$$\hat{x}_1 = X_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$\hat{x}_2 = X_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\hat{x}_n = X_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

siempre y cuando, a cada conjunto de valores XI, $\hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n$, le corresponda un conjunto único de valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y viceversa. Por tanto, si x es un vector de estado, $\hat{\mathbf{x}}$, en donde

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$$

también es un vector de estado, siempre y cuando la matriz P sea no singular. Los diferentes vectores de estado aportan la misma información acerca del comportamiento del sistema.

ll-3 TRANSFORMACIÓN DE MODELOS DE SISTEMAS CON MATLAB

En esta sección consideraremos la transformación del modelo del sistema basado en la función de transferencia al espacio de estados, y viceversa. Empezaremos nuestro análisis con la transformación de una función de transferencia al espacio de estados.

Escribamos la función de transferencia en lazo cerrado como

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{polinomio del numerador en } s}{\text{polinomio del denominador en } s} = \frac{\text{num}}{\text{den}}$$

Una vez que tenemos esta expresión de la función de transferencia, el comando MATLAB

```
[A, B, C, D]=tf2ss(num.den)
```

producirá una representación en el espacio de estados. Es importante señalar que la representación en el espacio de estados pará cualquier sistema no es única. Existen muchas (muchas en realidad) representaciones en el espacio de estados para el mismo sistema. El programa MATLAB ofrece una de las posibles representaciones en el espacio de estados.

Formulación en el espacio de estados de los sistemas basados en la función de transferencia. Considere el sistema definido por la función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s}{(s + 10)(s^2 + 4s + 16)}$$
$$= \frac{s}{s^3 + 14s^2 + 56s + 160} \tag{11-22}$$

Existen muchas representaciones posibles en el espacio de estados para este sistema. Una representación posible en el espacio de estados es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -160 & -56 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0] \ u$$

Otra representación posible en el espacio de estados (entre muchas alternativas) es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & -56 & -160 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{11-23}$$

$$y = [0\ 1\ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0]u \tag{11-24}$$

MATLAB transforma la función de transferencia obtenida mediante la ecuación (11-22) en la representación en el espacio de estados obtenida mediante las ecuaciones (11-23) y (11-24). Para el sistema de ejemplo que se considera aquí, el programa MATLAB ll-l producirá las matrices A, B, C y D.

Transformación en el espacio de estados en una función de transferencia. Para obtener la función de transferencia a partir de las ecuaciones en el espacio de estados, use el comando siguiente:

```
[num,den] = ss2tf[A,B,C,D,iu)
```

iu debe especificarse para los sistemas con más de una entrada. Por ejemplo, si el sistema tiene tres entradas ($u1, u2, u3$), entonces iu debe ser 1, 2 o 3, en donde 1 implica ul, 2 implica $u2$ y 3 implica $u3$.

Si el sistema sólo tiene una entrada, entonces

Programa MATLAB 11-1

```
num = [0   0   1   0];
den = [1   14   56   160];
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den)

A =

   -14   -56   -160
     1     0      0
     0     1      0

B =

     1
     0
     0

C =

     0     1      0

D =

     0
```

```
[num,den] = ss2tf(A,B,C,D)
```

o bien

```
[num,den] = ss2tf(A,B,C,D,1)
```

se pueden usar. (Véanse el ejemplo ll-3 y el programa MATLAB 11-2.)

Para el caso del sistema con entradas y salidas múltiples, véase el ejemplo 11-4.

EJEMPLO 11-3 Obtenga la función de transferencia del sistema definido mediante las ecuaciones en el espacio de estados siguiente:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -5.008 & -25.1026 & -5.03247\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 25.04\\ -121.005\end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

El programa MATLAB 11-2 producirá la función de transferencia para el sistema específico. La función de transferencia se obtiene mediante

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{25.04s + 5.008}{s^3 + 5.0325s^2 + 25.1026s + 5.008}$$

Programa MATLAB 11-2

```
A = [0   1   0;0   0   1;-5.008   -25.1026   -5.03247];
B = [0;25.04;-121.005];
C = [1   0   0];
D = [0];
[num,den] = ss2tf(A,B,C,D)

num =

         0   -0.0000   25.0400    5.0080

den =

    1.0000    5.0325   25.1026    5.0080

% ***** Se obtiene el mismo resultado introduciendo el comando siguiente *****

[num,den] = ss2tf(A,B,C,D,1)

num =

         0   -0.0000   25.0400    5.0080

den =

    1.0000    5.0325   25.1026    5.0080
```

EJEMPLO 11 - 4 Considere un sistema con entradas y salidas múltiples. Cuando el sistema tiene más de una salida, el comando

```
[NUM,den] = ss2tf(A,B,C,D,iu)
```

produce funciones de transferencia para todas las salidas a cada entrada. (Los coeficientes del numerador vienen a la matriz NUM con la misma cantidad de renglones que de salidas.)

Considere el sistema definido mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Este sistema contiene dos entradas y dos salidas. Hay cuatro funciones de transferencia implícitas: $Y_1(s)/U_1(s)$, $Y_2(s)/U_1(s)$, $Y_1(s)/U_2(s)$ y $Y_2(s)/U_2(s)$. (Al considerar la entrada u_1, suponemos que la entrada u_2 es cero, y viceversa.) Véase la siguiente salida de MATLAB.

```
A = [0   1 ; - 2 5   -4];
B = [1     1 ; o   11;
c = [1     0;0 1 1 ;
D  =  [0  0;0  0];
[NUM,den] = ss2tf(A,B,C,D,1)

NUM =

        0     1         4
        0     0     -25


den =

        1     4      25

[NUM,den] = ss2tf(A,B,C,D,2)

NUM =

              0     1.0000          5.0000
              0     1.0000     -25.0000


den =

        1     4      25
```

Ésta es la representación en MATLAB de las cuatro funciones de transferencia siguientes:

$$\frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = \frac{s+4}{s^2+4s+25}, \qquad \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = \frac{-25}{s^2+4s+25}$$

$$\frac{Y_1(s)}{U_2(s)} = \frac{s+5}{s^2+4s+25}, \qquad \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} = \frac{s-25}{s^2+4s+25}$$

ll-4 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ESTADO LINEAL E INVARIANTE CON EL TIEMPO

En esta sección obtendremos la solución general de la ecuación de estado lineal e invariante con el tiempo. Primero consideraremos el caso homogéneo y luego el no homogéneo.

Solución de las ecuaciones de estado para el caso homogéneo. Antes de resolver las ecuaciones diferenciales matriciales, repasemos la solución de la ecuación diferencial escalar

$$\dot{x} = ax \tag{11-25}$$

Al resolver esta ecuación, suponemos una solución x(t) de la forma

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots \tag{11-26}$$

Sustituyendo esta solución supuesta en la ecuación (11–25), obtenemos

$$b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \cdots + kb_k t^{k-1} + \cdots = a(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots) \tag{11-27}$$

Si la solución supuesta será la verdadera, la ecuación (11-27) debe ser válida para cualquier *t*. Por tanto, igualando los coeficientes de las potencias iguales de *t*, obtenemos

$$b_1 = ab_0$$

$$b_2 = \frac{1}{2} ab_1 = \frac{1}{2} a^2 b_0$$

$$b_3 = \frac{1}{3} ab_2 = \frac{1}{3 \times 2} a^3 b_0$$

$$b_k = \frac{1}{k!} a^k b_0$$

El valor de b_0 se determina sustituyendo $t = 0$ en la ecuación (11–26), o

$$x(O) = b_0$$

Por tanto, la solución $x(t)$ se escribe como

$$x(t) = \left(1 + at + \frac{1}{2!} a^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} a^k t^k + \cdots\right) x(0)$$
$$= e^{at} x(0)$$

Ahora despejamos la ecuación diferencial matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{11-28}$$

en donde x = vector de dimensión *n*
A = matriz de coeficientes constantes de $n \times n$

Por analogía con el caso escalar, suponemos que la solución está en la forma de una serie de potencias de vectores en *t*, o

$$x(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \cdots + \mathbf{b}_k t^k + \cdots \tag{11-29}$$

Sustituyendo esta solución supuesta en la ecuación (11–28), obtenemos

$$\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 t + 3\mathbf{b}_3 t^2 + \cdots + k\mathbf{b}_k t^{k-1} + \cdots = \mathbf{A}(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \cdots + \mathbf{b}_k t^k + \cdots) \tag{11-30}$$

Si la solución supuesta será la verdadera, la ecuación (11-30) debe ser válida para toda t. Por tanto, igualando los coeficientes de las potencias iguales de t en ambos miembros de la ecuación (11–30), obtenemos

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}\mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{b}_3 = \frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{b}_2 = \frac{1}{3 \times 2}\mathbf{A}^3\mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{b}_k = \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{b}_0$$

Sustituyendo $t = 0$ en la ecuación (11–29), obtenemos

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}_0$$

Así, la solución $x(t)$ se escribe como

$$x(t) = \left(\mathbf{1} + \mathrm{At} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \cdots\right)\mathbf{x}(0)$$

La expresión en el paréntesis del segundo miembro de esta última ecuación es una matriz de $n \times n$. Debido a su similitud con la serie infinita de potencias para una exponencial escalar, la denominamos matriz exponencial y escribimos

$$\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \cdots = e^{\mathbf{A}t}$$

En términos de la matriz exponencial, la solución de la ecuación (11-28) se escribe como

$$x(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \tag{11-31}$$

Dado que la matriz exponencial es muy importante en el análisis en el espacio de estados de los sistemas lineales, a continuación examinaremos sus propiedades.

Matriz exponencial. Se puede demostrar que la matriz exponencial de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$,

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}$$

converge absolutamente para todos los t finitos. (Por tanto, es fácil realizar los cálculos por computadora para evaluar 18s elementos de $e^{\mathbf{A}t}$ usando la expansión en series.)

Debido a la convergencia de la serie infinita $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k t^k/k!$, la serie puede diferenciarse término a término para producir

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2t + \frac{\mathbf{A}^3t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^k t^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots$$

$$= \mathbf{A}\left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots\right] = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$$

$$= \left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots\right]\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}$$

La matriz exponencial tiene la propiedad de que

$$e^{\mathbf{A}(t+s)} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s}$$

Esto se demuestra del modo siguiente:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k s^k}{k!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{A}^k\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i s^{k-i}}{i!(k-i)!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{A}^k\frac{(t+s)^k}{k!} \\ &= e^{\mathbf{A}(t+s)} \end{aligned}$$

En particular, si $s = -t$, entonces

$$e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t} = e^{-\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}(t-t)} = \mathbf{I}$$

Por tanto, la inversa de $e^{\mathbf{A}t}$ es $e^{-\mathbf{A}t}$. Dado que la inversa de $e^{\mathbf{A}t}$ siempre existe, $e^{\mathbf{A}t}$ es no singular.

Es muy importante recordar que

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}, \qquad \text{si } \mathbf{AB} = \mathbf{BA}$$

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} \neq e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} \qquad \text{si } \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

Para comprobar esto, considere que

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} = \mathbf{I} + (\mathbf{A}+\mathbf{B})t + \frac{(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2}{2!}t^2 + \frac{(\mathbf{A}+\mathbf{B})^3}{3!}t^3 + \cdots$$

$$e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} = \left(1 + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \cdots\right)\left(\mathbf{I} + \mathbf{B}t + \frac{\mathbf{B}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{B}^3t^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= 1 + (\mathbf{A}+\mathbf{B})t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \mathbf{AB}t^2 + \frac{\mathbf{B}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^2\mathbf{B}t^3}{2!} + \frac{\mathbf{AB}^2t^3}{2!} + \frac{\mathbf{B}^3t^3}{3!} + \cdots$$

Por tanto,

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} - e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} = \frac{\mathbf{BA}-\mathbf{AB}}{2!}t^2 + \frac{\mathbf{BA}^2 + \mathbf{ABA} + \mathbf{B}^2\mathbf{A} + \mathbf{BAB} - 2\mathbf{A}^2\mathbf{B} - 2\mathbf{AB}^2}{3!}t^3 + \cdots$$

La diferencia entre $e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t}$ y $e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}$ desaparece si A y B se conmutan.

Enfoque de la transformada de Laplace para la solución de las ecuaciones de estado para el caso homogéneo. Primero consideremos el caso escalar:

$$\dot{x} = ax \tag{11-32}$$

Tomando la transformada de Laplace de la ecuación (11–32), obtenemos

$$sX(s) \quad x(0) = aX(s) \tag{11-33}$$

en donde X(s) = $\mathcal{L}[x]$. Despejar X(s) de la ecuación (11-33) produce

$$X(s) = \frac{x(0)}{s - a} = (s - a)^{-1}x(0)$$

La transformada inversa de Laplace de esta última ecuación produce la solución

$$x(t) = e^{at}x(0)$$

El enfoque anterior para la solución de la ecuación diferencial escalar homogénea se extiende a la ecuación de estado homogénea:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{11-34}$$

Tomando la transformada de Laplace de ambos miembros de la ecuación (11–34), obtenemos

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)$$

en donde $\mathbf{X}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{x}]$. Por tanto,

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = x(O)$$

Premultiplicando ambos miembros de esta última ecuación por $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, obtenemos

$$X(s) = (s\mathbf{I} - A)\text{-}'x(O)$$

La transformada inversa de Laplace de X(s) produce la solución x(t). Así,

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]\mathbf{x}(0) \tag{11-35}$$

Observe que

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \cdots$$

Por tanto, la transformada inversa de Laplace de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ produce

$$\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \cdots = e^{\mathbf{A}t} \tag{11-36}$$

(La transformada inversa de Laplace de una matriz es la matriz formada por las transformadas inversas de Laplace de todos los elementos.) A partir de las ecuaciones (11-35) y (11–36), la solución de la ecuación (11-34) se obtiene como

$$x(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

La importancia de la ecuación (11-36) estriba en el hecho de que ofrece una forma conveniente de encontrar la solución cerrada para la matriz exponencial.

Matriz de transición de estados. Escribimos la solución de la ecuación de estado homogénea

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}x \tag{11-37}$$

como

$$x(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) \tag{11-38}$$

en donde O(f) es una matriz de $n \times n$ y es la solución única de

$$\dot{\Phi}(t) = A@(t), \qquad \Phi(0) = 1$$

Para verificar esto, observe que

$$\mathbf{x}(0) = \Phi(0)\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0)$$

y

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\Phi(t)\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

Por tanto, confirmamos que la ecuación (11-38) es la solución de la ecuación (11-37).

A partir de las ecuaciones (11–31), (11-35) y (11–38), obtenemos

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

Observe que

$$\Phi^{-1}(t) = e^{-\mathbf{A}t} = \Phi(-t)$$

En la ecuación (11–38), vemos que la solución de la ecuación (1137) es simplemente una transformación de la condición inicial. Por tanto, la matriz única $\Phi(t)$ se denomina matriz de transición de estados. La matriz de transición de estados contiene toda la información acerca del movimiento libre del sistema definido mediante la ecuación (11-37).

Si los valores característicos λ_1, Az,..., λ_n de la matriz A son distintos, entonces $\Phi(t)$ contendrá las n exponenciales

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}$$

En particular, si la matriz A es diagonal, entonces

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \qquad \text{(A: diagonal)}$$

Si hay una multiplicidad en los valores características, por ejemplo, si los valores característicos de A son

$$\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_4, \lambda_5, \cdots \lambda_n,$$

entonces $\Phi(t)$ contendrá, además de las exponenciales $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_4 t}$, $e^{\lambda_5 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$, términos como $te^{\lambda_1 t}$ y $t^2 e^{\lambda_1 t}$.

Propiedades de la matriz de transición de estados. Ahora resumiremos las propiedades importantes de la matriz de transición de estados $\Phi(t)$. Para el sistema lineal e invariante con el tiempo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathrm{A}\mathrm{x}$$

para el cual

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$$

tenemos lo siguiente:

1. $\Phi(0) = e^{\mathbf{A}0} = 1$
2. $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = (e^{-\mathbf{A}t})^{-1} = [\Phi(-t)]^{-1}$ o $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$
3. $\Phi(t_1 + t_2) = e^{\mathbf{A}(t1+t2)} = e^{\mathbf{A}t1}e^{\mathbf{A}t2} = \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)$

4. $[\Phi(t)]^n = \Phi(nt)$
5. $\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_1 - t_0)\Phi(t_2 - t_1)$

EJEMPLO 11-5 Obtenga la matriz de transición de estados $\Phi(t)$ del sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Obtenga también la inversa de la matriz de transición de estados, @-l(t).

Para este sistema,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

La matriz de transición de estados $\Phi(t)$ se obtiene mediante

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \text{Ce-'[(SI} - \mathbf{A})^{-1}]$$

Dado que

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

la inversa de $(s\mathbf{I} - \text{A})$ se obtiene mediante

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

considerando que $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$, obtenemos la inversa de la matriz de transición de estados del modo siguiente:

$$\Phi^{-1}(t) = e^{-\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e' - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{bmatrix}_1$$

Solución de ecuaciones de estado para el caso no homogéneo. Empezaremos por considerar el caso escalar

$$\dot{x} = ax + bu \tag{11-39}$$

Volvamos a escribir la ecuación (11-39) como

$$\dot{x} - ax = bu$$

Multiplicando ambos miembros de esta ecuación por e^{-at}, obtenemos

$$e^{-at}[\dot{x}(t) - ax(t)] = \frac{d}{dt}[e^{-at}x(t)] = e^{-at}bu(t)$$

Integrar esta ecuación entre 0 y t produce

$$e^{-at}x(t) = \text{x(O)} + \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau$$

o bien

$$x(t) = e^{at}x(0) + e^{at}\int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau$$

El primer término del segundo miembro es la respuesta a las condiciones iniciales y el segundo término es la respuesta a la entrada u(t).

Ahora consideremos la ecuación de estado no homogéneo descrita mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = Ax + Bu \tag{11-40}$$

en donde $\mathbf{x}$ = vector de dimensión n
$\mathbf{u}$ = vector de dimensión r
A = matriz de coeficientes constantes de $n \times n$
B = matriz de coeficientes constantes de $n \times r$

Si escribimos la ecuación (11-40) como

$$X(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = Bu(t)$$

y premultiplicamos ambos miembros de esta ecuación por $e^{-\mathbf{A}t}$, obtenemos

$$e^{-\mathbf{A}t}[\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)] = \frac{d}{dt}[e^{-\mathbf{A}t}\,x(t)] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Al integrar la ecuación precedente entre 0 y t produce

$$e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) - x(O) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

o bien

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau \tag{11-41}$$

La ecuación (11–41) también se escribe como

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau \tag{11-42}$$

en donde $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$. La ecuación (11-41) u (11-42) es la solución de la ecuación (1140). La solución $\mathbf{x}(t)$ es claramente la suma de un término formado por la transición de estados inicial y un término que surge del vector de entradas.

Enfoque de la transformada de Laplace para la solución de ecuaciones de estado del caso no homogéneo. La solución de la ecuación de estado no homogénea

$$\dot{\mathbf{x}} = Ax + Bu$$

también puede obtenerse mediante el enfoque de la transformada de Laplace. La transformada de Laplace de esta última ecuación produce

$$s\mathbf{X}(s) - x(O) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + BU(s)$$

o bien

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = x(O) + BU(s)$$

Premultiplicando ambos miembros de esta última ecuación por $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, obtenemos

$$X(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

Usar la relación dada por la ecuación (11-36) produce .

$$X(s) = \mathcal{L}[e^{\mathbf{A}t}]\mathbf{x}(0) + \mathcal{L}[e^{\mathbf{A}t}]\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

La transformada inversa de Laplace de esta última ecuación se obtiene a partir de la integral de convolución, del modo siguiente:

$$x(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

Solución en términos de $\mathbf{x}(t_0)$. Hasta aquí hemos supuesto que el tiempo inicial es cero. Sin embargo, si el tiempo inicial está dado mediante t_0, en lugar de 0, la solución para la ecuación (11-40) debe modificarse a

$$\mathrm{x(t)} = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\,\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau \qquad (11\text{-}43)$$

EJEMPLO ll-6 Obtenga la respuesta en el tiempo del sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

en donde $u(t)$ es la función escalón unitario que se presenta en $t = 0$, o

$$u(t) = 1(t)$$

Para este sistema

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

La matriz de transición de estados $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$ se obtuvo en el ejemplo 11–5 como

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix}2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t}\\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

La respuesta a la entrada escalón unitario se obtiene, entonces, como

$$x(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \begin{bmatrix}2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}\\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}[1]\,d\tau$$

o bien

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t}\\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\\ e^{-t} - e^{-2t}\end{bmatrix}$$

Si el estado inicial es cero, o x(O) = 0, entonces $x(t)$ se puede simplificar a

$$\begin{vmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\\ e^{-t} - e^{-2t}\end{vmatrix}$$

ll-5 ALGUNOS RESULTADOS ÚTILES EN EL ANÁLISIS MATRICIAL

En esta sección presentaremos algunos resultados útiles en el análisis matricial que usamos en la sección 11-6. Específicamente, estudiaremos el teorema de Cayley-Hamilton, el polinomio mfnimo, el método de interpolación de Sylvester para calcular $e^{\mathbf{A}t}$ y la independencia lineal de vectores.

Teorema de Cayley-Hamilton. El teorema de Cayley-Hamilton es muy útil para comprobar teoremas que involucran ecuaciones matriciales o para resolver problemas que involucran ecuaciones matriciales.

Considere una matriz A de $n \times n$ y su ecuación característica:

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

El teorema de Cayley-Hamilton plantea que la matriz A satisface su propia ecuación característica, 0 que

$$\mathbf{A}^n + a_1\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\mathbf{A} + a_n\mathbf{I} = 0 \qquad (11\text{-}44)$$

Para comprobar este teorema, considere que $\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \text{A})$ es un polinomio en λ de grado $n - 1$. Es decir,

$$\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \text{A}) = \mathbf{B}_1\lambda^{n-1} + \mathbf{B}_2\lambda^{n-2} + \cdots + \mathbf{B}_{n-1}\lambda + \mathbf{B}_n$$

en donde $\mathbf{B}_1 = 1$. Dado que

$$(\text{AI} - \text{A})\ \text{adj}\ (\text{AI} - \text{A}) = [\text{adj}\ (\text{AI} - \text{A})](\text{AI} - \text{A}) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|\mathbf{I}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|\mathbf{I} &= \text{IA}^n + a_1\mathbf{I}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\mathbf{I}\lambda + a_n\mathbf{I} \\ &= (\text{AI} - \mathbf{A})(\mathbf{B}_1\lambda^{n-1} + \mathbf{B}_2\lambda^{n-2} + \ldots + \mathbf{B}_{n-1}\lambda + \text{B},) \\ &= (\mathbf{B}_1\lambda^{n-1} + \mathbf{B}_2\lambda^{n-2} + \cdots + \mathbf{B}_{n-1}\lambda + \mathbf{B}_n)(\lambda\mathbf{I} - \text{A}) \end{aligned}$$

En esta ecuación vemos que A y $\mathbf{B}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ *sí* conmutan. Por tanto, el producto de $(\text{AI} - \text{A})$ y $\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \text{A})$ se hace cero si cualquiera de éstos es cero. Si se sustituye A por λ en esta última ecuación, es evidente que $\text{AI} - \text{A}$ se hace cero. Por tanto, obtenemos

$$\mathbf{A}^n + a_1\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mathbf{A} + a_n\mathbf{I} = 0$$

Esto comprueba el teorema de Cayley-Hamilton, o la ecuación (11-44).

Polinomio mínimo. Remitiéndonos al teorema de Cayley-Hamilton, toda matriz A de $n \times n$ satisface su propia ecuación característica. Sin embargo, la ecuación característica no necesariamente es la ecuación escalar de grado mínimo que A satisface. El polinomio de grado mínimo que tiene a A como raíz se denomina *polinomio mínimo.* Es decir, el polinomio mínimo de la matriz A de $n \times n$ se define como el polinomio $\phi(\lambda)$ de grado mínimo,

$$\phi(\lambda) = \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\lambda + a_m, \qquad m \leq n$$

tal que $\phi(\mathbf{A}) = 0$, o

$$\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^m + a_1\mathbf{A}^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\mathbf{A} + a_m\mathbf{I} = 0$$

El polinomio mínimo representa una función importante en el cálculo de polinomios de una matriz de $n \times n$.

Supongamos que d(A), polinomio en λ, es el máximo común divisor de todos los elementos de $\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \text{A})$. Podemos demostrar que si se elige 1 como el coeficiente del término de mayor grado en λ de d(A), el polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ se obtiene mediante

$$\phi(\lambda) = \frac{|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|}{d(\lambda)} \qquad (11\text{-}45)$$

[Véase el problema A-ll-8 para la obtención de la ecuación (11–45).]

Observe que el polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ de una matriz A de $n \times n$ se determina mediante el procedimiento siguiente:

1. Forme adj **(XI-A)** y escriba los elementos de adj **(AI –** A) como polinomios factorizados en A.
2. Determine d(h) como el máximo común divisor de todos los elementos de adj **(XI- A).** Seleccione 1 como el coeficiente del término de mayor grado en λ de d(X). Si no hay un común divisor, d(h) = 1.
3. El polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ se obtiene, entonces, como $|\lambda\mathbf{I}$ -Al dividido entre d(A).

Matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$. Al resolver problemas de ingeniería de control, con frecuencia resulta necesario calcular $e^{\mathbf{A}t}$. Si se obtiene la matriz **A** con todos los elementos en valores numéricos, MATLAB ofrece una forma simple de calcular $e^{\mathbf{A}T}$, en donde T es una constante.

Aparte de los métodos de cálculo, existen varios métodos analíticos para la determinación de $e^{\mathbf{A}t}$. Presentaremos aquí tres de ellos.

***Cálculo* de $e^{\mathbf{A}t}$: método 1.** Si la matriz **A** se transforma en una forma diagonal, entonces $e^{\mathbf{A}t}$ se obtiene mediante

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{vmatrix}\mathbf{P}^{-1} \qquad (11\text{-}46)$$

en donde **P** es una matriz de diagonalización para A. [Para la obtención de la ecuación (11–46), véase el problema A-ll-ll.]

Si la matriz **A** se transforma en una forma canónica de Jordan, entonces $e^{\mathbf{A}t}$ se obtiene mediante

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{S}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{S}^{-1}$$

Como ejemplo, considere la siguiente matriz A:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica es

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0$$

Por tanto, la matriz **A** tiene un valor característico múltiple de orden 3 en $\lambda = 1$. Se puede demostrar que la matriz **A** tiene un vector característico múltiple de orden 3. La matriz de transformación que convertirá la matriz **A** a la forma canónica de Jordan se obtiene mediante

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La inversa de la matriz S es

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Se observa, así, que

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = J$$

Considerando que

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{1}{2}t^2e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

encontramos que

$$e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{1}{2}t^2e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^t - te^t + \frac{1}{2}t^2e^t & te^t - t^2e^t & \frac{1}{2}t^2e^t \\ \frac{1}{2}t^2e^t & e^t - te^t - t^2e^t & te^t + \frac{1}{2}t^2e^t \\ te^t + \frac{1}{2}t^2e^t & -3te^t - t^2e^t & e^t + 2te^t + \frac{1}{2}t^2e^t \end{bmatrix}$$

***Cálculo de e^{At}:* método 2.** El segundo método para calcular e^{At} usa el enfoque de la transformada de Laplace. Remitiéndonos a la ecuación (11–36), e^{At} se obtiene del modo siguiente:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

Por tanto, para obtener e^{At}, primero se invierte la matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Esto produce una matriz cuyos elementos son funciones racionales de s. Después se toma la transformada inversa de Laplace de cada elemento de la matriz.

EJEMPLO 11-7 Considere la matriz **A** siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Calcule e^{At} mediante los dos métodos analíticos presentados antes.

Método 1. Los valores característicos de **A** son 0 y -2 ($\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$). La matriz P de transformación se obtiene como

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

De esta forma, a partir de la ecuación (11–46), $e^{\mathbf{A}t}$ se obtiene del modo siguiente:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{0} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Método 2. Dado que

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s + 2 \end{bmatrix}$$

obtenemos

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s + 2)} \\ 0 & \frac{1}{s + 2} \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Cálculo *de* $e^{\mathbf{A}t}$: método 3. El tercer método se basa en la interpolación de Sylvester. (Para la fórmula de interpolación de Sylvester, véase el problema A-11-12.) Consideremos primero el caso en el que las raíces del polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ de A son distintas. Después abordaremos el caso de las raíces múltiples.

Caso 1: elpolinomio mínimo de* A *sólo contiene raíces distintas. Supondremos que el grado del polinomio mínimo de A es m. Usando la fórmula de interpolación de Sylvester, se demuestra que $e^{\mathbf{A}t}$ se obtiene resolviendo la ecuación determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{m-1} & e^{\lambda_1 t} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} & e^{\lambda_2 t} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \cdots & \lambda_m^{m-1} & e^{\lambda_m t} \\ \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{A}^2 & \cdots & \mathbf{A}^{m-1} & e^{\mathbf{A}t} \end{vmatrix} = \mathbf{0} \qquad (11\text{-}47)$$

Si se despeja $e^{\mathbf{A}t}$ en la ecuación (11–47), $e^{\mathbf{A}t}$ se obtiene en términos de $\mathbf{A}^k (k = 0, 1, 2, \ldots, m - 1)$ y $e^{\lambda_i t}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, m)$. [Por ejemplo, la ecuación (11-47) se expande con respecto a la última columna.]

Observe que despejar $e^{\mathbf{A}t}$ en la ecuación (11-47) es igual que escribir

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \alpha_2(t)\mathbf{A}^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\mathbf{A}^{m-1} \qquad (11\text{-}48)$$

y determinar $\alpha_k(t)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, m - 1)$ resolviendo el siguiente conjunto de m ecuaciones para $\alpha_k(t)$:

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_1^{m-1} = e^{\lambda_1 t}$$
$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 + \alpha_2(t)\lambda_2^2 + \ldots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_2^{m-1} = e^{\lambda_2 t}$$

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_m + \alpha_2(t)\lambda_m^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_m^{m-1} = e^{\lambda_1 t}$$

Si A es una matriz de $n \times n$ y tiene valores característicos distintos, se determina que el número de las $\alpha_k(t)$ es $m = n$. Sin embargo, si A contiene valores característicos múltiples, pero su polinomio mínimo sólo tiene raíces simples, el número m de las $\alpha_k(t)$ a determinar es menor que n.

Caso 2: polinomio mínimo de A *que contiene raíces múltiples.* Como ejemplo, considere el caso en el que el polinomio mínimo de A contiene tres raíces iguales $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3)$ y el resto distintas $(\lambda_4, \lambda_5, \ldots, X,)$. Aplicando la fórmula de interpolación de Sylvester, se demuestra que $e^{\mathbf{A}t}$ se obtiene a partir de la ecuación determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3\lambda_1 & \cdots & \frac{(m-1)(m-2)}{2}\lambda_1^{m-3} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1^2 & \cdots & (m-1)\lambda_1^{m-2} & te^{\lambda_1 t} \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \cdots & \lambda_1^{m-1} & e^{\lambda_1 t} \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 & \ldots & \lambda_4^{m-1} & e^{\lambda_4 t} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \lambda_m^3 & \ldots & \lambda_m^{m-1} & e^{\lambda_m t} \\ 1 & \mathrm{A} & \mathbf{A}^2 & \mathbf{A}^3 & \ldots & \mathbf{A}^{m-1} & e^{\mathbf{A}t} \end{vmatrix} = 0 \qquad (11\text{-}49)$$

La ecuación (11–49) se expande con respecto a la última columna para despejar $e^{\mathbf{A}t}$.

Observe que, como en el caso 1, despejar $e^{\mathbf{A}t}$ en la ecuación (1149) es igual que escribir

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \alpha_2(t)\mathbf{A}^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\mathbf{A}^{m-1} \qquad (11\text{-}50)$$

y determinar $\alpha_k(t)$ (k = 0, 1, 2, . . . , m – 1) a partir de

$$\alpha_2(t) + 3\alpha_3(t)\lambda_1 + \cdots + \frac{(m-1)(m-2)}{2}\alpha_{m-1}(t)\lambda_1^{m-3} = \frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t}$$
$$\alpha_1(t) + 2\alpha_2(t)\lambda_1 + 3\alpha_3(t)\lambda_1^2 + \cdots + (m-1)\alpha_{m-1}(t)\lambda_1^{m-2} = te^{\lambda_1 t}$$
$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 + \ldots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_1^{m-1} = e^{\lambda_1 t}$$
$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_4 + \alpha_2(t)\lambda_4^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_4^{m-1} = e^{\lambda_4 t}$$

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_m + \alpha_2(t)\lambda_m^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_m^{m-1} = e^{\lambda_m t}$$

Es evidente la extensión a otros casos en los que, por ejemplo, hay dos o más conjuntos de raíces múltiples. Observe que, si no se encuentra el polinomio mínimo de A, puede susti-

tuirse el polinomio característico por el polinomio mínimo. Por supuesto, el número de cálculos se incrementa.

EJEMPLO 11-8 Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Calcule e^{At} mediante la fórmula de interpolación de Sylvester.

A partir de la ecuación (11-47), obtenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & e^{\lambda_1 t} \\ 1 & \lambda_2 & e^{\lambda_2 t} \\ \mathbf{I} & A & e^{At} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Sustituyendo λ_1 por 0 y λ_2 por -2 en esta última ecuación, obtenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & e^{-2t} \\ \mathbf{I} & A & e^{At} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Expandiendo el determinante, obtenemos

$$-2e^{At} + A + 21 \quad \mathbf{A}e^{-2t} = 0$$

o bien

$$\begin{aligned} e^{At} &= \tfrac{1}{2}(A + 21 - \mathbf{A}e^{-2t}) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} e^{-2t}\right\} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Un enfoque alternativo es usar la ecuación (11-48). Primero determinamos $\alpha_0(t)$ y $\alpha_1(t)$ a partir de

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 &= e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 &= e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

Dado que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -2$, las últimas dos ecuaciones se convierten en

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) &= 1 \\ \alpha_0(t) - 2\alpha_1(t) &= e^{-2t} \end{aligned}$$

Al resolver para $\alpha_0(t)$ y $\alpha_1(t)$ obtenemos

$$\alpha_0(t) = 1, \qquad \alpha_1(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$$

Entonces, e^{At} se escribe como

$$e^{At} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} = 1 + \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Independencia lineal de vectores. Se dice que los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes si

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes, implica que

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

0 bien, se dice que los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son linealmente dependientes si y sólo si $\mathbf{x}_i$ se expresa como una combinación lineal de $\mathbf{x}_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$; $j \neq i$), o

$$\mathbf{x}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} c_j \mathbf{x}_j$$

para un conjunto de c_j constantes. Esto significa que, si $\mathbf{x}_i$ se puede expresar como una combinación lineal de los otros vectores en el conjunto, es linealmente dependiente de ellos, o no es un miembro independiente del conjunto.

EJEMPLO 11-9 Los vectores

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

son linealmente dependientes, dado que

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 = 0$$

Los vectores

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

son linealmente independientes, dado que

$$c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + c_3\mathbf{y}_3 = \mathbf{0}$$

implica que

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

Observe que si una matriz de $n \times n$ es no singular (es decir, tiene un rango n o el determinante es diferente de cero), entonces n vectores columna (o renglón) son linealmente independientes. Si la matriz de $n \times n$ es singular (es decir, tiene un rango menor que n o el determinante es cero), entonces n vectores columna (o renglón) son linealmente dependientes. Para demostrar esto, considere que

$$[\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \text{singular}$$

$$[\mathbf{y}_1 \quad \mathbf{y}_2 \quad \mathbf{y}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \text{no singular}$$

ll-6 CONTROLABILIDAD

Controlabilidad y observabilidad. Se dice que un sistema es controlable en el tiempo t_0 si se puede llevar de cualquier estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito.

Se dice que un sistema es observable en el tiempo t_0 si, con el sistema en el estado $\mathbf{x}(t_0)$, es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito.

Kalman introdujo los conceptos de controlabilidad y observabilidad, mismos que juegan un papel importante en el diseño de los sistemas de control en el espacio de estados. De hecho, las condiciones de controlabilidad y observabilidad determinan la existencia de una solución completa para un problema de diseño de un sistema de control. Tal vez no exista una solución a este problema si el sistema considerado es no controlable. Aunque la mayor parte de los sistemas físicos son controlables y observables, los modelos matemáticos correspondientes tal vez no posean la propiedad de controlabilidad y observabilidad. En este caso, es necesario conocer las condiciones bajo las cuales un sistema es controlable y observable. Esta sección aborda la controlabilidad y la siguiente analiza la observabilidad.

A continuación, obtendremos primero la condición para la controlabilidad completa del estado. Después, obtendremos formas alternativas de la condición para una controlabilidad completa del estado. Por último, analizaremos la controlabilidad completa de salida.

Controlabilidad completa del estado de sistemas en tiempo continuo. Considere el sistema en tiempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{11-51}$$

en donde x = vector de estados (vector de dimensión n)
u = señal de control (escalar)
$\mathbf{A}$ = matriz de $n \times n$
B = matriz de n X l

Se dice que el sistema descrito mediante la ecuación (11-51) es de estado controlable en $t = t_0$, si es posible construir una señal de control sin restricciones que transfiera ún estado inicial a cualquier estado final en un intervalo de tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$. Si todos los estados son controlables, se dice que el sistema es de estado completamente controlable.

Ahora obtendremos la condición para una controlabilidad completa del estado. Sin perder la generalidad, suponemos que el estado final es el origen en el espacio de estados y que el tiempo inicial es cero, 0 $t_0 = 0$.

La solución de la ecuación (11-51) es

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)\,d\tau$$

Aplicando la definición de controlabilidad completa del estado recién establecida, tenemos

$$x(t_1) = 0 = e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)\,d\tau$$

o bien

$$\mathbf{x}(0) = -\int_0^{t_1} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}u(\tau)\,d\tau \tag{11-52}$$

Remitiéndonos a las ecuaciones (11-48) u (11–50), $e^{-\mathbf{A}t}$ se escribe

$$e^{-\mathbf{A}\tau} = \sum_{k=O}^{n-1} \alpha_k(\tau)\mathbf{A}^k \tag{11-53}$$

Sustituir $e^{-\mathbf{A}t}$ en la ecuación (11-52) por la ecuación (11-53) produce

$$\mathbf{x}(0) = -\sum_{k=O}^{n-1} \mathbf{A}^k\mathbf{B}\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)u(\tau)d\tau \tag{11-54}$$

Definamos

$$\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)u(\tau)d\tau = \beta_k$$

Así, la ecuación (11-54) se convierte en

$$\begin{aligned} x(O) &= -\sum_{k=O}^{n-1} \mathbf{A}^k\mathbf{B}\beta_k \\ &= -[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \begin{vmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{n-1} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{11-55}$$

Si el sistema es de estado completamente controlable, entonces, dado cualquier estado inicial x(O), la ecuación (11-55) debe satisfacerse. Esto requiere que el rango de la matriz de n X n

$$[\mathbf{B} \mid \mathrm{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

sea n.

A partir de este análisis, establecemos del modo siguiente la condición para la controlabilidad completa del estado: el sistema obtenido mediante la ecuación (11-51) es de estado completamente controlable si y sólo si los vectores B, AB, ..., $\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$ son linealmente independientes, o la matriz de n X n

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

es de rango n.

El resultado recién obtenido se extiende al caso en el que el vector de control u es de dimensión r. Si el sistema se describe mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathrm{Ax} + \mathrm{Bu}$$

en donde u es un vector de dimensión r, se demuestra que la condición para la controlabilidad completa del estado es que la matriz de n X nr

$$[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \mid \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

sea de un rango n, o que contengan vectores columna linealmente independientes. La matriz

$$[\mathbf{B} \quad \mathrm{AB} \mid \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

se denomina, por lo común, ***matriz de controlabilidad.***

EJEMPLO ll-10 Considere el sistema obtenido mediante

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} u$$

Dado que

$$[B \quad AB] = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \text{singular}$$

el sistema no es de un estado completamente controlable.

EJEMPLO 1 l-l 1 Considere el sistema obtenido mediante

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} [u]$$

Para este caso,

$$[B \quad AB] = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} = \text{no singular}$$

Por tanto, el sistema es de estado completamente controlable.

Forma alternativa de la condición para la controlabilidad completa del estado. Considere el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \tag{11-56}$$

en donde $\mathbf{x}$ = vector de estado (vector de dimensión n)
$\mathbf{u}$ = vector de control (vector de dimensión r)
$\mathbf{A}$ = matriz de $n \times n$
$\mathbf{B}$ = matriz de $n \times r$

Si los valores característicos de A son distintos, es posible encontrar una matriz de transformación P tal que

$$\mathbf{P^{-1}AP} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

Observe que, si los valores característicos de A son distintos, los vectores característicos de A también son distintos; sin embargo, 10 contrario no es verdadero. Por ejemplo una matriz simétrica real de n X n con valores característicos múltiples, tiene n vectores característicos distintos. Considere también que cada columna de la matriz P es un vector característico de A asociado con $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Definamos

$$\mathbf{x} = \mathrm{Pz} \tag{11-57}$$

Sustituyendo la x de la ecuación (11-56) por la ecuación (ll-57), obtenemos

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P^{-1}APz} + \mathbf{P^{-1}Bu} \tag{11-58}$$

Definiendo

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \mathrm{F} = (f_{ij})$$

volvemos a escribir la ecuación (11–58), como

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + f_{11}u_1 + f_{12}u_2 + \cdots + f_{1r}u_r$$

$$\dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 + f_{21}u_1 + f_{22}u_2 + \cdots + f_{2r}u_r$$

$$\dot{z}_n = \lambda_n z_n + f_{n1}u_1 + f_{n2}u_2 + \cdots + f_{nr}u_r$$

Si todos los elementos de cualquier renglón de la matriz F de $n \times r$ son cero, entonces, la variable de estado correspondiente es no controlable por cualquiera de los u_i. Por tanto, la condición de controlabilidad completa del estado es que, si los vectores característicos de A son distintos, el sistema es de estadó completamente controlable si y sólo si ningún renglón de $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$ tiene todos sus elementos cero. Es importante señalar que, a fin de aplicar esta condición para una controlabilidad completa del estado, debemos poner en forma diagonal la matriz $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ de la ecuación (11-58).

Si la matriz A de la ecuación (11–56) no posee vectores característicos distintos, es imposible la diagonalización. En este caso, transformamos A en una forma canónica de Jordan. Por ejemplo, si A tiene valores característicos $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_4, \lambda_4, \lambda_6, \ldots, \lambda_n$ y tiene $n = 3$ vectores característicos distintos, la forma canónica de Jordan de A es

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_4 & 1 & & \\ & & & 0 & \lambda_4 & & \\ & & & & & \lambda_6 & \\ & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Las submatrices cuadradas de la diagonal principal se denominan ***bloques de Jordan.***

Suponga que encontramos una matriz de transformación S tal que

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} = \mathrm{J}$$

Si definimos un nuevo vector de estado $\mathbf{z}$ mediante

$$\mathrm{x} = \mathrm{sz} \tag{11-59}$$

entonces la sustitución de la ecuación (11-59) en la ecuación (11-56) produce

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{ASz} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{Bu}$$

$$= \mathbf{Jz} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{Bu} \tag{11-60}$$

La condición para una controlabilidad completa del estado del sistema de la ecuación (11-56) se plantea del modo siguiente: el sistema de estado es completamente controlable si y sólo si (1) dos bloques de Jordan en **J** de la ecuación (11-60) no están asociados con los mismos valores característicos, (2) los elementos de cualquier renglón de $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}$ que corresponden al último renglón de cada bloque de Jordan no son todos cero y (3) los elementos de cada renglón de $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}$ que corresponden a valores característicos distintos no son todos cero.

EJEMPLO 1 l-l 2 **Los** sistemas siguientes son de estado completamente controlable:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}u$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 4\\ 3\end{bmatrix}u$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:cc} -2 & 1 & 0 & & 0\\ 0 & -2 & 1 & & \\ 0 & 0 & -2 & & \\ \hdashline & & & -5 & 1\\ 0 & & & 0 & -5\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\\ 3 & 0\\ 0 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

Los sistemas siguientes no son de estado completamente controlable:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4 & 2\\ 0 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \%\\ \dot{x}_5\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:cc} -2 & 1 & 0 & & 0\\ 0 & -2 & 1 & & \\ 0 & 0 & -2 & & \\ \hdashline & & & -5 & 1\\ 0 & & & 0 & -5\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\ 2\\ 1\\ 3\\ 0\end{bmatrix}u$$

Condición para la controlabilidad completa del estado en el plano s. La condición para una controlabilidad completa del estado se plantea en términos de las funciones de transferencia o las matrices de transferencia.

Una condición necesaria y suficiente para una controlabilidad completa del estado es que no ocurra una cancelación en la función de transferencia o en la matriz de transferencia. (Para comprobarlo, véase el problema A-11-16.) Si ocurre una cancelación, el sistema no puede controlarse en la dirección del modo cancelado.

EJEMPLO 1 l-l 3 Considere la función de transferencia siguiente:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{s + 2.5}{(s + 2.5)(s \quad 1)}$$

Es evidente que ocurre una cancelación del factor (s + 2.5) en el numerador y el denominador de esta función de transferencia. (Por tanto, se pierde un grado de libertad.) Debido a esta cancelación, este sistema no es de estado completamente controlable.

La misma condición se obtiene si se escribe esta función de transferencia en la forma de una ecuación de estado. Una representación en el espacio de estados es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2.5 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Dado que

$$[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

el rango de la matriz **[B AB]** es 1. Por tanto, llegamos a la misma conclusión: el sistema no es de estado completamente controlable.

Controlabilidad de la salida. En el diseño práctico de un sistema de control, tal vez pretendamos controlar la salida en lugar del estado del sistema. Una controlabilidad completa del estado no es necesaria ni suficiente para controlar la salida del sistema. Por esta razón, es conveniente definir una controlabilidad completa de la salida por separado.

Considere el sistema descrito mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \tag{11-61}$$

$$\mathrm{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \tag{11-62}$$

en donde x = vector de estado (vector de dimensión *n)*
u = vector de control (vector de dimensión *r*)
y = vector de salida (vector de dimensión n)
A = matriz de *n X n*
B = matrizden X *r*
C = matriz de *m X n*
D = matriz de *m X r*

Se dice que el sistema descrito mediante las ecuaciones (11-61) y (11-62) es de estado completamente controlable si es posible construir un vector de control sin restricciones u(t) que transfiera cualquier salida inicia1 determinada $\mathbf{y}(t_0)$ a cualquier salida fina1 $\mathbf{y}(t_1)$ en un intervalo de tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$.

Es posible demostrar que la condición para una controlabilidad completa de la salida es la siguiente: el sistema descrito mediante las ecuaciones (1141) y (11-62) es de salida completamente controlable si y sólo si la matriz de m X (n + 1)*r*

$$[\mathbf{CB} \mid \mathbf{CAB} \mid \mathbf{CA^2B} \quad \cdots \mid \mathbf{CA^{n-1}B} \mid \mathbf{D}]$$

es de rango *m.* (Para comprobarlo, véase el problema A-11-17.) Observe que la presencia del término **Du** en la ecuación (11-62) siempre ayuda a establecer la controlabilidad de la salida.

ll-7 OBSERVABILIDAD

En esta sección analizaremos la observabilidad de los sistemas lineales. Considere el sistema sin excitación descrito mediante las ecuaciones siguientes:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{11-63}$$

$$y = cx \tag{11-64}$$

en donde x = vector de estado (vector de dimensión n)
y = vector de salida (vector de dimensión m)
$\mathbf{A}$ = matriz de $n \times n$
C = matriz de m X n

Se dice que el sistema es completamente observable si el estado $\mathbf{x}(t_0)$ se determina a partir de la observación de y(t) durante un intervalo de tiempo finito, $t_0 \leq t \leq t_1$. Por tanto, el sistema es completamente observable si todas las transiciones del estado afectan eventualmente a todos los elementos del vector de salida. El concepto de observabilidad es útil al resolver el problema de reconstruir variables de estado no medibles a partir de variables que sí lo son en el tiempo mínimo posible. En esta sección, tratamos sólo sistemas lineales e invariantes con el tiempo. Por tanto, sin pérdida de la generalidad, suponemos que $t_0 = 0$.

El concepto de observabilidad es muy importante porque, en la práctica, la dificultad que se encuentra con el control mediante la realimentación del estado es que algunas de las variables de estado no son accesibles para una medición directa, por lo que se hace necesario estimar las variables de estado no medibles para construir las señales de control. En la sección 12-5 se demostrara que tales estimaciones de las variables de estado son posibles si y sólo si el sistema es completamente observable.

Al analizar condiciones de observabilidad, consideramos el sistema sin excitación como el que se obtiene mediante las ecuaciones (11-63) y (11-64). La razón de esto es la siguiente: si el sistema se describe mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

entonces

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Y $\mathbf{y}(t)$ es

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Dado que las matrices A, **B,** C y **D** se conocen al igual que u(t), los dos últimos términos del segundo miembro de esta última ecuación son cantidades conocidas. Por tanto, se pueden restar del valor observado de y(t). Así, a fin de investigar una condición necesaria y suficiente para la observabilidad completa, basta con considerar el sistema descrito mediante las ecuaciones (11-63) y (11-64).

Observabilidad completa de sistemas en tiempo continuo, Considere el sistema descrito mediante las ecuaciones (11-63) y (11–64), vuelto a escribir como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$y = cx$$

El vector de salida y(t) es

$$y(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

Remitiéndonos a la ecuación (11-48) u (11–50), tenemos que

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\mathbf{A}^k$$

Por tanto, obtenemos

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)$$

o bien

$$y(t) = \alpha_0(t)\mathbf{C}\mathbf{x}(0) + \alpha_1(t)\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}(0) \qquad (11\text{-}65)$$

Así, si el sistema es completamente observable, dada la salida y(t) durante un intervalo de tiempo $0 \leq t \leq t_1$, x(O) se determina únicamente a partir de la ecuación (11-65). Se demuestra que esto requiere que el rango de la matriz de ***nm X n***

$$\begin{vmatrix} \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \hline \\ \hline \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{vmatrix}$$

sea ***n.*** (Véase el problema A-ll-20 para la obtención de esta condición.)

A partir de este análisis, planteamos la condición para la observabilidad completa del modo siguiente: el sistema descrito mediante las ecuaciones (11-63) y (11-64) es completamente observable si y sólo si la matriz de ***n X nm***

$$[\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \cdots (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]$$

es de rango ***n,*** o tiene ***n*** vectores columna linealmente independientes. Ésta se denomina ***matriz de observabilidad.***

EJEMPLO 1 **l-l 4** Considere el sistema descrito mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = [1 \;\; 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

¿Es este sistema controlable y observable?

Dado que el rango de la matriz

$$[B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1_1 \end{bmatrix}$$

es 2, el sistema es de estado completamente controlable.

Para la controlabilidad de salida, encontremos el rango de la matriz [CB ¦ **CAB**]. Dado que

$$[CB \mid \mathbf{CAB}] = [0 \quad 1]$$

el rango de esta matriz es 1. Por tanto, el sistema tiene una salida completamente controlable.

Para probar la condición de observabilidad, examine el rango de [C* ¦ A*C*]. Dado que

$$[\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

el rango de [**C*** A*C*] es 2. Por tanto, el sistema es completamente observable.

Condiciones para la observabilidad completa en el plano s. Las condiciones para una observabilidad completa también se plantean en términos de las funciones de transferencia o las matrices de transferencia. La condición necesaria y suficiente para una observabilidad completa es que no ocurra una cancelación en la función de transferencia o en la matriz de transferencia. Si ocurre una cancelación, el modo cancelado no se puede observar de la salida.

EJEMPLO 11-15 Demuestre que el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = cx$$

en donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [4 \quad 5 \quad 1]$$

No es completamente observable. Tome en cuenta que la función de control u no afecta la observabilidad completa del sistema. Para examinar la observabilidad completa, simplemente establecemos $u = 0$. Para este sistema, tenemos que

$$[\mathbf{C}^* \quad A^*C^* \quad (\mathbf{A}^*)^2\mathbf{C}^*] \begin{bmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 5 & -7 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Considere que

$$\begin{vmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 5 & -7 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, el rango de la matriz [C* A*C* $(\mathbf{A}^*)^2\mathbf{C}^*$] es menor que 3. Así, el sistema no es completamente observable.

De hecho, en la función de transferencia del sistema ocurre una cancelación. La función de transferencia entre $X_1(s)$ y $U(s)$ es

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

y la función de transferencia entre Y(s) y Xi(s) es

$$\frac{Y(s)}{X_1(s)} = (s + 1)(s + 4)$$

Por tanto, la función de transferencia entre la salida $Y(s)$ y la entrada $U(s)$ es

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s + 1)(s + 4)}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

Es evidente que los dos factores $(s + 1)$ se cancelan uno al otro. Esto significa que no hay condiciones iniciales x(O) diferentes de cero que no se determinen a partir de la medición de y(f).

Comentarios. La función de transferencia no presenta cancelación si y sólo si el sistema es de estado completamente controlable y es completamente observable. Esto significa que la función de transferencia cancelada no transporta toda la información que caracteriza al sistema dinámico.

Forma alternativa de la condición para la observabilidad completa. Considere el sistema descrito mediante las ecuaciónes (11-63) y (11-64), vuelto a escribir como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{11-66}$$

$$y = cx \tag{11-67}$$

Suponga que la matriz de transformación P transforma A en una matriz diagonal, o

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$$

en donde **D** es una matriz diagonal. Defina

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z}$$

De esta forma, las ecuaciones (11-66) y (11-67) pueden escribirse

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} = \mathbf{D}\mathbf{z}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{z}$$

Por tanto,

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{z}(0)$$

o bien

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{P}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \mathbf{0} \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}\mathbf{z}(0) = \mathbf{C}\mathbf{P}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t}z_1(0) \\ e^{\lambda_2 t}z_2(0) \\ . \\ e^{\lambda_n t}z_n(0) \end{bmatrix}$$

El sistema es completamente observable si ninguna de las columnas de la matriz **CP** de $m \times n$ está formada sólo por elementos cero. Esto se debe a que, si la i-ésima columna de **CP** está formada sólo por elementos cero, la variable de estado $z_i(0)$ no aparecerá en la ecuación

de salida **y**, por tal razón, no puede determinarse a partir de la observación de y(t). En este caso, x(O), que se relaciona con z(O) mediante la matriz P no singular, no puede determinarse. (Recuerde que esta prueba sólo se aplica si la matriz $\mathbf{P^{-1}AP}$ está en forma diagonal.)

Si la matriz A no se transforma en una matriz diagonal, mediante una matriz de transformación S conveniente, convertimos A en la forma canónica de Jordan, o

$$\mathbf{S^{-1}AS = J}$$

en donde **J** está en la forma canónica de Jordan.

Definamos

$$x = \mathbf{Sz}$$

En este caso, las ecuaciones (11-66) y (11-67) pueden escribirse

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{S^{-1}ASz = Jz}$$

$$\mathbf{y = csz}$$

Por tanto,

$$y(t) = \mathbf{CS}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{z}(0)$$

El sistema es completamente observable si (1) no hay dos bloques de Jordan en **J** asociados con los mismos valores característicos, (2) no hay columnas de **CS** que correspondan al primer renglón de cada bloque de Jordan que estén formadas por elementos cero y (3) no hay columnas de **CS** que correspondan a valores característicos distintos que estén formadas por elementos cero.

Para aclarar la condición (2), en el ejemplo ll-16 hemos encerrado en un círculo de guiones las columnas de **CS** que corresponden al primer renglón de cada bloque de Jordan.

EJEMPLO ll-16 Los sistemas siguientes son completamente observables.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}, \qquad y = [1 \quad 3]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:cc} 2 & 1 & 0 & a & \\ 0 & 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ \hdashline & & & -3 & 1 \\ 0 & & & 0 & -3 \end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}$$

Los sistemas siguientes no son completamente observables.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}, \qquad y = [0 \quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:cc} 2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ \hdashline & & & -3 & 1 \\ 0 & & & 0 & -3 \end{array}\right] \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}$$

Principio de dualidad. Ahora analizaremos la relación entre la controlabilidad y la observabilidad. Introduciremos el principio de dualidad, presentado por Kalman, para aclarar las analogías evidentes entre la controlabilidad y la observabilidad.

Considere el sistema S_1 descrito mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$
$$y = cx$$

en donde x = vector de estado (vector de dimensión n)
u = vector de control (vector de dimensión r)
y = vector de salida (vector de dimensión m)
A = matriz de n X n
B = matriz de $n \times r$
C = matriz de $m \times n$

y el sistema dual S_2 definido mediante

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^*\mathbf{z} + \mathbf{C}^*\mathbf{v}$$
$$n = \mathbf{B}^*\mathbf{z}$$

en donde z = vector de estado (vector de dimensión n)
v = vector de control (vector de dimensión m)
n = vector de salida (vector de dimensión r)
A* = transpuesta conjugada de A
B* = transpuesta conjugada de B
C* = transpuesta conjugada de C

El principio de dualidad plantea que el sistema S_1 es de estado completamente controlable (observable) si y sólo si el sistema S_2 es de estado completamente observable (controlable).

Para verificar este principio, anotemos las condiciones necesarias y suficientes para la controlabilidad completa del estado y la observabilidad completa de los sistemas S_1 y S_2.

Para el sistema S_1:

1. Una condición necesaria y suficiente para la controlabilidad completa del estado es que el rango de la matriz de n X n

$$[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

sea n.

2. Una condición necesaria y suficiente para la observabilidad completa es que el rango de la matriz de n X nm

$$[\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \mid \cdots \mid (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]$$

sea n.

Para el sistema S_2:

1. Una condición necesaria y suficiente para la controlabilidad completa del estado es que el rango de la matriz de n X nm

$$[\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \mid \cdots \mid (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]$$

sea n.

2. Una condición necesaria y suficiente para la observabilidad completa es que el rango de la matriz de n X nr

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

sea n.

Comparando estas condiciones, la verdad de este principio es evidente. A partir de él, la observabilidad de un sistema determinado se verifica probando la controlabilidad del estado de su dual.

EJEMPLO DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

A-ll-l. Considere el sistema representado mediante la función de transferencia definido mediante la ecuación (ll-2), vuelto a escribir como

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \tag{11-68}$$

Obtenga la siguiente forma canónica controlable de la representación en el espacio de estados para este sistema representado mediante la función de transferencia:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_1 \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{11-69}$$

$$y = [b_n - a_n b_0 \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \quad \cdots \mid b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \tag{11-70}$$

Solución. La ecuación (11-68) puede escribirse como

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{(b_1 - a_1 b_0)s^{n-1} + \cdots + (b_{n-1} - a_{n-1} b_0)s + (b_n - a_n b_0)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

que puede modificarse a

$$Y(s) = b_0 U(s) + \hat{Y}(s) \tag{11-71}$$

en donde

$$\hat{Y}(s) = \frac{(b_1 - a_1 b_0)s^{n-1} + \ldots + (b_{n-1} - a_{n-1} b_0)s + (b_n - a_n b_0)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n} U(s)$$

Volvamos a escribir esta última ecuación en la forma siguiente:

$$\frac{\hat{Y}(s)}{(b_1 - a_1 b_0)s^{n-1} + \ldots + (b_{n-1} - a_{n-1} b_0)s + (b_n - a_n b_0)} = \frac{U(s)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n} = Q(s)$$

A partir de esta última ecuación, se obtienen las dos ecuaciones siguientes:

$$s^n Q(s) = -a_1 s^{n-1} Q(s) - \ldots - a_{n-1} s Q(s) - a_n Q(s) + U(s) \tag{11-72}$$

$$\hat{Y}(s) = (b_1 - a_1 b_0)s^{n-1} Q(s) + \ldots + (b_{n-1} - a_{n-1} b_0)s Q(s) + (b_n - a_n b_0)Q(s) \tag{11-73}$$

Ahora defina las variables de estado del modo siguiente:

$$X_1(s) = Q(s)$$
$$X_2(s) = sQ(s)$$

$$X_{n-1}(s) = s^{n-2} Q(s)$$
$$X_n(s) = s^{n-1} Q(s)$$

Así, es evidente que

$$sX_1(s) = X_2(s)$$
$$sX_2(s) = X_3(s)$$

$$sX_{n-1}(s) = X_n(s)$$

lo cual puede volver a escribirse como

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$

(11-74)

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

Considerando que $s^nQ(s) = sX_n(s)$, la ecuación (11-72) se puede reescribir como

$$sX_n(s) = -a_1X_n(s) - \cdots - a_{n-1}X_2(s) - a_nX_1(s) + U(s)$$

o bien

$$\dot{x}_n = -a_nx_1 - a_{n-1}x_2 - \cdots - a_1x_n + u \tag{11-75}$$

Asimismo, a partir de las ecuaciones (11-71) y (11-73) obtenemos

$$\begin{aligned} Y(s) &= b_0U(s) + (b_1 - a_1b_0)s^{n-1}Q(s) + \cdots + (b_{n-1} - a_{n-1}b_0)sQ(s) \\ &\quad + (b_n - a_nb_0)Q(s) \\ &= b_0U(s) + (b_1 - a_1b_0)X_n(s) + \cdots + (b_{n-1} - a_{n-1}b_0)X_2(s) \\ &\quad + (b_n - a_nb_0)X_1(s) \end{aligned}$$

La transformada inversa de Laplace de esta ecuación de salida se vuelve

$$y = (b_n - a_nb_0)x_1 + (b_{n-1} - a_{n-1}b_0)x_2 + \cdots + (b_1 - a_1b_0)x_n + b_0u \tag{11-76}$$

Combinando las ecuaciones (11-74) y (11-75) en una ecuación diferencial matricial, obtenemos la ecuación (11-69). La ecuación (11-76) puede reescribirse como la obtenida mediante la ecuación (11-70). Se dice que las ecuaciones (11-69) y (11-70) están en la forma canónica controlable. La figura 11–1 muestra la representación en diagrama de bloques del sistema definido mediante las ecuaciones (11-69) y (11-70).

A-11-2. Considere el sistema representado mediante la función de transferencia siguiente:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0s^n + b_1s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \tag{11-77}$$

Obtenga la siguiente forma canónica observable de la representación en el espacio de estados para este sistema representado mediante la función de transferencia:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_nb_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1}b_0 \\ \\ b_1 - a_1b_0 \end{bmatrix} u \tag{11-78}$$

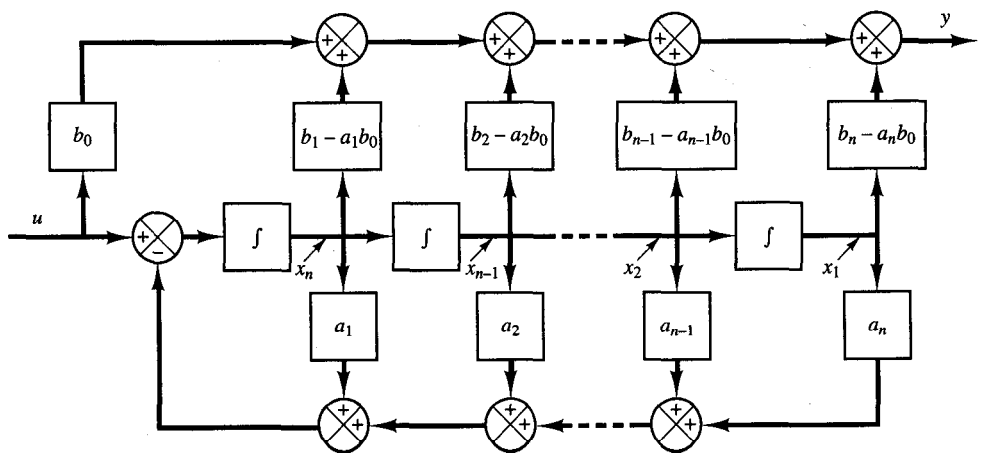


Figura 11–1
Representación en diagrama de bloques del sistema definido mediante las ecuaciones (11-69) y (11-70) (forma canónica controlable).

$$y = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{vmatrix} + b_0 u \tag{11-79}$$

Solución. La ecuación (11-77) puede modificarse a

$$s^n[Y(s) - b_0U(s)] + s^{n-1}[a_1Y(s) - b_1U(s)] + \cdots$$
$$+ s[a_{n-1}Y(s) - b_{n-1}U(s)] + a_nY(s) - b_nU(s) = 0$$

Dividiendo la ecuación completa entre s^n y volviendo a ordenar, obtenemos

$$Y(s) = b_0U(s) + \frac{1}{s}[b_1U(s) - a_1Y(s)] + \cdots$$
$$+ \frac{1}{s^{n-1}}[b_{n-1}U(s) - a_{n-1}Y(s)] + \frac{1}{s^n}[b_nU(s) - a_nY(s)] \tag{11-80}$$

Ahora definimos las variables de estado del modo siguiente:

$$X_n(s) = \frac{1}{s}[b_1U(s) - a_1Y(s) + X_{n-1}(s)]$$

$$X_{n-1}(s) = \frac{1}{s}[b_2U(s) - a_2Y(s) + X_{n-2}(s)] \tag{11-81}$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s}[b_{n-1}U(s) - a_{n-1}Y(s) + X_1(s)]$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s}[b_nU(s) - a_nY(s)]$$

Así, la ecuación (11–80) se puede escribir como

$$Y(s) = b_0U(s) + X_n(s) \tag{11-82}$$

Sustituyendo la y(s) de la ecuación (11-81) por la ecuación (11-82) y multiplicando ambos miembros de la ecuación por s, obtenemos

$$sX_n(s) = X_{n-1}(s) - a_1X_n(s) + (b_1 - a_1b_0)U(s)$$
$$sX_{n-1}(s) = X_{n-2}(s) - a_2X_n(s) + (b_2 - a_2b_0)U(s)$$

$$sX_2(s) = X_1(s) - a_{n-1}X_n(s) + (b_{n-1} - a_{n-1}b_0)U(s)$$
$$sX_1(s) = -a_nX_n(s) + (b_n - a_nb_0)U(s)$$

Tomando las transformadas inversas de Laplace de las n ecuaciones precedentes y escribiéndolas en el orden inverso, obtenemos

$$\dot{x}_1 = -a_n x_n + (b_1 - a_n b_0)u$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - a_{n-1} x_n + (b_{n-1} - a_{n-1} b_0)u$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_{n-2} - a_2 x_n + (b_2 - a_2 b_0)u$$
$$\dot{x}_n = x_{n-1} - a_1 x_n + (b_1 - a_1 b_0)u$$

Asimismo, la transformada inversa de Laplace de la ecuación (11-82) produce

$$\dot{y} = x_n + b_0 u$$

Si reescribimos las ecuaciones de estado y de salida en las formas estándar matricial, obtenemos las ecuaciones (11-78) y (11-79). La figura ll-2 muestra una representación en diagrama de bloques del sistema definido mediante las ecuaciones (11-78) y (11-79).

A-11-3. Considere el sistema representado mediante la función de transferencia definido mediante

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{(s + p_1)(s + p_2)\cdots(s + p_n)}$$
$$= b_0 + \frac{c_1}{s + p_1} + \frac{c_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s + p_n} \qquad (11\text{-}83)$$

en donde $p_i \neq p_j$. Obtenga la representación en el espacio de estados de este sistema en la forma canónica diagonal siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & & 0 \\ & -p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad (11\text{-}84)$$

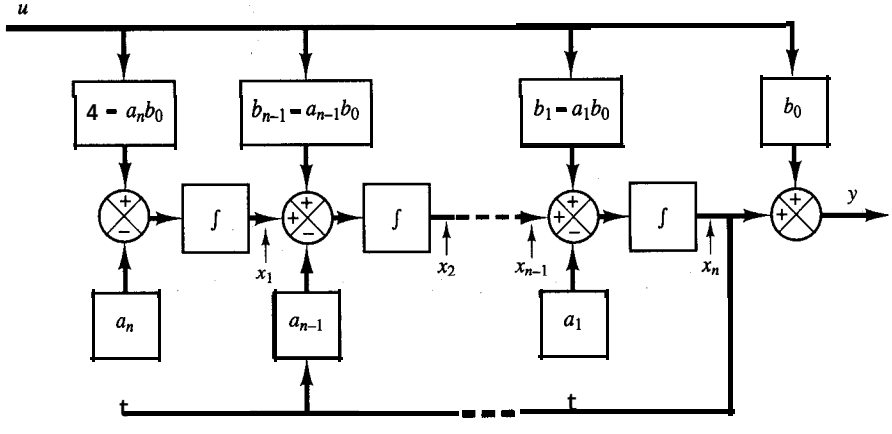


Figura ll-2
Representación en diagrama de bloques del sistema definido mediante las ecuaciones (11-78) y (11-79) (forma canónica observable).

$$y = [c_1 \; c_2 \; \cdots \; c_n] \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} + b_0 u \tag{11-85}$$

Solución. La ecuación (11-83) puede escribirse como

$$Y(s) = b_0 U(s) + \frac{c_1}{s + p_1} U(s) + \frac{c_2}{s + p_2} U(s) + \cdots + \frac{c_n}{s + p_n} U(s) \tag{11-86}$$

Definamos las variables de estado del modo siguiente:

$$X_1(s) = \frac{1}{s + p_1} U(s)$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s + p_2} U(s)$$

$$X_n(s) = \frac{1}{s + Pn} U(s)$$

lo cual se puede reescribir como

$$sX_1(s) = -p_1 X_1(s) + U(s)$$

$$sX_2(s) = -p_2 X_2(s) + U(s)$$

$$sX_n(s) = -p_n X_n(s) + U(s)$$

Las transformadas inversas de Laplace de estas ecuaciones producen

$$\dot{x}_1 = -p_1 x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = -p_2 x_2 + u$$

$$\dot{x}_n = -p_n x_n + u \tag{11-87}$$

Estas n ecuaciones forman una ecuación de estado.

En términos de las variables de estado $X_1(s)$, $X_2(s)$, . . . , $X_n(s)$, la ecuación (11-86) se escribe como

$$Y(s) = b_0 U(s) + c_1 X_1(s) + c_2 X_2(s) + \cdots + c_n X_n(s)$$

La transformada inversa de Laplace de esta última ecuación es

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + b_0u \tag{11-88}$$

que es la ecuación de salida.

La ecuación (11-87) se expresa en forma matricial como la obtenida mediante la ecuación (11-84). La ecuación (11-88) se expresa en la forma de la ecuación (11-85).

La figura 11-3 muestra una representación en diagrama de bloques del sistema definido mediante las ecuaciones (11-84) y (11-85).

Observe que, si elegimos las variables de estado como

$$\hat{X}_1(s) = \frac{c_1}{s + p_1} U(s)$$

$$\hat{X}_2 = \frac{c_2}{s + p_2} U(s)$$

$$\hat{X}_n(s) = \frac{c_n}{s + p_n} U(s)$$

entonces obtenemos una representación en el espacio de estados ligeramente diferente. Esta elección de variables de estado produce

$$s\hat{X}_1(s) = -p_1\hat{X}_1(s) + c_1U(s)$$

$$s\hat{X}_2(s) = -p_2\hat{X}_2(s) + c_2U(s)$$

$$s\hat{X}_n(s) = -p_n\hat{X}_n(s) + c_nU(s)$$

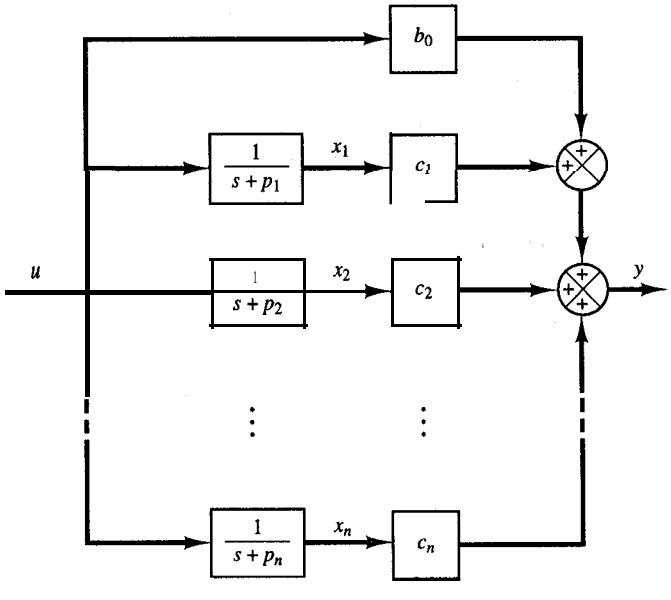


Figura 11-3
Representación en diagrama de bloques del sistema definido mediante las ecuaciones (11-84) y (11-85) (forma canónica diagonal).

a partir de lo cual obtenemos

$$\dot{\hat{x}}_1 = -p_1\hat{x}_1 + c_1u$$
$$\dot{\hat{x}}_2 = -p_2\hat{x}_2 + c_2u$$

(11-89)

$$\dot{\hat{x}}_n = -p_n\hat{x}_n + c_nu$$

Remitiéndonos a la ecuación (11–86), la ecuación de salida se vuelve

$$Y(s) = b_0U(s) + \hat{X},(s) + \hat{X}_2(s) + \ldots + \hat{X}_n(s)$$

a partir de lo cual obtenemos

$$y = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \cdots + \hat{x}_n + b_0u \tag{11-90}$$

Las ecuaciones (11–89) y (11-90) producen la siguiente representación en el espacio de estados para el sistema.

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{\hat{x}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & & 0 \\ & -p_2 & & \\ & & & \\ 0 & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} U$$

$$y = [1 \; 1 \; \ldots \; 1] \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} + b_0u$$

A-11-4 Considere el sistema definido mediante

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0s^n + b_1s^{n-1} + \ldots + b_{n-1}s + b_n}{(s + p_1)^3(s + p_4)(s + p_5)\cdots(s + p_n)} \tag{11-91}$$

que contiene un polo triple en $s = -p_1$. (Suponemos que, excepto por las tres primeras p_i que son iguales, las p_i son, diferentes entre sí.) Obtenga la forma canónica de Jordan de la representación en el espacio de estados para este sistema.

Solución. La expansión en fracciones parciales de la ecuación (11-91) se convierte en

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{c_1}{(s + p_1)^3} + \frac{c_2}{(s + p_1)^2} + \frac{c_3}{s + p_1} + \frac{c_4}{s + p_4} + \cdots + \frac{c_n}{s + p_n}$$

que puede escribirse como

$$Y(s) = b_0U(s) + \frac{c_1}{(s + p_1)^3}U(s) + \frac{c_2}{(s + p_1)^2}U(s) + \frac{c_3}{s + p_1}U(s) + \frac{c_4}{s + p_4}U(s) + \cdots + \frac{c_n}{s + p_n}U(s) \tag{11–92}$$

Definamos

$$X_1(s) = \frac{1}{(s + p_1)^3} U(s)$$

$$X_2(s) = \frac{1}{(s + p_1)^2} U(s)$$

$$X_3(s) = \frac{1}{s + p_1} U(s)$$

$$X_4(s) = \frac{1}{s + p_4} U(s)$$

$$X_n(s) = \frac{1}{s + p_n} U(s)$$

Considerando que existen las relaciones siguientes entre $X_1(s)$, $X_2(s)$ y $X_3(s)$:

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{1}{s + p_1}$$

$$\frac{X_2(s)}{X_3(s)} = \frac{1}{s + p_1}$$

entonces, a partir de la definición anterior de las variables de estado y las relaciones precedentes, obtenemos

$$sX_1(s) = -p_1X_1(s) + X_2(s)$$

$$sX_2(s) = -p_1X_2(s) + X_3(s)$$

$$sX_3(s) = -p_1X_3(s) + U(s)$$

$$sX_4(s) = -p_4X_4(s) + U(s)$$

$$sX_n(s) = -p_nX_n(s) + U(s)$$

Las transformadas inversas de **Laplace** de las n ecuaciones precedentes producen

$$\dot{x}_1 = -p_1x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -p_1x_2 + x_3$$

$$\dot{x}_3 = -p_1x_3 + u$$

$$\dot{x}_4 = -p_4x_4 + u$$

$$\dot{x}_n = -p_nx_n + u$$

La ecuación de salida, ecuación (11–92), se puede reescribir como

$$Y(s) = b_0U(s) + c_1X_1(s) + c_2X_2(s) + c_3X_3(s) + c_4X_4(s) + \ldots + c_nX_n(s)$$

La transformada inversa de Laplace de esta ecuación de salida es

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + \cdots + c_nx_n + b_0u$$

Por tanto, la representación en el espacio de estados del sistema para el caso en el que el polinomio del denominador contiene una raíz triple $-p_1$ se obtiene del modo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} -p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & \cdots & 0 & -p_4 & & \\ \cdot & & \cdot & & & \\ \cdot & & \cdot & & & \\ \cdot & & \cdot & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & -p_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \\ \\ \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \\ \\ \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad (11\text{-}93)$$

$$Y = [c_1 \; c_2 \; \cdots \; c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ x_n \end{bmatrix} + b_0u \qquad (11\text{-}94)$$

Se dice que la representación en el espacio de estados en la forma obtenida mediante las ecuaciones (11-93) y (11-94) está en la forma canónica de Jordan. La figura 11-4 muestra una representación en diagrama de bloques de dicho sistema.

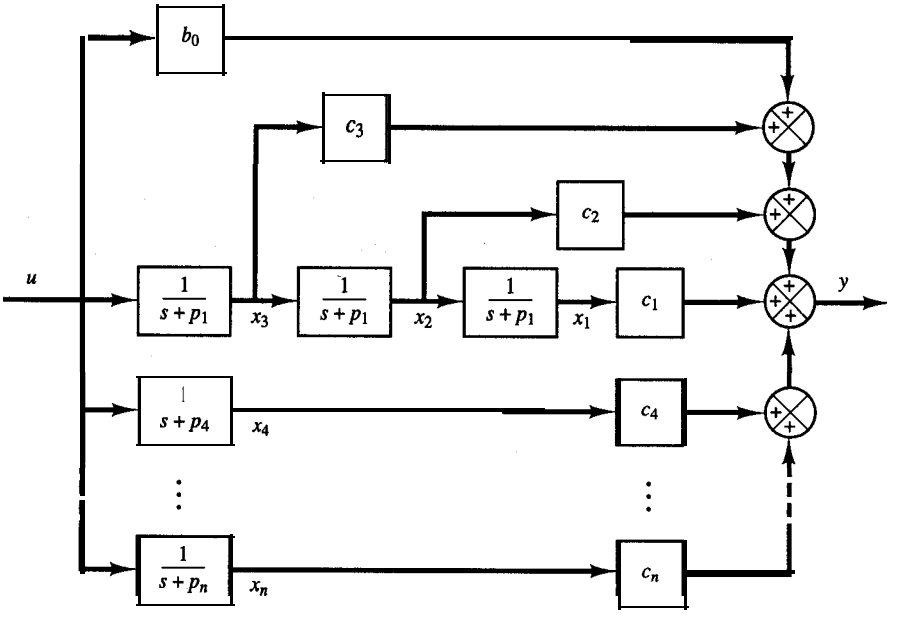


Figura **11–4** Representación en diagrama de bloques del sistema definido mediante las ecuaciones (11-93) y (11-94) (forma canónica de Jordan).

A-ll-S. Considere el sistema representado mediante la función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{25.04s + 5.008}{s^3 + 5.03247s^2 + 25.1026s + 5.008}$$

Obtenga con MATLAB una representación en el espacio de estados de este sistema.

Solución. El comando de MATLAB

```
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den)
```

producirá una representación en el espacio de estados para el sistema. Véase el programa MATLAB 11-3.

Programa de MATLAB 11-3

```
num = [0  0  25.04  5.008];
den = [1  5.03247  25.1026  5.008];
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den)

A =

   -5.0325   -25.1026   -5.0080
    1.0000         0         0
         0    1.0000         0

B =

     1
     0
     0

C =

         0   25.0400    5.0080

D =

     0
```

Ésta es la representación de MATLAB de las ecuaciones en el espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.0325 & -25.1026 & -5.008 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 25.04 \quad 5.0081] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0]u$$

A-11-6. Considere el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

en donde x = vector de estado (vector de dimensión n)
u = vector de control (vector de dimensión r)
A = matriz de coeficientes constantes de n X n
B = matriz de coeficientes constantes de n X r

Obtenga la respuesta del sistema a cada una de las entradas siguientes:

(a) Los r componentes de u son funciones impulso de diferentes magnitudes.

(b) Los r componentes de u son funciones escalón de diversas magnitudes.

(c) Los r componentes de u son funciones rampa de distintas magnitudes.

Solución. **(a)** ***Respuesta impulso:*** remitiéndonos a la ecuación (11–43), la solución de la ecuación de estado determinada es

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

Sustituyendo t_0 por 0- dentro de esta solución, obtenemos

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0-) + \int_{0-}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

Escribamos la entrada impulso u(t) como

$$u(t) = \delta(t)\mathbf{w}$$

en donde w es un vector cuyos componentes son las magnitudes de las r funciones impulso aplicadas en $t = 0$. La solución de la ecuación de estado cuando se tiene la entrada impulso $\delta(t)\mathbf{w}$ en $t = 0$ es

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0-) + \int_{0-}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\delta(\tau)\mathbf{w}\,d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0-) + e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{w}\end{aligned} \tag{11-95}$$

(b) ***Respuesta escalón:*** escribamos la entrada escalón u(t) como

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{k}$$

en donde k es un vector cuyos componentes son las magnitudes de las r funciones escalón aplicadas en $t = 0$. La solución a la entrada escalón en $t = 0$ se obtiene mediante

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_{0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{k}\,d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t}\left[\int_0^t \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}\tau + \frac{\mathbf{A}^2\tau^2}{2!} - \cdots\right) d\tau\right]\mathbf{B}\mathbf{k} \\ &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t}\left(\mathbf{I}t - \frac{\mathbf{A}t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^2t^3}{3!} - \cdots\right)\mathbf{B}\mathbf{k}\end{aligned}$$

Si A es no singular, entonces esta última ecuación se simplifica para producir

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t}[-(\mathbf{A}^{-1})(e^{-\mathbf{A}t} - \mathbf{I})]\mathbf{B}\mathbf{k} \\ &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I})\mathbf{B}\mathbf{k}\end{aligned} \tag{11-96}$$

(c) Respuesta rampa: escribamos la entrada rampa u(t) como

$$\mathbf{u}(t) = t\mathbf{v}$$

en donde v es un vector cuyos componentes son magnitudes de funciones rampa aplicadas en $t = 0$. La solución a la entrada rampa $t\mathbf{v}$ aplicada en $t = 0$ es

$$x(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\tau\mathbf{v}\, d\tau$$

$$= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\tau\, d\tau\, \mathbf{B}\mathbf{v}$$

$$= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t}\left(\frac{\mathbf{I}}{2}t^2 - \frac{2\mathbf{A}}{3!}t^3 + \frac{3\mathbf{A}^2}{4!}t^4 - \frac{4\mathbf{A}^3}{5!}t^5 + \cdots\right)\mathbf{B}\mathbf{v}$$

Si **A** es no singular, esta última ecuación se simplifica para producir

$$x(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + (\mathbf{A}^{-2})(e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I} - \mathbf{A}t)\mathbf{B}\mathbf{v}$$

$$= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + [\mathbf{A}^{-2}(e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{1}) - \mathbf{A}^{-1}t]\,\mathbf{B}\mathbf{v} \qquad (11\text{-}97)$$

A-11-7. Obtenga la respuesta $y(t)$ del sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -0.5\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.5\\ 0\end{bmatrix}u, \qquad \begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$y = [1\ 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

en donde $u(t)$ es la entrada escalón unitario que ocurre en $t = 0$, o

$$u(t) = 1(t)$$

Solución. Para este sistema

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}-1 & -0.5\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix}0.5\\ 0\end{bmatrix}$$

La matriz de transición de estados $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$ puede obtenerse del modo siguiente:

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

Dado que

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix}s+1 & 0.5\\ -1 & s\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + s + 0.5}\begin{bmatrix}s & -0.5\\ 1 & s+1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\dfrac{s+0.5}{(s+0.5)^2 + 0.5^2} & \dfrac{0.5}{(s+0.5)^2 + 0.5^2}\\[2ex] \dfrac{-1}{(s+0.5)^2 + 0.5^2} & \dfrac{s+0.5}{(s+0.5)^2 + 0.5^2}\end{bmatrix}$$

tenemos que

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

$$= \begin{bmatrix}e^{-0.5t}(\cos 0.5t - \operatorname{sen} 0.5t) & -e^{-0.5t}\operatorname{sen} 0.5t\\ 2e^{-0.5t}\operatorname{sen} 0.5t & e^{-0.5t}(\cos 0.5t - \operatorname{sen} 0.5t)\end{bmatrix}$$

Dado que x(O) = 0, remitiéndonos a la ecuación (11–96), tenemos que

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I})\mathbf{B}k \\ &= \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I})\mathbf{B} \\ &= \begin{bmatrix} & \\ -2.0 & -2.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \\ 0.5\, e^{-0.5t}(\cos 0.5t - \sin 0.5t) - 0.5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-0.5t}\operatorname{sen}\ 0.5t \\ -e^{-0.5t}(\cos 0.5t + \operatorname{sen}\ 0.5t) + 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto, la salida y(t) se obtiene mediante

$$y(t) = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 = e^{-0.5t}\ \operatorname{sen}\ 0.5\ t$$

A-11-8. El teorema de Cayley-Hamilton plantea que toda matriz A de n X n satisface su propia ecuación característica. Sin embargo, la ecuación característica no es necesariamente la ecuación escalar de grado mínimo que satisface A. El polinomio de grado mínimo que tiene A como raíz se denomina ***polinomio mínimo.*** Es decir, el polinomio mínimo de una matriz A de n X n se define como el polinomio $\phi(\lambda)$, de grado mínimo,

$$\phi(\lambda) = \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\lambda + a_m, \qquad m \leq n$$

tal que $\phi(\mathbf{A}) = 0$, o

$$\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^m + a_1\mathbf{A}^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\mathbf{A} + a_m\mathbf{I} = 0$$

El polinomio mínimo juega un papel importante en el cálculo de polinomios de una matriz de ***n X n.***

Supongamos que d(A), polinomio en λ, es el máximo común divisor de todos los elementos de $\operatorname{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathrm{A})$. Demuestre que, si se selecciona 1 como el coeficiente del término de d(A) de mayor grado en λ, el polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ se obtiene mediante

$$\phi(\lambda) = \left|\frac{\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}}{d(\lambda)}\right|$$

Solución. Suponiendo que el máximo común divisor de la matriz $\operatorname{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathrm{A})$ es d(A). Por tanto,

$$\operatorname{adj}(\mathrm{AI} - \mathrm{A}) = d(\lambda)\mathbf{B}(\lambda)$$

en donde el máximo común divisor de los n^2 elementos (que son funciones de λ) de B(A) es la unidad. Dado que

$$(\mathrm{AI} - \mathrm{A})\ \operatorname{adj}(\mathrm{AI} - \mathrm{A}) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|\mathbf{I}$$

obtenemos

$$d(\lambda)(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|\mathbf{I} \tag{11-98}$$

a partir de lo cual encontramos que $|\lambda\mathbf{I} - \mathrm{A}$ es divisible entre d(A). Escribamos

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = d(\lambda)\psi(\lambda) \tag{11-99}$$

Debido a que se ha elegido 1 como el coeficiente del término de d(A) de mayor grado en λ, también es 1 el coeficiente del término de $\psi(\lambda)$ de mayor grado en λ. A partir de las ecuaciones (11-98) y (ll-99), tenemos que

$$(\mathbf{AI} - \mathbf{A})\mathbf{B}(\lambda) = \psi(\lambda)\mathbf{I}$$

Por tanto,

$$\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

Observe que $\psi(\lambda)$ se escribe del modo siguiente:

$$\psi(\lambda) = g(\lambda)\phi(\lambda) + \alpha(\lambda)$$

en donde *a(A)* tiene un grado menor que $\phi(\lambda)$. Dado que $\psi(\mathbf{A}) = 0$ y $\phi(\mathbf{A}) = 0$, debemos tener $\mathbf{a(A)} = 0$. Dado que $\phi(\lambda)$ es el polinomio mínimo, *a(A)* debe ser idénticamente cero, o

$$\psi(\lambda) = g(\lambda)\phi(\lambda)$$

Observe que, debido a que $\phi(\mathbf{A}) = 0$, escribimos

$$\phi(\lambda)\mathbf{I} = (\mathrm{AI} - \mathbf{A})\mathbf{C}(\lambda)$$

Por tanto,

$$\psi(\lambda)\mathbf{I} = g(\lambda)\phi(\lambda)\mathbf{I} = g(\lambda)(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{C}(\lambda)$$

y obtenemos

$$\mathbf{B}(\lambda) = g(\lambda)\mathbf{C}(\lambda)$$

Observe que el máximo común divisor de los n^2 elementos de B(A) es la unidad. Por tanto,

$$g(\lambda) = 1$$

Así,

$$\psi(\lambda) = \phi(\lambda)$$

Por tal razón, a partir de esta última ecuación y de la ecuación (11–99), obtenemos

$$\phi(\lambda) = \frac{|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|}{d(\lambda)}$$

A-11-9. Si una matriz **A** de *n X n* tiene *n* valores caracterfsticos distintos, el polinomio mínimo de **A es idéntico** que el polinomio característico. Asimismo, si se enlazan en una cadena de Jordan los valores caracterfsticos múltiples de A, el polinomio mínimo y el polinomio caracterfstico son idénticos. Sin embargo, si los valores caracterfsticos múltiples de A no se enlazan en una cadena de Jordan, el polinomio mínimo es de un grado menor que el polinomio característico.

Usando como ejemplos las siguientes matrices **A** y **B,** verifique los enunciados anteriores con respecto al polinomio mínimo cuando están implícitos valores caracterfsticos múltiples.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución. Primero considere la matriz **A.** El polinomio caracterfstico se obtiene mediante

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -4 \\ 0 & \text{`A} - 2 & 0 \\ 0 & -3 & \mathrm{A} - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$$

De esta manera, los valores característicos de A son $2, 2$ y 1. Se puede demostrar que la forma canónica de Jordan de A es

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1_1 \end{bmatrix}$$

y que los valores caracterfsticos múltiples están enlazados en la cadena de Jordan como se observa.

Para determinar el polinomio mínimo, primero obtengamos $\mathbf{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Esto se logra mediante

$$\text{adj } (\text{AI} - \text{A}) = \begin{bmatrix} (\lambda - 2)(\lambda - 1) & (\lambda + 1\text{l}) & 4(\lambda - 2) \\ 0 & (\lambda - 2)(\lambda - 1) & 0 \\ 0 & 3(\lambda - 2) & (\lambda - 2)^2 \end{bmatrix}$$

Observe que no hay un común divisor de todos los elementos de adj (AI - A). Por tanto, d(h) = 1. Así, el polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ es idéntico al polinomio caracterfstico, o

$$\phi(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$$
$$= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$$

Un cálculo simple demuestra que

$$\mathbf{A}^3 - 5\mathbf{A}^2 + 8\text{A} - 4\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

pero

$$\mathbf{A}^2 - 3\text{A} + 2\mathbf{I} \neq 0$$

Por tanto, hemos demostrado que el polinomio mínimo y el polinomio caracterfstico de esta matriz A son iguales.

A continuación, considere la matriz B. El polinomio característico se obtiene mediante

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B}| = \begin{vmatrix} \text{A-2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & -3 & \text{A} - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$$

Un cálculo simple revela que la matriz B tiene tres vectores caracterfsticos y la forma canónica de Jordan de B se obtiene mediante

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, los valores caracterfsticos múltiples no están enlazados Para obtener el polinomio mínimo, primero calculamos $\mathbf{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B})$:

$$\text{adj } (\text{AI} - \text{B}) = \begin{bmatrix} (\lambda - 2)(\lambda - 1) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda - 2)(\lambda - 1) & 0 \\ 0 & 3(\lambda - 2) & (\lambda - 2)^2 \end{bmatrix}$$

a partir de lo cual es evidente que

$$\text{d(A)} = \lambda - 2$$

Por tanto,

$$\phi(\lambda) = \frac{|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B}|}{d(\lambda)} = \frac{(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)}{\text{A - 2}} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

Como una comprobación, calculemos $\phi(\mathbf{B})$:

$$\phi(\mathbf{B}) = \mathbf{B}^2 - 3\mathbf{B} + 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para la matriz B determinada, el polinomio mínimo es un grado menor que el polinomio característico. Como se observa aquí, si no están enlazados valores característicos múltiples de una matriz de $n \times n$ en una cadena de Jordan, el polinomio mínimo es de un grado menor que el polinomio característico.

A-ll-lo. Demuestre mediante el polinomio mínimo, que la inversa de una matriz **A** no singular se expresa como un polinomio en **A** con coeficientes escalares, del modo siguiente:

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{a_m}(\mathbf{A}^{m-1} + a_1\mathbf{A}^{m-2} + \cdots + a_{m-2}\mathbf{A} + a_{m-1}\mathbf{I}) \qquad (11\text{-}100)$$

en donde $a_1, a_2, \ldots, a_m$ son coeficientes del polinomio mínimo

$$\phi(\lambda) = \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m$$

Luego, obtenga la inversa de la matriz A siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución. Para una matriz **A** no singular, el polinomio mínimo $\phi(\mathbf{A})$ se escribe como

$$\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^m + a_1\mathbf{A}^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\mathbf{A} + a_m\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

en donde $a_m \neq 0$. Por tanto,

$$\mathbf{I} = -\frac{1}{a_m}(\mathbf{A}^m + a_1\mathbf{A}^{m-1} + \cdots + a_{m-2}\mathbf{A}^2 + a_{m-1}\mathbf{A})$$

Premultiplicando por $\mathbf{A}^{-1}$, obtenemos

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{a_m}(\mathbf{A}^{m-1} + a_1\mathbf{A}^{m-2} + \cdots + a_{m-2}\mathbf{A} + a_{m-1}\mathbf{I})$$

que es la ecuación (11-100).

Para la matriz **A** determinada, $\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \text{A})$ se obtiene como

$$\text{adj (AI} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 4\text{A} + 3 & 2\text{A} + 6 & -4 \\ 3\lambda + 7 & \lambda^2 + 2\lambda - 3 & -2\text{A} + 2 \\ \lambda + 1 & 2 & \lambda^2 - 7 \end{bmatrix}$$

Es evidente que no hay un común divisor $d(A)$ de todos los elementos de $\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \text{A})$. Por tanto, $d(A) = 1$. En consecuencia, el polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ se obtiene mediante

$$\phi(\lambda) = \frac{|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|}{d(\lambda)} = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|$$

Así, el polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ es igual que el polinomio característico.

Dado que el polinomio característico es

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 7\lambda - 17$$

obtenemos

$$\phi(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 7\lambda - 17$$

Si identificamos los coeficientes a_i del polinomio mínimo (que en este caso es igual al polinomio característico), tenemos que

$$a_1 = 3, \qquad a_2 = -7, \qquad a_3 = -17$$

Así, la inversa de $\mathbf{A}$ se obtiene a partir de la ecuación (11–100) del modo siguiente:

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{a_3}(\mathbf{A}^2 + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{I}) = \frac{1}{17}(\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} - 7\mathbf{I})$$

$$= \frac{1}{17}\left\{\begin{bmatrix} 7 & 0 & -4 \\ -2 & 7 & 8 \\ -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 3 & 6 & -4 \\ -1 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{17} & \frac{6}{17} & -\frac{4}{17} \\ -\frac{1}{17} & -\frac{3}{17} & -\frac{2}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{2}{17} & \frac{7}{17} \end{bmatrix}$$

A-11-11. Demuestre que si se diagonaliza la matriz A, entonces

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1}$$

en donde **P es** una matriz de transformación de diagonalización que convierte A en una matriz diagonal, **o** $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ = D, en donde D es una matriz diagonal.

Demuestre también que si una matriz **A** se transforma a la forma canónica de Jordan, entonces

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{S}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{S}^{-1}$$

en donde S es una matriz de transformación que convierte A en una forma canónica de Jordan J, o $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}$ = J, en donde J es una forma canónica de Jordan.

Solución. Considere la ecuación de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Si se diagonaliza una matriz cuadrada, entonces existe una matriz de diagonalización (una matriz de transformación) que se obtiene mediante un método estándar. Suponga que P es una matriz de **diagonalización** para **A.** Definamos

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}$$

Entonces

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{D}\hat{\mathbf{x}}$$

en donde **D es** una matriz diagonal. La solución de esta última ecuación es

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = e^{\mathbf{D}t}\hat{\mathbf{x}}(0)$$

Por tanto,

$$x(t) = P\%(t) = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(0)$$

Considerando que x(t) también se obtiene mediante la ecuación

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

obtenemos $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1}$, o

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{vmatrix}\mathbf{P}^{-1} \tag{11-101}$$

A continuación, consideraremos el caso en el que la matriz A se transforma a la forma canónica de Jordan. Vuelva a considerar la ecuación de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Obtenga primero una matriz de transformación S que convierta la matriz A a la forma canónica de Jordan para que

$$S\text{-}'AS = J$$

en donde J es una matriz en la forma canónica de Jordan. Ahora defina

$$x = \mathbf{S}\hat{\mathbf{x}}$$

Así

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\,\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\hat{\mathbf{x}}$$

La solución de esta última ecuación es

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = e^{\mathbf{J}t}\hat{\mathbf{x}}(0)$$

Por tanto,

$$x(t) = S\%(t) = \mathbf{S}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}(0)$$

Dado que la solución x(t) también se obtiene mediante la ecuación

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

llegamos a

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{S}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{S}^{-1}$$

Observe que $e^{\mathbf{J}t}$ es una matriz triangular [lo que significa que los elementos que están abajo (o arriba como puede ocurrir) de la diagonal principal son cero] cuyos elementos son $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}, \frac{1}{2}t^2e^{\lambda t}$ y así sucesivamente. Por ejemplo, si la matriz J está en la siguiente forma canónica de Jordan:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}$$

Asimismo. si

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_4 & 1 & \\ & & & 0 & \lambda_4 & \\ & & & & & \lambda_6 \\ 0 & & & & & \lambda_7 \end{bmatrix}$$

entonces

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & & & \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & & & \\ & & & e^{\lambda_4 t} & te^{\lambda_4 t} & \\ & & & 0 & e^{\lambda_4 t} & \\ & & & & & e^{\lambda_6 t} \quad 0 \\ 0 & & & & & 0 \quad e^{\lambda_7 t} \end{bmatrix}$$

A-11-12. Considere el polinomio siguiente en λ de grado $m - 1$, en donde suponemos que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ son distintos:

$$p_k(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_{k-1})(\lambda - \lambda_{k+1})\cdots(\lambda - \lambda_m)}{(\lambda_k - \lambda_1)\cdots(\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1})\cdots(\lambda_k - \lambda_m)}$$

en donde $k = 1, 2, \ldots, m$. Observe que

$$p_k(\lambda_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = k \\ 0, & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

Así, el polinomio f(A) de grado m 1,

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} f(\lambda_k) p_k(\lambda)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} f(\lambda_k) \frac{(\lambda - \lambda_1)\cdots(A - \lambda_{k-1})(\lambda - \lambda_{k+1})\cdots(\lambda - \lambda_m)}{(\lambda_k - \lambda_1)\cdots(\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1})\cdots(\lambda_k - \lambda_m)}$$

toma los valores $f(\lambda_k)$ en los puntos λ_k. Esta última ecuación se denomina la fórmula ***de interpolación de Lagrange.*** El polinomio f(A) de grado $m - 1$ se determina a partir de los m datos independientes $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_m)$. Es decir, el polinomio f(A) pasa por m puntos $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_m)$. Dado que $f(\lambda)$ es un polinomio de grado $m - 1$, está determinado en forma única. Cualquier otra representación del polinomio de grado $m - 1$ se reduce al polinomio de Lagrange ***f(A).***

Suponiendo que los valores característicos de una matriz A de $n \times n$ son distintos, sustituya λ por A en el polinomio $p_k(\lambda)$. Así obtenemos

$$p_k(\mathbf{A}) = \frac{(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}) \cdots (\mathbf{A} - \lambda_{k-1}\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_{k+1}\mathbf{I}) \cdots (\mathbf{A} - \lambda_m\mathbf{I})}{(\lambda_k - \lambda_1) \cdots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \cdots (\lambda_k - \lambda_m)}$$

Observe que $p_k(\mathbf{A})$ es un polinomio en $\mathbf{A}$ de grado $m - 1$. También considere que

$$p_k(\lambda_i\mathbf{I}) = \begin{cases} 1, & si\ i = k \\ 0, & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

Ahora defina

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{m} f(\lambda_k) p_k(\mathbf{A})$$

$$= \sum_{k=1}^{m} f(\lambda_k) \frac{(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}) \cdots (\mathbf{A} - \lambda_{k-1}\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_{k+1}\mathbf{I}) \cdots (\mathbf{A} - \lambda_m\mathbf{I})}{(\lambda_k - \lambda_1) \cdots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \cdots (\lambda_k - \lambda_m)} \tag{11-102}$$

La ecuación (11-102) se conoce como la fórmula de interpolación de Sylvester. La ecuación (11-102) es equivalente a la ecuación siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \mathbf{I} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m & \mathbf{A} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_m^2 & \mathbf{A}^2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \cdots & \lambda_m^{m-1} & \mathbf{A}^{m-1} \\ f(\lambda_1) & f(\lambda_2) & \cdots & f(\lambda_m) & f(\mathbf{A}) \end{vmatrix} = \mathbf{0} \tag{11-103}$$

Las ecuaciones (11-102) y (11-103) se usan con frecuencia para evaluar las funciones f(A) de la **matriz A,** por ejemplo, $(\mathrm{AI} - \mathbf{A})^{-1}$, $e^{\mathbf{A}t}$ y así sucesivamente. Observe que la ecuación (11-103) también puede escribirse

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{m-1} & f(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} & f(\lambda_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \cdots & \lambda_m^{m-1} & f(\lambda_m) \\ 1 & \mathbf{A} & \mathbf{A}^2 & \cdots & \mathbf{A}^{m-1} & \mathbf{f(A)} \end{vmatrix} = 0 \tag{11-104}$$

Demuestre que las ecuaciones (11-102) y (11-103) son equivalentes. Para simplificar los argumentos, suponga que $m = 4$.

Solución. La ecuación (11-103), en la que $m = 4$, se expande del modo siguiente:

$$\mathrm{A} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{I} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \mathbf{A} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & \mathbf{A}^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 & \mathbf{A}^3 \\ f(\lambda_1) & f(\lambda_2) & f(\lambda_3) & f(\lambda_4) & f(\mathbf{A}) \end{vmatrix}$$

$$= f(\mathbf{A}) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix} - f(\lambda_4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{I} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \mathbf{A} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \mathbf{A}^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \mathbf{A}^3 \end{vmatrix}$$

$$+ f(\lambda_3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{I} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_4 & \mathbf{A} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_4^2 & \mathbf{A}^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_4^3 & \mathbf{A}^3 \end{vmatrix} - f(\lambda_2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{I} \\ \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_4 & \mathbf{A} \\ \lambda_1^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & \mathbf{A}^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 & \mathbf{A}^3 \end{vmatrix}$$

$$+ f(\lambda_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \mathbf{A} \\ \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & \mathbf{A}^2 \\ \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 & \mathbf{A}^3 \end{vmatrix}$$

Dado que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix} = (\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)$$

y

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ \lambda_i & \lambda_j & \lambda_k & \mathbf{A} \\ \lambda_i^2 & \lambda_j^2 & \lambda_k^2 & \mathbf{A}^2 \\ \lambda_i^3 & \lambda_j^3 & \lambda_k^3 & \mathbf{A}^3 \end{vmatrix} = (\mathbf{A} - \lambda_k\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_j\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})(\lambda_k - \lambda_j)(\lambda_k - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_i)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} A = {} & f(\mathbf{A})[(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)] \\ & - f(\lambda_4)[(\mathbf{A} - \lambda_3\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 \quad \lambda_1)(\lambda_2 \quad \lambda_1)] \\ & + f(\lambda_3)[(\mathbf{A} - \lambda_4\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)] \\ & - f(\lambda_2)[(\mathbf{A} - \lambda_4\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_3\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 \quad \lambda_1)(\lambda_3 \quad \lambda_1)] \\ & + f(\lambda_1)[(\mathbf{A} - \lambda_4\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_3\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)] \\ = {} & 0 \end{aligned}$$

Resolviendo para **f(A)** en esta última ecuación, obtenemos

$$f(\mathbf{A}) = f(\lambda_1)\frac{(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_3\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_4\mathbf{I})}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} + f(\lambda_2)\frac{(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_3\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_4\mathbf{I})}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}$$

$$+ f(\lambda_3)\frac{(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_4\mathbf{I})}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)} + f(\lambda_4)\frac{(\mathbf{A} - \lambda_1\,\mathbf{1})(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_3\mathbf{I})}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} f(\lambda_k)\frac{(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}) \cdots (\mathbf{A} - \lambda_{k-1}\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_{k+1}\mathbf{I}) \cdots (\mathbf{A} - \lambda_m\mathbf{I})}{(\lambda_k - \lambda_1) \cdots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \cdots (\lambda_k - \lambda_m)}$$

en donde $m = 4$. Por tanto, hemos demostrado la equivalencia de las ecuaciones (11-102) y (11-103). Aunque supusimos que $m = 4$, el argumento completo se extiende a un entero positivo m arbitrario. (Para el caso en el cual la matriz **A** contiene valores característicos múltiples, consulte el problema A-11-13.)

A-11-13. Considere la fórmula de interpolación de Sylvester en la forma obtenida mediante la ecuación (11-104):

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{m-1} & f(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} & f(\lambda_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & :: \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \cdots & \lambda_m^{m-1} & f(\lambda_m) \\ 1 & \mathbf{A} & \mathbf{A}^2 & \cdots & \mathbf{A}^{m-1} & f(\mathbf{A}) \end{vmatrix} = 0$$

Esta fórmula para la determinación de $f(\mathbf{A})$ se aplica al caso en el que el polinomio mínimo de **A** sólo tiene rafces distintas.

Suponga que el polinomio mfnimo de **A** tiene rafces múltiples. De este modo, los renglones del determinante, correspondientes a las raíces múltiples, se vuelven idénticos y, por tanto, se hace necesaria una modificación del determinante en la ecuación (11-104).

Modifique la forma de la fórmula de interpolación de Sylvester obtenida mediante la ecuación (11-104) cuando el polinomio mfnimo de **A** tiene raíces múltiples. AI obtener una ecuación determinante modificada, suponga que existen tres raíces iguales $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3)$ en el polinomio mínimo de **A,** y que hay otras raíces $(\lambda_4, \lambda_5, \ldots, \lambda_m))$ que son distintas.

Solución. Dado que el polinomio mínimo de **A** contiene tres raíces iguales, el polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ se escribe como

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &= \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m \\ &= (\lambda - \lambda_1)^3 (\lambda - \lambda_4)(\lambda - \lambda_5) \cdots (\lambda - \lambda_m) \end{aligned}$$

Una función arbitraria $f(\mathbf{A})$ de una matriz **A** de n X *n se escribe* como

$$f(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A})\phi(\mathbf{A}) + \alpha(\mathbf{A})$$

en donde el polinomio mfnimo $\phi(\mathbf{A})$ es de grado *m* y a(A) es un polinomio en **A** de grado *m - 1* 0 menor. Por tanto, tenemos que

$$f(\lambda) = g(\lambda)\phi(\lambda) + \alpha(\lambda)$$

en donde *a(A)* es un polinomio en λ de grado *m* - 1 o menor, que, por tanto, se escribe como

$$a(A) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \cdots + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1} \qquad (11\text{-}105)$$

En este caso, tenemos que

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= g(\lambda)\phi(\lambda) + \alpha(\lambda) \\ &= g(\lambda)[(\lambda - \lambda_1)^3 (\lambda - \lambda_4) \cdots (\lambda - \lambda_m)] + a(A) \end{aligned} \qquad (11\text{-}106)$$

Sustituyendo λ por $\lambda_1, \lambda_4, \ldots, \lambda_m$ en la ecuación (11–106), obtenemos las *m* - 2 ecuaciones siguientes:

$$f(\lambda_1) = \alpha(\lambda_1)$$

$$f(\lambda_4) = \alpha(\lambda_4)$$

$$f(\lambda_m) = \alpha(\lambda_m) \qquad (11\text{-}107)$$

Diferenciando la ecuación (11-106) con respecto a λ, obtenemos

$$\frac{d}{d\lambda}f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2 h(\lambda) + \frac{d}{d\lambda}\alpha(\lambda) \tag{11-108}$$

en donde

$$(\lambda - \lambda_1)^2 h(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}[g(\lambda)(\lambda - \lambda_1)^3(\lambda - \lambda_4)\cdots(\lambda - \lambda_m)]$$

La sustitución de λ por λ_1 en la ecuación (11-108) produce

$$\frac{d}{d\lambda}f(\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_1} = f'(\lambda_1) = \frac{d}{d\lambda}\alpha(\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_1}$$

Remitiéndonos a la ecuación (11–105), esta última ecuación se convierte en

$$f'(\lambda_1) = \alpha_1 + 2\alpha_2\lambda_1 + \cdots + (m-1)\alpha_{m-1}\lambda_1^{m-2} \tag{11-109}$$

Asimismo, diferenciando la ecuación (11–106) dos veces con respecto a λ, y sustituyendo λ por λ_1, obtenemos

$$\frac{d^2}{d^2\lambda}f(\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_1} = f''(\lambda_1) = \frac{d^2}{d\lambda^2}\alpha(\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_1}$$

Esta última ecuación se escribe como

$$f''(\lambda_1) = 2\alpha_2 + 6\alpha_3\lambda_1 + \cdots + (m-1)(m-2)\alpha_{m-1}\lambda_1^{m-3} \tag{11-110}$$

Si volvemos a escribir las ecuaciones (11–110), (11-109) y (11–107), obtenemos

$$\begin{aligned}
a_2 + 3\alpha_3\lambda_1 + \cdots + \frac{(m-1)(m-2)}{2}\alpha_{m-1}\lambda_1^{m-3} &= \frac{f''(\lambda_1)}{2} \\
\alpha_1 + 2\alpha_2\lambda_1 + \cdots + (m-1)\alpha_{m-1}\lambda_1^{m-1} &= f'(\lambda_1) \\
\alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^2 + \cdots + \alpha_{m-1}\lambda_1^{m-1} &= f(\lambda_1) \\
\alpha_0 + \alpha_1\lambda_4 + \alpha_2\lambda_4^2 + \cdots + \alpha_{m-1}\lambda_4^{m-1} &= f(\lambda_4)
\end{aligned} \tag{11-111}$$

$$\alpha_0 + \alpha_1\lambda_m + \alpha_2\lambda_m^2 + \cdots + \alpha_{m-1}\lambda_m^{m-1} = f(\lambda_m)$$

Estas m ecuaciones simultáneas determinan los α_k valores (en donde $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$). Considerando que $\phi(\mathbf{A}) = 0$, debido a que se trata de un polinomio mínimo, obtenemos $f(\mathbf{A})$ del modo siguiente:

$$f(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A})\phi(\mathbf{A}) + \alpha(\mathbf{A}) = \alpha(\mathbf{A})$$

Por tanto, remitiéndonos a la ecuación (11–105), tenemos que

$$f(\mathbf{A}) = \alpha(\mathbf{A}) = \alpha_0\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_2\mathbf{A}^2 + \cdots \alpha_{m-1}\mathbf{A}^{m-1} \tag{11-112}$$

en donde los α_k valores se obtienen en términos de $f(\lambda_1)$, $f'(\lambda_1)$, $f''(\lambda_1)$, $f(\lambda_4)$, $f(\lambda_5)$, . . . , $f(\lambda_m)$. En términos de la ecuación **determinante**, $f(\mathbf{A})$ se obtiene despejando la ecuación siguiente:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3\lambda_1 & \cdots & \frac{(m-1)(m-2)}{2}\lambda_1^{m-3} & \frac{f''(\lambda_1)}{2} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1^2 & \cdots & (m-1)\lambda_1^{m-2} & f'(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \cdots & \lambda_1^{m-1} & f(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 & \cdots & \lambda_4^{m-1} & f(\lambda_4) \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \lambda_m^3 & \cdots & \lambda_m^{m-1} & f(\lambda_m) \\ \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{A}^2 & \mathbf{A}^3 & \cdots & \mathbf{A}^{m-1} & f(\mathbf{A}) \end{vmatrix} = 0 \qquad (11\text{-}113)$$

La ecuación (11-113) muestra la modificación deseada en la forma del determinante. Esta ecuación produce la forma de la fórmula de interpolación de Sylvester cuando el polinomio mínimo de A contiene tres raíces iguales. (Será evidente la modificación necesaria de la forma del determinante para otros casos.)

A-11-14 Usando la **fórmula** de interpolación de Sylvester, calcule $e^{\mathbf{A}t}$, en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución. Remitiéndonos al problema A-11-9, el polinomio característico y el polinomio mínimo son iguales para esta **A.** El polinomio mínimo (polinomio característico) se obtiene mediante

$$\phi(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$$

Observe que $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 1$. Remitiéndonos ala ecuación (11-112) y considerando que $f(\mathbf{A})$ en este problema es $e^{\mathbf{A}t}$, tenemos que

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \alpha_2(t)\mathbf{A}^2$$

en donde $\alpha_0(t)$, *al(t)* y $\alpha_2(t)$ se determinan a partir de las ecuaciones

$$\alpha_1(t) + 2\alpha_2(t)\lambda_1 = te^{\lambda_1 t}$$
$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 = e^{\lambda_1 t}$$
$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_3 + \alpha_2(t)\lambda_3^2 = e^{\lambda_3 t}$$

Al sustituir $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_3 = 1$ en estas tres ecuaciones, obtenemos

$$\alpha_1(t) + 4\alpha_2(t) = te^{2t}$$
$$\alpha_0(t) + 2\alpha_1(t) + 4\alpha_2(t) = e^{2t}$$
$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t) + \alpha_2(t) = e^t$$

Despejando $\alpha_0(t)$, al(t) y $\alpha_2(t)$, obtenemos

$$\alpha_0(t) = 4e^t - 3e^{2t} + 2te^{2t}$$
$$\alpha_1(t) = -4e^t + 4e^{2t} - 3te^{2t}$$
$$\alpha_2(t) = e^t - e^{2t} + te^{2t}$$

Por tanto,

$$e^{\mathbf{A}t} = (4e^{t} - 3e^{2t} + 2te^{2t})\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (-4e^{t} + 4e^{2t} - 3te^{2t})\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ (e^{t} - e^{2t} + te^{2t})\begin{bmatrix} 4 & 16 & 12 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t} & 12e^{t} - 12e^{2t} + 13te^{2t} & -4e^{t} + 4e^{2t} \\ 0 & -3e^{t} + e^{2t} + 3te^{2t} & 0 \\ 0 & -4e^{t} + 4e^{2t} - 4te^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

A-11-15. Considere la matriz A de $n \times n$. Demuestre que

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\sum_{j=0}^{m-1} s^{j} \sum_{i=1+j}^{m} \alpha_{i}\mathbf{A}^{i-j-1}}{\sum_{i=0}^{m} \alpha_{i} s^{i}}$$

en donde las α_i son coeficientes del polinomio mínimo de A:

$$\alpha_0\mathbf{A}^{m} + \alpha_1\mathbf{A}^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-1}\mathbf{A} + \alpha_m\mathbf{I} = 0$$

en el que $\alpha_0 = 1$ y m es el grado del polinomio mfnimo $(m \leq n)$.

Solución. Pongamos

$$\mathrm{P} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

Así

$$s\mathbf{P} = \mathbf{AP} + \mathbf{1}$$

Premultiplicando por $(s\mathbf{I} + \mathbf{A})$ en ambos miembros de esta ecuación, obtenemos

$$s^2\mathbf{P} = \mathbf{A}^2\mathbf{P} + \mathbf{A} + s\mathbf{I}$$

En forma similar, si premultiplicamos $(s\mathbf{I} + \mathbf{A})$ en ambos miembros de esta última ecuación, llegamos a

$$s^3\mathbf{P} = \mathbf{A}^3\mathbf{P} + \mathbf{A}^2 + s\mathbf{A} + s^2\mathbf{I}$$

Repitiendo este proceso, obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}$$

$$s\mathbf{P} = \mathbf{AP} + \mathbf{1}$$

$$s^2\mathbf{P} = \mathbf{A}^2\mathbf{P} + \mathbf{A} + s\mathbf{I}$$

$$s^3\mathbf{P} = \mathbf{A}^3\mathbf{P} + \mathbf{A}^2 + s\mathbf{A} + s^2\mathbf{I}$$

$$s^m\mathbf{P} = \mathbf{A}^m\mathbf{P} + \mathbf{A}^{m-1} + s\mathbf{A}^{m-2} + \ldots + s^{m-2}\mathbf{A} + s^{m-1}\mathbf{I}$$

en las que m es el grado del polinomio mínimo de **A. Así,** multiplicando las $s^i\mathbf{P}$ por α_{m-i} (en donde $i = 0, 1, 2, \ldots, m$) en las $m + 1$ ecuaciones anteriores, en el mismo orden, y agregando el producto, obtenemos

$$\alpha_m \mathbf{P} + \alpha_{m-1} s\mathbf{P} + \alpha_{m-2} s^2\mathbf{P} + \cdots + \alpha_0 s^m \mathbf{P}$$
$$= \sum_{i=0}^{m} \alpha_{m-i} \mathbf{A}^i \mathbf{P} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{m-i} \mathbf{A}^{i-1} + s \sum_{i=2}^{m} \alpha_{m-i} \mathbf{A}^{i-2} + \cdots$$
$$+ s^{m-2} \sum_{i=m-1}^{m} \alpha_{m-i} \mathbf{A}^{i-m+1} + s^{m-1} \alpha_0 \mathbf{I} \tag{11-114}$$

Considerando que

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_{m-i} A^i \mathbf{P} = (\alpha_0 \mathbf{A}^m + \alpha_1 \mathbf{A}^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-1} \mathbf{A} + \alpha_m \mathbf{I})\mathbf{P} = 0$$

podemos simplificar la ecuación (11-114) del modo siguiente:

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_{m-i} s^i \mathbf{P} = \sum_{j=0}^{m-1} s^j \sum_{i=1+j}^{m} \alpha_{m-i} \mathbf{A}^{i-j-1}$$

Por tanto,

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{P} = \frac{\sum_{j=0}^{m-1} s^j \sum_{i=1+j}^{m} \alpha_{m-i} \mathbf{A}^{i-j-1}}{\sum_{i=0}^{m} \alpha_{m-i} s^i}$$

Si el polinomio mínimo y el polinomio característico de **A** son iguales, entonces $m = n$. Si $m = n$, esta última ecuación se convierte en

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} s^j \sum_{i=1+j}^{n} \alpha_{n-i} \mathbf{A}^{i-j-1}}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \tag{11-115}$$

en donde

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{n-i} s^i, \qquad \alpha_0 = 1$$

A-11-16. Una condición necesaria y suficiente para la controlabilidad completa del estado es que no ocurra una cancelación en la función de transferencia o en la matriz de transferencia.

Considere el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \tag{11-116}$$

en donde x = vector de estado (vector de dimensión *n*).
u = señal de control (escalar)
A = matriz de $n \times n$
B = matrizden $\times$ 1

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (11-116) y despejando X(s), obtenemos

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) \tag{11-117}$$

en donde

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \begin{vmatrix} p_1(s) \\ p_2(s) \\ \\ \\ p_n(s) \end{vmatrix}$$

y las pi(s) ($i = 1, 2, \ldots, n$) son polinomios en s. A continuación se define lo que queremos decir con el término ***cancelaciones*** en la matriz de transferencia $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$. Se dice que la matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ no tiene una cancelación si y sólo si los polinomios $p_1(s), p_2(s), \ldots, p_n(s)$ y $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ no tienen un factor común. Si $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ tiene una cancelación, el sistema no se controla en la dirección del modo cancelado.

Demuestre que $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ tiene una cancelación si y sólo si el rango de

$$\mathbf{P} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

es menor que n.

Solución. Definamos

$$\phi \equiv (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

Usando la ecuación (11–115), expresamos ϕ como

$$\phi = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} s^j \sum_{i=1+j}^{n} \alpha_{n-i}\mathbf{A}^{i-j-1}\mathbf{B}}{\sum_{i=0}^{n} \alpha_{n-i}s^i} \qquad (\alpha_0 = 1)$$

Definimos

$$\mathbf{v}_j = \sum_{i=1+j}^{n} \alpha_{n-i}\mathbf{A}^{i-j-1}\mathbf{B}$$

en donde $\mathbf{v}_j$ es un vector de dimensión n. En este caso

$$\phi = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} s^j \mathbf{v}_j}{\sum_{i=0}^{n} \alpha_{n-i}s^i} \qquad \textbf{(11-118)}$$

Suponemos que ϕ tiene una cancelación. Así, el numerador del segundo miembro de la ecuación (11-118) debe tener la forma siguiente:

$$\sum_{j=0}^{n-1} s^j \mathbf{v}_j = (s - s_k)\sum_{j=0}^{n-2} s^j \mathbf{w}_j \qquad (11\text{-}119)$$

en donde s_k es un valor característico de A. Igualando los coeficientes de s^i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) de ambos miembros de la ecuación (11–119), obtenemos

$$\mathbf{v}_0 = -s_k\mathbf{w}_0$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_0 - s_k\mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_1 - s_k\mathbf{w}_2$$

$$\mathbf{v}_{n-1} = \mathbf{w}_{n-2}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_0 + s_k\mathbf{v}_1 + s_k^2\mathbf{v}_2 + \cdots + s_k^{n-1}\mathbf{v}_{n-1} &= (-s_k\mathbf{w}_0) + (s_k\mathbf{w}_0 - s_k^2\mathbf{w}_1) + (s_k^2\mathbf{w}_1 - s_k^3\mathbf{w}_2) + \cdots \\ &\quad + (s_k^{n-2}\mathbf{w}_{n-3} - s_k^{n-1}\mathbf{w}_{n-2}) + s_k^{n-1}\mathbf{w}_{n-2} \\ &= 0 \end{aligned} \qquad (11\text{-}120)$$

La ecuación (11-120) implica que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{n-i}\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{B} + s_k\sum_{i=2}^{n} \alpha_{n-i}\mathbf{A}^{i-2}\mathbf{B} + \ldots + s_k^{n-1}\alpha_0\mathbf{B} = \mathbf{0}$$

que puede reescribirse como

$$c_0\mathbf{B} + c_1\mathbf{AB} + c_2\mathbf{A}^2\mathbf{B} + \ldots + c_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} = \mathbf{0} \tag{11-121}$$

en donde

$$c_i = \sum_{j=0}^{n-i-1} \alpha_{n-i-j-1}s_k^j$$

Dado que el coeficiente de $\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$ es $c_{n-1} = \alpha_0 = 1$, la ecuación (11-121) implica que los vectores $\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$ son linealmente dependientes. Por tanto, el rango de $\mathbf{P}$ es menor que n. De esta forma, hemos demostrado que, si $\boldsymbol{\phi}$ tiene una cancelación, el rango de $\mathbf{P}$ es menor que n.

A continuación demostraremos que, si el rango de $\mathbf{P}$ es menor que n, $\boldsymbol{\phi}$ tiene una cancelación. Si el rango de $\mathbf{P}$ es menor que n, existen constantess $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$, no todas cero, tales que

$$\gamma_0\mathbf{B} + \gamma_1\mathbf{AB} + \gamma_2\mathbf{A}^2\mathbf{B} + \ldots + \gamma_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} = \mathbf{0}$$

Dado que

$$\mathbf{B} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\boldsymbol{\phi}$$

tenemos que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i\mathbf{A}^i(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\boldsymbol{\phi} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i\mathbf{A}^i\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \tag{11-122}$$

para unas tal que $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| \neq 0$, la ecuación (11-122) implica que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i\mathbf{A}^i\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$$

Usando las identidades

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\phi} = s\boldsymbol{\phi} - \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}^2\boldsymbol{\phi} = s^2\boldsymbol{\phi} - \mathbf{AB} - s\mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}^{n-1}\boldsymbol{\phi} = s^{n-1}\boldsymbol{\phi} - \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} - s\mathbf{A}^{n-3}\mathbf{B} - \cdots - s^{n-2}\mathbf{B}$$

obtenemos

$$\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i\mathbf{A}^i\boldsymbol{\phi} = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i s^i\boldsymbol{\phi} - \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{B} - s\sum_{i=2}^{n-1} \gamma_i\mathbf{A}^{i-2}\mathbf{B}$$

$$- \cdots - s^{n-3}\sum_{i=n-2}^{n-1} \gamma_i\mathbf{A}^{i-n+2}\mathbf{B} - s^{n-2}\gamma_{n-1}\mathbf{B}$$

$$= \mathbf{0}$$

Por tanto,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i s^i \phi = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \mathbf{A}^{i-1}\mathbf{B} + s \sum_{i=2}^{n-1} \gamma_i \mathbf{A}^{i-2}\mathbf{B} + \cdots + s^{n-3} \sum_{i=n-2}^{n-1} \gamma_i \mathbf{A}^{i-n+2}\mathbf{B} + s^{n-2}\gamma_{n-1}\mathbf{B}$$

$$= \sum_{\substack{i=j+1 \\ j=0}}^{n-1} \gamma_i \mathbf{A}^{i-j-1}\mathbf{B} + s \sum_{\substack{i=j+1 \\ j=1}}^{n-1} \gamma_i \mathbf{A}^{i-j-1}\mathbf{B} + \cdots + s^{n-3} \sum_{\substack{i=j+1 \\ j=n-3}}^{n-1} \gamma_i \mathbf{A}^{i-j-1}\mathbf{B} + s^{n-2} \sum_{\substack{i=j+1 \\ j=n-2}}^{n-1} \gamma_i \mathbf{A}^{i-j-1}\mathbf{B}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-2} s^j \sum_{i=j+1}^{n-1} \gamma_i \mathbf{A}^{i-j-1}\mathbf{B}$$

o bien

$$\phi = \frac{\sum_{j=0}^{n-2} s^j \sum_{i=j+1}^{n-1} \gamma_i \mathbf{A}^{i-j-1}\mathbf{B}}{\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i s^i} \qquad (11\text{-}123)$$

El denominador de la ecuación (11-123) indica que ocurrió una cancelación. Esto completa la comprobación.

Hemos demostrado que la condición de que el rango de la matriz

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

es n equivale a la condición de que no ocurra una cancelación en la matriz de transferencia $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$.

A-11-17. Demuestre que el sistema descrito mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \qquad (11\text{-}124)$$

$$y = cx \qquad (11\text{-}129)$$

en donde x = vector de estado (vector de dimensión n)
u = vector de control (vector de dimensión r)
y = vector de salida (vector de dimensión m) $(m \leq n)$
$\mathbf{A}$ = matriz de $n \times n$
$\mathbf{B}$ = matrizden $\mathbf{X}$ r
C = matriz de m $\mathbf{X}$ n

es de salida completamente controlable si y sólo si la matriz $\mathbf{P}$ compuesta de m X nr, en donde

$$\mathbf{P} = [\mathbf{CB} \mid \mathbf{CAB} \quad \mathbf{CA}^2\mathbf{B} \mid \cdots \mid \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B}]$$

es de rango m. (Observe que una controlabilidad completa del estado no es necesaria ni suficiente para una controlabilidad completa de la salida.)

Solución. Suponga que la salida del sistema es controlable y que la salida y(t) empezando a partir de cualquier y(O), la salida inicial, puede transferirse al origen del espacio de salida en un intervalo de tiempo finito $0 \leq t \leq T$. Es decir,

$$y(T) = \mathbf{C}x(T) = 0 \qquad (11\text{-}126)$$

Dado que la solución de la ecuación (11-124) es

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\left[\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau\right]$$

en $t = T$, tenemos

$$\mathbf{x}(T) = e^{\mathbf{A}T}\left[\mathbf{x}(0) + \int_0^T e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau\right] \tag{11-127}$$

Si introducimos la ecuación (11-127) en la ecuación (11–126), obtenemos

$$\mathbf{y}(T) = \mathbf{C}\mathbf{x}(T)$$

$$= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}T}\left[\mathrm{x(O)} + \int_0^T e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau\right] = \mathbf{0} \tag{11-128}$$

Por otra parte, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{C}\mathbf{x}(0)$. Observe que la controlabilidad completa de la salida significa que el vector $\mathbf{C}\mathbf{x}(0)$ abarca el espacio de salida de m dimensiones. Dado que $e^{\mathbf{A}T}$ es no singular, si $\mathbf{C}\mathbf{x}(0)$ abarca el espacio de salida con m dimensiones, también $\mathbf{C}e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(0)$ lo hace, y viceversa. A partir de la ecuación (11–128), obtenemos

$$\mathbf{C}e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(0) = -\mathbf{C}e^{\mathbf{A}T}\int_0^T e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

$$= -C\int_0^T e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(T-\tau)d\tau$$

Observe que $\int_0^T e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(T-\tau)\,d\tau$ se expresa como una suma de $\mathbf{A}^i\mathbf{B}_j$,

$$\int_0^T e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(T-\tau)\,d\tau = \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{r}\gamma_{ij}\mathbf{A}^i\mathbf{B}_j$$

en donde

$$\gamma_{ij} = \int_0^T \alpha_i(\tau)u_j(T-\tau)\,d\tau = \textit{escalar}$$

y $\alpha_i(\tau)$ satisface

$$e^{\mathbf{A}\tau} = \sum_{i=0}^{p-1}\alpha_i(\tau)\,\mathbf{A}^i \qquad (p\text{: grado del polinomio mínimo de A})$$

y $\mathbf{B}_j$ es la j-ésima columna de B. Por tanto, escribimos $\mathbf{C}e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(0)$ como

$$\mathbf{C}e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(0) = -\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{r}\gamma_{ij}\mathbf{C}\mathbf{A}^i\mathbf{B}_j$$

En esta última ecuación vemos que $\mathbf{C}e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(0)$ es una combinación lineal de $\mathbf{C}\mathbf{A}^i\mathbf{B}_j$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, p-1; j = 1, 2, \ldots, r$). Observe que, si el rango de Q, en donde

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{CB} \mid \mathbf{CAB} \mid \mathbf{CA}^2\mathbf{B} \mid \cdots \mid \mathbf{CA}^{p-1}\mathbf{B}] \qquad (p \le n)$$

es m, también lo es el rango de P, y viceversa. [Esto es obvio si $p = n$. Si $p < n$, entonces la $\mathbf{CA}^h\mathbf{B}_j$ (en donde $p \le h \le n-1$) son linealmente dependientes de $\mathbf{CB}_j$, $\mathbf{CAB}_j$, . . . , $\mathbf{CA}^{p-1}\mathbf{B}_j$. Por tanto, el rango de P es igual al de Q.] Si el rango de P es m, entonces $\mathrm{C}e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(0)$ abarca el espacio de salida de m dimensiones. Esto significa que, si el rango de P es m, entonces $\mathbf{C}\mathbf{x}(0)$ también abarca el espacio de salida de m dimensiones y el sistema es de salida completamente controlable.

0 bien, suponga que el sistema es de salida completamente controlable pero el rango de P es k, donde $k < m$. En este caso el conjunto de todas las salidas iniciales que se transfieren al origen es de un espacio de k dimensiones. Por tanto, la dimensión de este conjunto es menor que m. Esto contradice la suposición de que el sistema es de salida completamente controlable y completa la demostración.

Observe que se puede comprobar de inmediato que, en el sistema de las ecuaciones (11-124) y (11–125), la controlabilidad completa del estado en $0 \leq t \leq T$ implica una controlabilidad completa de, la salida en $0 \leq t \leq T$ si y sólo si m renglones de C son linealmente independientes.

A-11-18. Analice la controlabilidad de estado del sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} u \tag{11-129}$$

Solución. Para este sistema

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1.5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Dado que

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

vemos que los vectores B y **AB** no son linealmente independientes, y que el rango de la matriz [B **AB**] es 1. Por tanto, el sistema no es de estado completamente controlable. De hecho, la eliminación de x_2 de la ecuación (11-129) o las dos ecuaciones simultáneas siguientes,

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + 1.5\,x_2 + 4u$$

produce

$$\ddot{x}_1 + 1.5\dot{x}_1 - 2.5x_1 = \dot{u} + 2.5u$$

o bien, en la forma de una función de transferencia,

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{s + 2.5}{(s + 2.5)(s - 1)}$$

Observe que la cancelación del factor (s + 2.5) ocurre en el numerador y en el denominador de la función de transferencia. Debido a esta cancelación, este sistema no tiene un estado completamente controlable.

Éste es un sistema inestable. Recuerde que la estabilidad y la controlabilidad son cosas muy diferentes. Existen muchos sistemas que son inestables pero son de estado completamente controlable.

A-11-19. Una representación en el espacio de estados de un sistema en la forma canónica controlable se obtiene mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{11-130}$$

$$y = [0.8 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{11-131}$$

El mismo sistema se representa mediante la siguiente ecuación en el espacio de estados, que está en la forma canónica observable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 \\ 1 & -1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{11-132}$$

$$y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{11-133}$$

Demuestre que la representación en el espacio de estados obtenida mediante las ecuaciones (11–130) y (11-131) produce un sistema que es de estado controlable pero no observable.Por otra parte, demuestre que la representación en el espacio de estados definida mediante las ecuaciones

(11-132) y (11-133) produce un sistema que no es de estado completamente controlable pero sí observable. Explique qué provoca las diferencias evidentes en la controlabilidad y la observabilidad del mismo sistema.

Solución. Considere el sistema definido mediante las ecuaciones (11-130) y (11-131). El rango de la matriz de controlabilidad

$$[B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1.3 \end{bmatrix}$$

es 2. Por tanto, el sistema es de estado completamente controlable. El rango de la matriz de observabilidad

$$[C^* \mid A^*C^*] = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

es 1. Por tanto, el sistema es no observable.

A continuación considere el sistema definido mediante las ecuaciones (11-132) y (11-133). El rango de la matriz de controlabilidad

$$[B \mid AB] = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

es 1. Por tanto, el sistema no es de estado completamente controlable. El rango de la matriz de observabilidad

$$[C^* \mid A^*C^*] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1.3 \end{bmatrix}$$

es 2. Por tanto, el sistema es observable.

La diferencia evidente en la controlabilidad y la observabilidad del mismo sistema la provoca el hecho de que el sistema original tiene una cancelación de polos y ceros en la función de transferencia. Remitiéndonos a la ecuación (3–32), tenemos que

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

Si usamos las ecuaciones (11-130) y (11–131), entonces

$$G(s) = [0.8 \quad 1]\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0.4 & s + 1.3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2 + 1.3s + 0.4}[0.8 \quad 1]\begin{bmatrix} s + 13 & 1 \\ -0.4 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{s + 0.8}{(s + 0.8)(s + 0.5)}$$

[Observe que se obtiene la misma función de transferencia usando las ecuaciones (11-132) y (11–133).] Es evidente que en esta función de transferencia ocurre una cancelación.

Si ocurre una cancelación de polos y ceros en la función de transferencia, la controlabilidad y la observabilidad varían, dependiendo de cómo se eligen las variables de estado. Recuerde que para ser de estado completamente controlable y observable, la función de transferencia no debe tener cancelaciones de polos ni ceros.

A-11-20. Demuestre que el sistema definido mediante

$$\dot{x} = Ax$$

$$y = Cx$$

en donde x = vector de estado (vector de dimensión *n*)
y = vector de salida (vector de dimensión *m*) $(m \leq n)$

$\mathbf{A}$ = matriz de $n \times n$
$\mathbf{C}$ = matriz de $m \times n$

es completamente observable si y sólo si la matriz P compuesta de $mn \times n$, en donde

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{vmatrix}$$

es de rango n.

Solución. Primero obtendremos la condición necesaria. Suponga que

$$\text{rango } \mathbf{P} < n$$

Entonces existe una x(O) tal que

$$\mathbf{Px}(0) = 0$$

o bien

$$\mathbf{Px}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) = \begin{vmatrix} \mathbf{Cx}(0) \\ \mathbf{CAx}(0) \\ \\ \\ \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{x}(0) \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, obtenemos, para cierta x(O),

$$\mathbf{CA}^i\mathbf{x}(0) = 0, \qquad \text{para } i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Observe que, a partir de la ecuación (11-48) u (11-50) tenemos que

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \alpha_2(t)\mathbf{A}^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\mathbf{A}^{m-1}$$

en donde $m (m \leq n)$ es el grado del polinomio mínimo para A. Por tanto, para cierta x(O), tenemos que

$$\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = \mathbf{C}[\alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \alpha_2(t)\mathbf{A}^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\mathbf{A}^{m-1}]\mathbf{x}(0) = 0$$

En consecuencia, para cierta x(O),

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = 0$$

lo cual implica que, para cierta x(O), x(O) no puede determinarse a partir de y(t). Así, el rango de la matriz P debe ser igual a n.

A continuación obtendremos la condición suficiente. Suponga que el rango P = n. Dado que

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

Si premultiplicamos $e^{\mathbf{A}^*t}\mathbf{C}^*$ por ambos miembros de esta última ecuación, obtenemos

$$e^{\mathbf{A}^*t}\mathbf{C}^*\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}^*t}\mathbf{C}^*\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

Si integramos esta última ecuación de 0 a t, obtenemos

$$\int_0^t e^{\mathbf{A}^* t}\mathbf{C}^*\mathbf{y}(t)\,dt = \int_0^t e^{\mathbf{A}^* t}\mathbf{C}^*\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\,\mathbf{x}(0)\,dt \tag{11-134}$$

Observe que el primer miembro de esta ecuación es una cantidad conocida. Defina

$$\mathbf{Q}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}^* t}\mathbf{C}^*\mathbf{y}(t)\,dt = \text{cantidad conocida} \tag{11-135}$$

Entonces, a partir de las ecuaciones (11-134) y **(11–135),** tenemos que

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{x}(0) \tag{11-136}$$

en donde

$$W(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}^* \tau}\mathbf{C}^*\mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau}d\tau$$

Se puede establecer que **W(t)** es una matriz no singular, del modo siguiente: si $|\mathbf{W}(t)|$ fuera igual a 0, entonces

$$\mathbf{x}^*\mathbf{W}(t_1)\mathbf{x} = \int_0^{t_1} ||\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}||^2\,dt = 0$$

lo que significa que

$$\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x} = 0, \qquad \text{para } 0 \leq t \leq t_1$$

lo cual implica que el rango $\mathbf{P} < n$. Por tanto, $|\,W(t)\,| \neq 0$, o $W(t)$ es no singular. Así, a partir de la ecuación **(11–136),** obtenemos

$$\mathbf{x}(0) = [\mathbf{W}(t)]^{-1}\mathbf{Q}(t) \tag{11-137}$$

y $\mathbf{x}(0)$ se determina a partir de la ecuación (11-137).

Por tanto, hemos demostrado que x(O) se determina a partir de y(t) si y sólo si el rango $\mathbf{P} = n$. Observe que x(O) y y(t) se relacionan mediante

$$y(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = \alpha_0(t)\mathbf{C}\mathbf{x}(0) + \alpha_1(t)\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}(0)$$

PROBLEMAS

B-ll-l. Considere el siguiente sistema representado mediante la función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+6}{s^2+5s+6}$$

Obtenga la representación en el espacio de estados de este sistema en (a) la forma canónica controlable y (b) la forma canónica observable.

B -11-2. Considere el sistema siguiente:

$$\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 6u$$

Obtenga una representación en el espacio de estados de este sistema en la forma canónica diagonal.

B-11-3. Considere el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 1]$$

Transforme las ecuaciones del sistema a la forma canónica controlable.

B-11-4. Considere el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1 \quad 0]$$

Obtenga la función de transferencia $Y(s)/U(s)$.

B-ll-5 Considere la matriz **A** siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtenga los valores característicos λ_1, λ_2, λ_3 y λ_4 de la matriz A. Después obtenga una matriz de transformación **P** tal que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$$

B **-11-6.** Considere la matriz A siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

calcule $e^{\mathbf{A}t}$ medi[illegible] tres métodos.

B-11-7. Dada [illegible] ecuación del sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

encuentre la solución en términos de las condiciones iniciales $x_1(0), x_2(0)$ y $x_3(0)$.

B **-11-8.** Encuentre $x_1(t)$ y $x_2(t)$ del sistema descrito mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

en donde las condiciones iniciales son

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

B -11-9. Considere la ecuación de estado y la ecuación de salida siguientes:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -11 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$Y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Demuestre que la ecuación de estado se transforma a la forma siguiente si se usa una matriz de transformación adecuada:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Después obtenga la salida y en términos de z_1, z_2 y z_3.

B-ll-lo. Obtenga con MATLAB una representación en el espacio de estados del sistema siguiente.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10.4s^2 + 47s + 160}{s^3 + 14s^2 + 56s + 160}$$

B-ll-ll. Obtenga con MATLAB una representación mediante la función de transferencia del sistema siguiente.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

B-11-12. Obtenga con MATLAB una representación mediante la función de transferencia del sistema siguiente.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

B-11-13. Considere el sistema definido mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

¿Es el sistema de estado completamente controlable y completamente observable?

B-11-14. Considere el sistema dado por

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

¿Es el sistema de estado completamente controlable y completamente observable? ¿Es el sistema de salida completamente controlable?

B-11-15. ¿Es el sistema siguiente de estado completamente controlable y completamente observable?

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y = [20 \quad 9 \quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

B-11-16. Considere el sistema definido mediante

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$Y = [c_1 \quad c_2 \quad c_3]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

Excepto por una elección obvia de $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, encuentre un ejemplo de un conjunto de c_1, c_2, c_3 que haga no observable el sistema.

B-11-17. Considere el sistema

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

La salida se obtiene mediante

$$y = [1 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

(a) Demuestre que el sistema no es completamente observable. (b) Demuestre que el sistema es completamente observable si la salida se obtiene mediante

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

B-11-18. Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$
$$y = cx$$

en donde $\mathbf{x}$ = vector de estado (vector de dimensión n)
y = señal de salida (escalar)
A = matriz de $n \times n$
$\mathbf{B}$ = matriz de $1 \times n$

sea completamente observable es que $\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ no tenga cancelación.

Considere que, para este sistema

$$X(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)$$

y, por tanto

$$Y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - A)^{-1}x(0)$$

Observe también que $\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ puede escribirse como

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|}[q_1(s)\ q_2(s)\ \ldots\ q_n(s)]$$

en donde las $q_i(s)$ son polinomios en s.

12 Diseño de sistemas de control en el espacio de estados

12-1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo analizará primero el problema de ubicación de polos Consideraremos el diseño de sistemas de control mediante la ubicación de los polos. Diseñaremos el sistema del péndulo invertido, en el cual el péndulo está sujeto a condiciones iniciales, con la idea de regresar el péndulo a la posición vertical dentro de un tiempo especificado. A continuación analizaremos el diseño de observadores de estado. Por último trataremos el diseño de sistemas de seguimiento en los que: (1) la planta tiene un integrador y (2) la planta no tiene un integrador. Incluiremos una discusión acerca del diseño del sistema del péndulo invertido que, cuando el carro en el cual está montado el péndulo recibe una entrada escalón, es estable (es decir, el péndulo no cae).

Panorama del capítulo. La sección 12-1 presentó el material de introducción. La sección 12-2 analiza el enfoque de ubicación de polos para el diseño de sistemas de control. Empieza con la obtención de las condiciones necesarias y suficientes para una ubicación arbitraria de los polos. A continuación se obtendrán las ecuaciones para la matriz de ganancias de la realimentación del estado K para la ubicación de los polos. La sección 12-3 presenta la solución del problema de ubicación de polos mediante MATLAB. En esta sección se ofrecen algunos programas para MATLAB de muestra para el diseño mediante la ubicación de los polos. La sección 124 ofrece un ejemplo del diseño de sistemas del tipo regulador, mediante el enfoque de la ubicación de polos. Se usa el sistema del péndulo invertido como ejemplo y se presenta la solución analítica y la solución con MATLAB.

La sección 12–5 presenta los observadores de estado. Se analizan los observadores de estado de orden completo y de orden mínimo; se ofrecen tres diferentes enfoques para la determinación de la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ y se introduce el concepto de controlador-observador. La sección 12-6 analiza el diseño de observadores de estado con MATLAB. La sección 12-7 trata el diseño de los sistemas de seguimiento. En particular,

analiza el diseño de los sistemas de seguimiento de tipo 1 cuando (1) la planta tiene un integrador y (2) la planta no tiene un integrador. La sección 12-8 presenta un ejemplo del diseño de un sistema de control con MATLAB. Específicamente aborda el diseño del sistema de control del péndulo invertido con MATLAB. Se obtienen las curvas de respuesta escalón unitario del sistema diseñado mediante MATLAB.

12-2 UBICACIÓN DE POLOS

En esta sección presentaremos un método de diseño conocido comúnmente como ***técnica de ubicación, o*** de ***asignación de polos.*** Suponemos que todas las variables de estado son medibles y que están disponibles para la realimentación. Se demostrará que, si el sistema considerado es de estado completamente controlable, los polos del sistema en lazo cerrado se pueden ubicar en cualquier posición deseada mediante una realimentación del estado a través de una matriz de ganancias de la realimentación del estado.

La técnica de diseño actual empieza con la determinación de los polos en lazo cerrado deseados a partir de la respuesta transitoria, y/o los requerimientos de la respuesta en frecuencia, tales como la velocidad, el factor de amortiguamiento relativo, o el ancho de banda, al igual que los requerimientos en estado estable.

Supongamos que decidimos que los polos en lazo cerrado deseados estén en $s = \mu_1, s = \mu_2, \ldots, s = \mu_n$. Seleccionando una matriz de ganancias apropiada para una realimentación del estado, es posible obligar al sistema para que tenga los polos en lazo cerrado en las posiciones deseadas, siempre y cuando el sistema original sea de estado completamente controlable.

A continuación, trataremos el caso en el que la señal de control es un escalar, y demostraremos que una condición necesaria y suficiente para que los polos en lazo cerrado se ubiquen en cualquier posición arbitraria en el plano s es que el sistema sea de estado completamente controlable. Luego, analizaremos tres métodos para determinar la matriz de ganancias de la realimentación del estado requerida.

Observe que, cuando la señal de control es una cantidad vectorial, los aspectos matemáticos del esquema de ubicación de polos se complican. Por tanto, no analizaremos tal caso en este libro. (El lector interesado debe consultar la referencia 0-3 para la obtención matemática.) También advierta que, cuando la señal de control es una cantidad vectorial, la matriz de ganancias de la realimentación del estado es única. Es posible elegir libremente más de n parámetros; es decir, además de ubicar n polos en lazo cerrado de manera adecuada, tenemos la libertad de satisfacer algunos o todos los otros requerimientos, si existen, del sistema en lazo cerrado.

Diseño mediante la ubicación de los polos. En el enfoque convencional del diseño de un sistema de control con una sola entrada y una sola salida, diseñamos un controlador (compensador) tal que los polos dominantes en lazo cerrado tengan un factor de amortiguamiento relativo ζ deseado y una frecuencia natural no amortiguada ω_n. En este enfoque, el orden del sistema aumenta en 1 o 2, a menos que ocurra una cancelación de polos o ceros. Observe que en este enfoque suponemos que los efectos sobre las respuestas de los polos en lazo cerrado no dominantes son insignificantes.

En lugar de especificar sólo los polos dominantes en lazo cerrado (enfoque del diseño convencional), el enfoque actual de ubicación de polos especifica todos los polos en lazo cerrado. (Sin embargo, hay un costo asociado con ubicar todos los polos en lazo cerrado, porque hacerlo requiere de mediciones exitosas de todas las variables de estado, o bien requiere de la inclusión de un observador de estado en el sistema.) También existe un reque-

rimiento en la parte del sistema para que los polos en lazo cerrado se ubiquen en posiciones elegidas en forma arbitraria. El requerimiento es que el sistema sea de estado completamente controlable. En esta sección comprobaremos este hecho.

Considere un sistema de control

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathrm{B}u \tag{12-1}$$

en donde x = vector de estado (vector de dimensión n)
u = señal de control (escalar)
A = matriz de coeficientes constantes $n \times n$
B = matriz de coeficientes constantes $n \times 1$

Seleccionaremos la señal de control como

$$u = -\mathrm{K}x \tag{12-2}$$

Esto significa que la señal de control se determina mediante un estado instantáneo. Tal esquema se denomina ***realimentación del estado.*** La matriz K de $1 \times n$ se denomina matriz de ganancias de la realimentación del estado. En el análisis siguiente suponemos que u no tiene restricciones.

La figura 12-l(a) muestra el sistema definido mediante la ecuación (12-1). Se trata de un sistema de control en lazo abierto, porque el estado x no se realimenta a la señal de control u. La figura 12–1(b) muestra el sistema con una realimentación del estado. Éste es un sistema de control en lazo cerrado, porque el estado x se realimenta a la señal de control u.

Sustituir la ecuación (12-2) en la ecuación (12-1) produce

$$\dot{x}(t) = (\mathrm{A} - \mathrm{BK})x(t)$$

La solución de esta ecuación se obtiene mediante

$$x(t) = e \tag{12-3}$$

en donde x(O) es el estado inicial provocado por perturbaciones externas. La estabilidad y las características de respuesta transitoria se determinan mediante los valores característicos de la matriz A − BK. Si se elige la matriz K en forma adecuada, la matriz A − BK se convierte en una matriz asintóticamente estable y para todos los $x(O) \neq 0$ es posible hacer que $x(t)$ tienda a 0 conforme t tiende a infinito. Los valores característicos de la matriz A − BK se denominan polos reguladores. Si éstos se ubican en el semiplano izquierdo del plano s, entonces $x(t)$ tiende a 0 conforme t tiende a infinito. El problema de ubicar los polos en lazo cerrado en las posiciones deseadas se denomina problema de ubicación de polos.

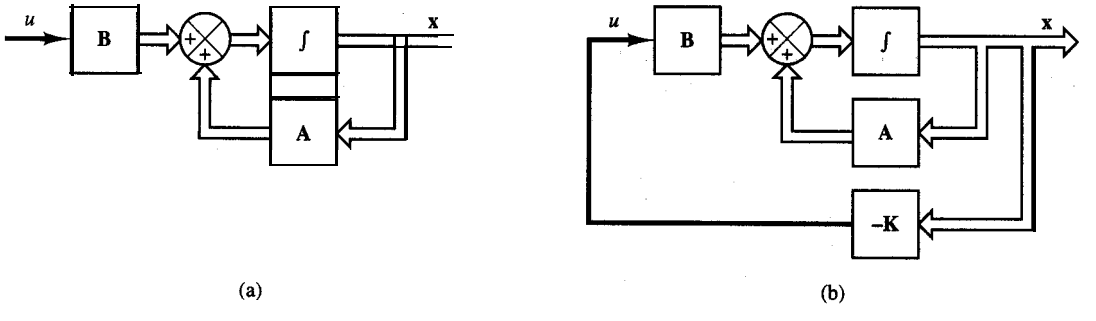


Figura 12–1
(a) Sistema de control en lazo abierto; (b) sistema de control en lazo cerrado con $u = -\mathrm{K}x$.

A continuación, demostraremos que la ubicación arbitraria de los polos para un sistema determinado es posible si y sólo si el sistema es de estado completamente controlable.

Condición necesaria y suficiente para la ubicación arbitraria de los polos. Considere el sistema de control definido mediante la ecuación (12 – 1). Suponemos que la magnitud de la señal de control u no está acotada. Si se elige la señal de control u como

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

en donde K es la matriz de ganancias< de realimentación del estado (matriz de 1 X n), éste se vuelve un sistema de control en lazo cerrado como se aprecia en la figura 12-l(b) y la solución para la ecuación (12-1) se convierte en la que se obtuvo mediante la ecuación (12−3), o

$$\mathrm{x}(t) = e^{(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})t}\mathbf{x}(0)$$

Observe que los valores característicos de la matriz A – BK (los cuales representamos con $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$) son los polos en lazo cerrado deseados.

Ahora demostraremos que una condición necesaria y suficiente para la ubicación arbitraria de los polos es que el sistema sea de estado completamente controlable. Primero obtendremos la condición necesaria. Empezaremos por demostrar que, si el sistema no es de estado completamente controlable, existen valores característicos de la matriz A – BK que no se controlan mediante la realimentación del estado.

Suponga que el sistema de la ecuación (12-1) no es de estado completamente controlable. Así, el rango de la matriz de controlabilidad es menor que n, o

$$\text{rango}[\mathrm{B} \quad \mathrm{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = q < n$$

Esto significa que existen q vectores columna linealmente independientes en la matriz de controlabilidad. Definamos tales q vectores columna linealmente independientes como $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_q$. También seleccionemos $n - q$ vectores n adicionales $\mathbf{v}_{q+1}, \mathbf{v}_{q+2}, \ldots, \mathbf{v}_n$, tales que

$$\mathrm{P} = [\mathbf{f}_1 \mid \mathbf{f}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{f}_q \mid \mathbf{v}_{q+1} \mid \mathbf{v}_{q+2} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n]$$

sea de rango n. En este caso, se demuestra que

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right], \qquad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_{11} \\ \hline \mathbf{0} \end{array}\right]$$

(Véase el problema A-12-1 para la obtención de estas ecuaciones.) Ahora definamos

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathrm{KP} = [\mathbf{k}_1 \quad \mathbf{k}_2]$$

Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} |s\mathbf{I} - \mathrm{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}| &= |\mathrm{P}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathrm{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathrm{P}| \\ &= |s\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{P}| \\ &= |s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}}| \\ &= \left|s\mathbf{I} - \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_{11} \\ \hline \mathbf{0} \end{array}\right][\mathbf{k}_1 \mid \mathbf{k}_2]\right| \\ &= \begin{vmatrix} s\mathbf{I}_q - \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11}\mathbf{k}_1 & -\mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{11}\mathbf{k}_2 \\ 0 & s\mathbf{I}_{n-q} - \mathbf{A}_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= |s\mathbf{I}_q - \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11}\mathbf{k}_1| \cdot |s\mathbf{I}_{n-q} - \mathbf{A}_{22}| = 0$$

en donde 1, es una matriz identidad de dimensión q e $\mathbf{I}_{n-q}$ es una matriz identidad de dimensión $(n - q)$.

Observe que los valores característicos de $\mathbf{A}_{22}$ no dependen de K. Por tanto, si el sistema no es de estado completamente controlable, existen valores característicos de la matriz A que no pueden ubicarse en forma arbitraria. En este caso, para ubicar arbitrariamente los valores característicos de la matriz A - BK, el sistema debe ser de estado completamente controlable (condición necesaria).

A continuación demostraremos una condición suficiente: es decir, si el sistema es de estado completamente controlable [lo que significa que la matriz M obtenida mediante la ecuación (12-5) que se presenta a continuación tiene la inversa], entonces todos los valores característicos de la matriz A se ubican arbitrariamente.

Al demostrar una condición suficiente, es conveniente transformar la ecuación de estado obtenida mediante la ecuación (12-1) a la forma canónica controlable.

Defina una matriz de transforma& $\mathbf{T}$ mediante

$$T = M W \tag{12-4}$$

en donde M es la matriz de controlabilidad

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \tag{12-5}$$

Y

$$w = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{12-6}$$

en donde las a_i son los coeficientes del polinomio característico

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

Defina un nuevo vector de estado $\hat{\mathbf{x}}$ mediante

$$x = TX$$

Si el rango de la matriz de controlabilidad M es n (lo que significa que el sistema es de estado completamente controlable), entonces existe la inversa de la matriz T y la ecuación (12-1) se convierte en

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = T\text{-}'AT2 + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}u \tag{12-7}$$

en donde

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{vmatrix} \tag{12-8}$$

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{12-9}$$

[Véanse los problemas A-12-2 y A-12-3 para la obtención de las ecuaciones (12-8) y (12-9).] La ecuación (12-7) está en la forma canónica controlable. Por tanto, dada una ecuación de estado, la ecuación (12-1) se transforma a la forma canónica controlable si el sistema es de estado completamente controlable y si el vector de estado x se transforma en el vector de estado $\hat{\mathbf{x}}$ usando la matriz de transformación T obtenida mediante la ecuación (12-4).

Seleccionemos el conjunto de los valores característicos deseados como $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. En este caso la ecuación característica deseada se convierte en

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n = 0 \tag{12-10}$$

Escribamos

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathrm{KT} = [\delta_n \ \delta_{n-1} \cdots \delta_1] \tag{12-11}$$

Cuando se usa $u = -\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{KT}\hat{\mathbf{x}}$ para controlar el sistema obtenido mediante la ecuación (12−7), la ecuación del sistema se convierte en

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathrm{T\text{-}'ATX} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BKT}\hat{\mathbf{x}}$$

La ecuación característica es

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BKT}| = 0$$

Esta ecuación característica es igual a la ecuación característica para el sistema, definida mediante la ecuación (12 - 1), cuando $u = -\mathrm{Kx}$ se usa como la señal de control. Esto se observa del modo siguiente: dado que

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathrm{Ax} + \mathrm{Bu} = (\mathrm{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}$$

la ecuación característica para este sistema es

$$|s\mathbf{I} - \mathrm{A} + \mathbf{BK}| = |\mathbf{T}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathrm{A} + \mathbf{BK})\mathbf{T}| = |s\mathbf{I} - \mathrm{T\text{-}'AT} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BKT}| = 0$$

Ahora simplifiquemos la ecuación característica del sistema a la forma canónica controlable. Remitiéndonos a las ecuaciones (12−8), (12-9) y (12−11), tenemos que

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BKT}|$$

$$= \left| \mathrm{SI} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} [\delta_n \ \ \delta_{n-1} \ \cdots \ \delta_1 \right|$$

$$= \begin{vmatrix} s & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & s & \cdots & 0 \\ & & & \\ & & & \\ a_n + \delta_n & a_{n-1} + \delta_{n-1} & \cdots & s + a_1 + \delta_1 \end{vmatrix}$$

$$= s^n + (a_1 + \delta_1)s^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} + \delta_{n-1})s + (a, + \delta_n) = 0 \qquad \textbf{(12-12)}$$

Ésta es la ecuación característica para el sistema con una realimentación del estado. Por tanto, debe ser igual a la ecuación (12−10), que es la ecuación característica deseada. Igualando los coeficientes de las potencias iguales de s, obtenemos

$$a_1 + \delta_1 = \alpha_1$$
$$a_2 + \delta_2 = \alpha_2$$

$$a_n + \delta_n = \alpha_n$$

Despejando las δ_i en las ecuaciones anteriores y sustituyéndolas en la ecuación (12-ll), obtenemos

$$\mathbf{K} = \hat{\mathbf{K}}\mathbf{T}^{-1} = [\delta_n \quad \delta_{n-1} \cdots \delta_1]\mathbf{T}^{-1}$$
$$= [\alpha_n - a_n \mid \alpha_{n-1} \quad a_{n-1} \mid \cdots \quad \alpha_2 - a_2 \mid \alpha_1 - a_1]\mathbf{T}^{-1} \qquad (12\text{-}13)$$

Por tanto, si el sistema es de estado completamente controlable, todos los valores característicos se ubican arbitrariamente seleccionando la matriz **K** de acuerdo con la ecuación (12-13) (condición suficiente).

Hemos demostrado que la condición necesaria y suficiente para la ubicación arbitraria de los polos es que el sistema sea de estado completamente controlable.

Pasos de diseño para la ubicación de polos. Suponga que el sistema se define mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

y que la señal de control se obtiene mediante

$$u = -\mathbf{Kx}$$

La matriz de ganancias de realimentación **K** que obliga a los valores característicos de **A − BK** a ser $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ (valores deseados) se determina mediante los pasos siguientes (Si μ_i es un valor característico complejo, su conjugado también debe ser un valor característico de **A-BK.)**

Paso 1: verifique la condición de controlabilidad para el sistema. Si el sistema es de estado completamente controlable, use los pasos siguientes.

Paso 2: a partir del polinomio característico para la matriz **A,**

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

determine los valores de $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Paso 3: determine la matriz de transformación **T** que convierte la ecuación de estado del sistema a la forma canónica controlable. (Si la ecuación del sistema determinada ya está en

la forma canónica controlable, entonces T = 1.) No es necesario escribir la ecuación de estado en la forma canónica controlable. Aquí sólo necesitamos encontrar la matriz T. La transformación de la matriz T se obtiene mediante la ecuación (12−4), o

$$T = M W$$

en donde M se obtiene a partir de la ecuación (12-5) y W se obtiene a partir de la ecuación (12-6).

Paso 4: usando los valores característicos deseados (los polos en lazo cerrado deseados), escriba el polinomio característico que se busca:

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$$

y determine los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Paso 5: la matriz de ganancias de realimentación del estado K requerida se determina a partir de la ecuación (12−13), que puede reescribirse como:

$$K = [\alpha_n - a_n \mid \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \mid \alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1]T^{-1}$$

Comentarios. Observe que, si el sistema es de un orden inferior ($n \leq 3$), la sustitución directa de la matriz K en el polinomio característico deseado puede ser más simple. Por ejemplo, si $n = 3$, escriba la matriz de ganancias de realimentación de estado K como

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

Sustituya esta matriz K en el polinomio característico deseado $|s\mathbf{I} - A + \mathbf{BK}|$ e iguálela con $(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)$, o

$$|s\mathbf{I} - A + \mathbf{BK}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)$$

Dado que ambos miembros de esta ecuación característica son polinomios en s, igualando los coeficientes de las potencias iguales de s en ambos miembros, es posible determinar los valores de k_1, k_2 y k_3. Este enfoque es conveniente si $n = 2$ o 3. (Para $n = 4, 5, 6, \ldots$, este enfoque se vuelve muy tedioso.)

Existen otros enfoques para la determinación de la matriz de ganancias de realimentación del estado K. A continuación, presentaremos una fórmula muy difundida, conocida como la fórmula de Ackermann para determinar la matriz de ganancias de realimentación del estado K.

Fórmula de Ackermann. Considere el sistema obtenido mediante la ecuación (12−1), que puede reescribirse como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u$$

Suponemos que este sistema es de estado completamente controlable.También suponemos que los polos en lazo cerrado deseados están en $s = \mu_1, s = \mu_2, \ldots, s = \mu_n$.

El uso de un control mediante la realimentación del estado

$$u = -Kx$$

modifica la ecuación del sistema a

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} \tag{12-14}$$

Definamos

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$$

La ecuación característica deseada es

$$sI - A + BK = sI - \tilde{A} = (s - \mu_1)(s - \mu_2)\cdots(s - \mu_n)$$
$$= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n = 0$$

Dado que el teorema de Cayley-Hamilton plantea que $\tilde{A}$ satisface su propia ecuación característica, tenemos que

$$\phi(\tilde{A}) = \tilde{A}^n + \alpha_1\tilde{A}^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\tilde{A} + \alpha_n I = 0 \qquad (12\text{-}15)$$

Emplearemos la ecuación (12− 15) para obtener la fórmula de Ackermann. Para simplificar la obtención, consideremos el caso en el que $n = 3$. (Para cualquier otro entero positivo n, es posible extender con facilidad la obtención siguiente.)

Considere las identidades siguientes:

$$1 = 1$$
$$\acute{A} = A - B K$$
$$\tilde{A}^2 = (A - BK)^2 = A^2 - ABK - BK\acute{A}$$
$$\tilde{A}^3 = (A - BK)^3 = A^3 - A^2BK - ABK\acute{A} - BK\tilde{A}^2$$

Multiplicando las ecuaciones anteriores, en orden, por $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$ (en donde $\alpha_0 = 1$), respectivamente y agregando los resultados, obtenemos

$$\alpha_3 I + \alpha_2\tilde{A} + \alpha_1\tilde{A}^2 + \tilde{A}^3$$
$$= \alpha_3 I + \alpha_2(A - BK) + \alpha_1(A^2 - ABK - BK\acute{A}) + A^3 - A^2BK$$
$$- ABK\acute{A} - BK\tilde{A}^2$$
$$= \alpha_3 I + \alpha_2 A + \alpha_1 A^2 + A^3 - \alpha_2 BK - \alpha_1 ABK - \alpha_1 BK\tilde{A} - A^2BK$$
$$-ABK\acute{A} - BK\tilde{A}^2 \qquad (12\text{-}16)$$

Remitiéndonos a la ecuación (12−15), tenemos que

$$\alpha_3 I + \alpha_2\tilde{A} + \alpha_1\tilde{A}^2 + \tilde{A}^3 = \phi(\tilde{A}) = 0$$

Asimismo, tenemos que

$$\alpha_3 I + \alpha_2 A + \alpha_1 A^2 + A^3 = \phi(A) \neq 0$$

Sustituyendo las dos últimas ecuaciones en la ecuación (12−16), tenemos que

$$\phi(\tilde{A}) = \phi(A) - \alpha_2 BK - \alpha_1 BK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2 - \alpha_1 ABK - ABK\acute{A} - A^2BK$$

Dado que $\phi(\tilde{A}) = 0$, obtenemos

$$\phi(A) = B(\alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2) + AB(\alpha_1 K + K\acute{A}) + A^2BK$$
$$= [B \mid AB \quad A^2B]\begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2 \\ \alpha_1 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix} \qquad (12\text{-}17)$$

Puesto que el sistema es de estado completamente controlable, la inversa de la matriz de controlabilidad

$$[B \quad AB \quad A^2B]$$

existe. Premultiplicando ambos miembros de la ecuación (12-17) por la inversa de la matriz de controlabilidad, obtenemos

$$[\,B \mid AB \mid A^2B]^{-1}\phi(A) = \begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2 \\ \alpha_1 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix}$$

Premultiplicando ambos miembros de esta ultima ecuación por $[0 \quad 0 \quad 1]$, obtenemos

$$[0 \quad 0 \quad 1][B \quad AB \mid A^2B]^{-1}\phi(A) = [0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2 \\ \alpha_1 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix} = K$$

que puede reescribirse como

$$K = [0 \quad 0 \quad 1]\,[B \mid AB \quad A^2B]^{-1}\phi(A)$$

Esta última ecuación produce la matriz de ganancias de realimentación del estado K deseada.

Para un entero positivo arbitrario n, tenemos que

$$K = [0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 1][B \quad AB \mid \ldots \mid A^{n-1}B]^{-1}\phi(A) \qquad (12\text{-}18)$$

La ecuación (12-18) se conoce como fórmula de Ackermann para la determinación de la matriz de ganancias de realimentación del estado K.

EJEMPLO 12-1 Considere el sistema definido mediante

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

en donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Usando el control mediante la realimentación del estado $u = -Kx$, se quiere que los polos en lazo cerrado estén en $s = -2 \pm j4$ y $s = -10$. Determine la matriz de ganancias de realimentación del estado K.

Primero necesitamos verificar la matriz de controlabilidad del sistema. Dado que la matriz de controlabilidad M se obtiene mediante

$$M = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}$$

encontramos que $|M| = -1$ y, por tanto el rango M = 3. Así, el sistema es de estado completamente controlable y es posible la ubicación arbitraria de los polos.

A continuación, resolveremos este problema. Comprobaremos cada uno de los tres métodos presentados en este capítulo.

Método 1: en este primer método se usa la ecuación (12-13). La ecuación característica para el sistema es

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 5 & s+6 \end{vmatrix}$$

$$= s^3 + 6s^2 + 5s + 1$$
$$= s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

Por tanto,

$$a_1 = 6, \qquad a_2 = 5, \qquad a_3 = 1$$

La ecuación característica deseada es

$$(s + 2 - j4)(s + 2 + j4)(s + 10) = s^3 + 14s^2 + 60s + 200$$
$$= s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3 = 0$$

Así,

$$\alpha_1 = 14, \qquad \alpha_2 = 60, \qquad \alpha_3 = 200$$

Remitiéndonos a la ecuación (12–13), tenemos que

$$K = [\alpha_3 - a_3 \mid \alpha_2 - a_2 \mid \alpha_1 - a_1]T^{-1}$$

en donde T = 1 para este problema, debido a que la ecuación de estado determinada está en la forma canónica controlable. Por tanto, tenemos que

$$K = [200 - 1 \quad 60 - 5 \quad 14 - 6]$$
$$= [199 \quad 55 \quad 8]$$

Método 2: definiendo la matriz de ganancias de realimentación del estado K deseada como

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

e igualando $|sI - A + BK|$ con la ecuación característica deseada, obtenemos

$$|sI - A + BK| = \left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2 \quad k_3] \right|$$

$$= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 + k_1 & 5 + k_2 & s + 6 + k_3 \end{vmatrix}$$

$$= s^3 + (6 + k_3)s^2 + (5 + k_2)s + 1 + k_1$$
$$= s^3 + 14s^2 + 60s + 200$$

Por tanto,

$$6 + k_3 = 14, \qquad 5 + k_2 = 60, \qquad 1 + k_1 = 200$$

a partir de lo cual obtenemos

$$k_1 = 199, \qquad k_2 = 55, \qquad k_3 = 8$$

o bien

$$K = [199 \quad 55 \quad 8]$$

Método 3: el tercer método es usar la fórmula de Ackermann. Remitiéndonos a la ecuación (12–18), tenemos que

$$K = [0 \quad 0 \quad 1][B \mid AB \mid A^2B]^{-1}\phi(A)$$

Dado que

$$\phi(A) = A^3 + 14A^2 + 60A + 2001$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}^3 + 14 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}^2$$

$$+ 60 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} + 200 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix}$$

Y

$$[B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}$$

obtenemos

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix}$$

$$= [0 \quad 0 \quad 1] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix}$$

$$= [199 \quad 55 \quad 8]$$

Como es natural, la matriz de ganancias de realimentación K obtenida mediante los tres métodos es la misma. Con esta realimentación del estado, los polos en lazo cerrado se ubican en $s = -2 \pm j4$ y $s = -10$, como se quería.

Observe que, si n el orden del sistema es 4 o mayor, son recomendables los métodos 1 y 3, dado que todos los cálculos de matrices los realiza una computadora. Si se usa el método 2, los cálculos a mano se vuelven necesarios porque una computadora no maneja la ecuación característica con los parámetros desconocidos $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Comentarios. Es importante señalar que la matriz K no es única para un sistema determinado, sino que depende de las ubicaciones de los polos en lazo cerrado deseados (los cuales determinan la velocidad y el amortiguamiento de la respuesta) seleccionados Observe que la selección de los polos en lazo cerrado deseados, o de la ecuación característica deseada, es un compromiso entre la rapidez de la respuesta del vector de error y la sensibilidad ante perturbaciones y el ruido en la medición. Es decir, si incrementamos la velocidad de la respuesta de error, por lo general se incrementan los efectos adversos de las perturbaciones y el ruido en la medición. Si el sistema es de segundo orden, su dinámica (las características de respuesta) se correlaciona precisamente con la ubicación de los polos en lazo cerrado deseados y los ceros de la planta. Para sistema de orden superior, la ubicación de los polos en lazo cerrado y la dinámica del sistema (las características de respuesta) no se correlacionan fácilmente. Por tanto, al determinar la matriz de ganancias de realimentación del estado K para un sistema determinado, es conveniente examinar mediante simulaciones de computadora las características de respuesta del sistema para varias matrices K diferentes (con base en varias ecuaciones características deseadas distintas) y elegir aquella que ofrezca el mejor desempeño del sistema general.

12-3 SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE UBICACIÓN DE POLOS CON MATLAB

Los problemas de ubicación de polos se solucionan fácilmente con MATLAB. Resolvamos el mismo problema de ubicación de polos analizado en el ejemplo 12— 1. La ecuación del sistema es

$$\dot{\mathbf{x}} = Ax + Bu$$

en donde

$$A = \begin{bmatrix} & & \\ -100 & -501 & 401 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Usando un control mediante la realimentación del estado $u = -\mathbf{K}x$, se pretende que los polos en lazo cerrado estén en $s = \mu_i\ (i = 1, 2, 3)$, en donde

$$\mu_1 = -2 + j4, \qquad \mu_2 = -2 - j4, \qquad \mu_3 = -10$$

Encontremos la matriz de ganancias de realimentación del estado K necesaria.

Si usamos la matriz de transformación T en el diseño de la matriz de control de realimentación del estado K, necesitamos encontrar los coeficientes al, a_2 y a_3 de la ecuación característica $|s\mathbf{I} - A| = 0$. Esto se hace introduciendo el enunciado

```
P = poly(A)
```

en la computadora. A continuación, los coeficientes aparecerán en la pantalla del modo siguiente:

```
A = [0 1 0;0 0 1;-1 -5 -61;
P = poly(A)

P =

   1.0000 6.0000 5.0000 1.0000
```

Entonces a_1 = al = P(2), a_2 = a2 = P(3), y a_3 = a3 = P(4).

Para obtener la matriz de transformación T, primero introducimos las matrices M y W en la computadora, en donde

$$M = [B \quad AB \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}]$$

Y

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a continuación multiplicamos M y W, lo cual se hace con mucha facilidad con MATLAB.

$$T = M\,W$$

Después, se nbtiene la ecuación característica deseada. Esto se hace definiendo una matriz J tal que

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + j4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 - j4 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

y después usando el comando poly(J), del modo siguiente:

```
J = [-2 + 4*i  0  0;0  -2-4*i  0;0  0  -10];
Q = poly(J)

Q =

   1   14   60   200
```

Por tanto, tenemos que

$$\alpha_1 = \text{aa1} = \text{Q(2)}, \quad \alpha_2 = \text{aa2} = \text{Q(3)}, \quad \alpha_3 = \text{aa3} = \text{Q(4)}$$

(Usamos aai para α_i.)

La matriz de ganancias de realimentación del estado K deseada se determina a partir de

$$\text{K} = [\alpha_3 - a_3 \quad \alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1]\mathbf{T}^{-1}$$

o bien

$$\text{K} = [\text{aa3} - \text{a3} \quad \text{aa2} - \text{a2} \quad \text{aa1} - \text{a1}]*(\text{inv(T)})$$

El programa MATLAB 12-1 sirve para resolver este problema ejemplo usando la matriz de transformación T.

Programa MATLAB 12-1

```
% --------- Ubicación de polos ---------

% ***** Determinación de la matriz de ganancias de realimentación
% del estado K usando la matriz de transformación T *****

% ***** Introduzca las matrices A y B *****

A = [0  1  0;0  0  1;-1  -5  -6];
B = [0;0;1];

% ***** Defina la matriz de controlabilidad M *****

M = [B   A*B   A^2*B];

% ***** Verifique el rango de la matriz M *****

rank(M)

ans =
```

```
     3

% ***** Dado que el rango de M es 3, es posible la
% ubicación arbitraria de los polos *****

% ***** Obtenga los coeficientes del polinomio característico
% |sI - A|. Esto se hace introduciendo el enunciado poly(A) *****

JA = poly(A)

JA =

   1.0000   6.0000   5.0000   1.0000

a1 = JA(2); a2 = JA(3); a3 = JA(4);

% ***** Defina las matrices W y T del modo siguiente *****

W = [a2  a1  1;a1  1  0;1  0  0];
T = M*W;

% ***** Obtenga el polinomio característico deseado definiendo
% la matriz J siguiente e introduciendo el enunciado poly(J) *****

J = [-2+j*4    0    0;0    -2-j*4    0;0    0    -10];

JJ = poly(J)

JJ =

   1   14   60   200

aa1 = JJ(2); aa2 = JJ(3); aa3 = JJ(4);

% ***** La matriz de ganancias de realimentación del estado K % se
obtiene mediante *****

K = [aa3-a3   aa2-a2   aa1-a1]*inv(T)

K =

   199   55   8

% ***** Por tanto, k1, k2 y k3 se obtienen mediante *****

k1 = K(1); k2 = K(2); k3 = K(3)

k1 =

   199
```

```
k2 =
    55
k3 =
     8
```

Fórmula de Ackermann. Si usamos la fórmula de Ackermann para determinar la matriz de ganancias de realimentación del estado, necesitamos calcular un polinomio característico matricial $\phi(\mathbf{A})$, en el que para este sistema

$$\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 + \alpha_1\mathbf{A}^2 + \alpha_2\mathbf{A} + \alpha_3\mathbf{I}$$

En MATLAB, polyvalm calcula el polinomio matricial $\phi(\mathbf{A})$. Para la J determinada, poly(J) calcula los coeficientes del polinomio característico, como se mostró antes. Para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

el comando polyvalm(poly(J),A) calcula la $\phi(\mathbf{A})$ siguiente:

$$\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 + 14\mathbf{A}^2 + 60\mathbf{A} + 2001 = \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix}$$

De hecho,

```
polyvalm(poly(J),A)
ans =
     199    55     8
      -8   159     7
      -7   -43   117
```

el programa MATLAB 12-2 produce la matriz de ganancias de realimentación del estado K usando la fórmula de Ackermann.

Programa MATLAB 12–2

```
% ------- Ubicación de polos -------
% ***** Determinación de la matriz de ganancias de realimentación
% del estado K usando la fórmula de Ackermann *****
% ***** Introduzca las matrices A y B *****
A = [0  1  0;0  0  1;-1  -5  -6];
```

```
B = [0;0;1];

% ***** Defina la matriz de controlabilidad M *****

M = [B  A*B  A^2*B];

% ***** Verifique el rango de la matriz M *****

rank(M)

ans =

     3

% ***** Dado que el rango de M es 3, es posible
% la ubicación arbitraria de los polos *****

% ***** Obtenga el polinomio característico deseado definiendo
% la siguiente matriz J e introduciendo el enunciado poly(J) *****

J = [-2+j*4   0   0;0   -2-j*4   0;0   0   -10];

poly(J)

ans =

     1   14   60   200

% ***** Calcule el polinomio característico
% Phi_5 polyvalm(poly(J),A) *****

Phi = polyvalm(poly(J),A)

% ***** La matriz de ganancias de realimentación del estado K % se
obtiene mediante *****

K = [0   0   1]*inv(M)*Phi

K =

   199   55   8

% ***** Por tanto, k1, k2 y k3 se obtiene mediante *****

k1 = K(1), k2 = K(2), k3 = K(3)

K1 =

   199

k2 =
```

55

k3 =

8

12-4 DISEÑO DE SISTEMAS DEL TIPO REGULADOR MEDIANTE LA UBICACIÓN DE POLOS

Considere el sistema del péndulo invertido de la figura 12-2, en el que un péndulo se monta en un carro controlado con un motor. Aquí sólo consideramos el problema en dos dimensiones, en el que el péndulo únicamente se mueve en el plano del papel.

Se desea conservar el péndulo perpendicular ante la presencia de perturbaciones (tales como una ráfaga de viento que actúa sobre la masa m o una fuerza inesperada aplicada al carro). El péndulo inclinado regresa a la posición vertical cuando se aplica al carro una fuerza de control u apropiada. Al final de cada proceso de control, se pretende regresar el carro a $x = 0$, la posición de referencia.

Diseñe un sistema de control tal que, dadas cualesquiera condiciones iniciales (provocadas por perturbaciones), el péndulo regrese a la posición vertical y el carro regrese a la posición de referencia ($x = 0$) rápidamente (por ejemplo, con un tiempo de estabilización de alrededor de 2 seg) con un amortiguamiento razonable (por ejemplo, que los polos dominantes en lazo cerrado tengan $\zeta = 0.5$). Suponga los valores numéricos siguientes para M, m y l:

$$M = 2 \text{ kg}, \qquad m = 0.1 \text{ kg}, \qquad l = 0.5 \text{ m}$$

Se supone que la masa del péndulo se concentra en la parte superior de la varilla y se supone que la varilla no tiene masa.

Se desea diseñar un sistema de control que mantenga el péndulo invertido en una posición vertical para condiciones iniciales determinadas en el grado θ y/o una velocidad angular $\dot{\theta}$.

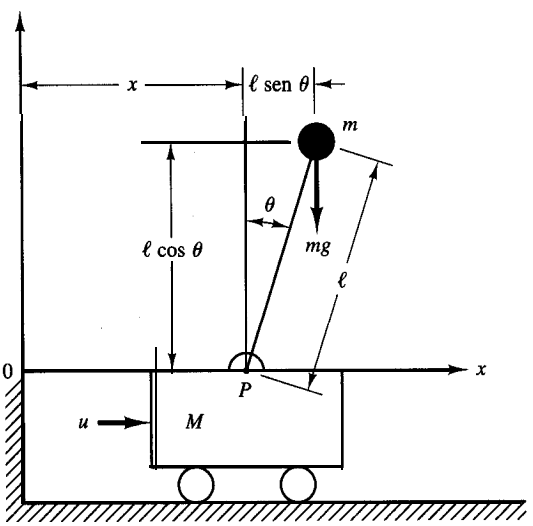


Figura **12–2**
Sistema del péndulo invertido.

Además, se requiere que el sistema de control regrese el carro a su posición de referencia al final de cada proceso de control. El sistema responderá exitosamente a cualesquiera perturbaciones en la forma de las condiciones iniciales. (El ángulo deseado θ_d siempre es cero y la posición del carro deseada siempre está en la posición de referencia. Por tanto, éste es un sistema regulador.)

Aquí se diseñará el controlador usando el método de control mediante la realimentación del estado a través de la técnica de ubicación de los polos. Como se señal6 antes, la condición necesaria y suficiente para la ubicación arbitraria de los polos es que el sistema es de estado completamente controlable.

El primer paso en el diseño es obtener un modelo matemático para el sistema del péndulo invertido.

Modelado matemático. Remitiéndonos a la sección 3-6, obtuvimos un modelo matemático para el sistema del péndulo invertido de la figura 3−16(a). Cuando se supone pequeño el ángulo θ, las ecuaciones que describen la dinámica del sistema se obtienen mediante las ecuaciones (3-55) y (3−56), mismas que pueden reescribirse

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u$$

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta$$

en donde I es el momento de inercia de la'barra del péndulo con respecto a su centro de gravedad. Dado que en este sistema la masa se concentra en la parte superior de la barra, el centro de gravedad es el centro del peso del péndulo. En este análisis, suponemos que el momento de inercia del péndulo con respecto a su centro de gravedad es cero, o Z = 0. Por tanto, el modelo matemático se convierte en lo siguiente:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \tag{12-19}$$

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \tag{12-20}$$

Las ecuaciones (12-19) y (12-20) definen un modelo matemático del sistema del péndulo invertido de la figura 12-2. (Estas ecuaciones linealizadas son válidas siempre y cuando θ sea pequeño.)

Las ecuaciones (12-19) y (12-20) se modifican a

$$Ml\ddot{\theta} = (M + m)g\theta - u \tag{12-21}$$

$$M\ddot{x} = u - mg\theta \tag{12-22}$$

La ecuación (12-21) se obtuvo eliminando $\ddot{x}$ de las ecuaciones (12-19) y (12-20). La ecuación (12-22) se obtuvo eliminando $\ddot{\theta}$ de las ecuaciones (12-19) y (12-20). A partir de la ecuación (12-21) obtenemos que la función de transferencia de la planta es

$$\frac{\Theta(s)}{-U(s)} = \frac{1}{Mls^2 - (M + m)g}$$

Sustituyendo los valores numéricos determinados y considerando que g = 9.81 m/seg², tenemos que

$$\frac{\Theta(s)}{-U(s)} = \frac{1}{s^2 - 20.601} = \frac{1}{s^2 - (4.539)^2}$$

La planta, el péndulo invertido tiene un polo sobre el eje real negativo (s = -4.539) y otro sobre el eje real positivo (s = 4.539). Por tanto, la planta es inestable en lazo abierto.

Defina las variables de estado x_1, x_2, x_3 y x_4 mediante

$$x_1 = \theta$$
$$x_2 = \dot{\theta}$$
$$x_3 = x$$
$$x_4 = \dot{x}$$

Considere que el ángulo θ indica la rotación de la barra del péndulo con respecto al punto P, y que x es la ubicación del carro. Consideramos θ y x como las salidas del sistema, o

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(Observe que tanto θ como x son cantidades que se miden fácilmente.) Así, a partir de la definición de las variables de estado y las ecuaciones (12-21) y (12−22), obtenemos

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{M+m}{Ml} g x_1 - \frac{1}{Ml} u$$
$$\dot{x}_3 = x_4$$
$$\dot{x}_4 = -\frac{m}{M} g x_1 + \frac{1}{M} u$$

En términos de las ecuaciones matriciales, tenemos que

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M+m}{Ml} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M} g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u \tag{12-23}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{12-24}$$

Las ecuaciones (12-23) y (12-24) presentan una representación en el espacio de estados del sistema del péndulo invertido. (Observe que la representación en el espacio de estados del sistema no es única. Hay una cantidad infinita de tales representaciones.)

Sustituyendo los valores numéricos determinados para M, m y l, tenemos que

$$\frac{M+m}{Ml} g = 20.601, \qquad \frac{m}{M} g = 0.4905, \qquad \frac{1}{Ml} = 1, \qquad \frac{1}{M} = 0.5$$

Usando estos valores numéricos, las ecuaciones (12-23) y (12-24) se pueden reescribir como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathrm{A}\mathbf{x} + \mathrm{B}u$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

en donde

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 100 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Usaremos el esquema de control mediante la realimentación del estado

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

Verifiquemos si el sistema es de estado completamente controlable. Dado que el rango de

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \;\vdots\; \mathrm{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \;\vdots\; \mathbf{A}^3\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -20.601 \\ -1 & 0 & -20.601 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.4905 \\ 0.5 & 0 & 0.4905 & 0 \end{bmatrix}$$

es 4, el sistema es de estado completamente controlable.

La ecuación característica del sistema es

$$|s\mathbf{I} - \mathrm{A}| = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ -20.601 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0.4905 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$
$$= s^4 - 20.601s^2$$
$$= s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4 = 0$$

Por tanto,

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = -20.601, \qquad a_3 = 0, \qquad a_4 = 0$$

A continuación debemos seleccionar las ubicaciones de los polos en lazo cerrado deseados. Dado que requerimos un sistema con un tiempo de asentamiento razonablemente pequeño (alrededor de 2 seg) y un amortiguamiento razonable (equivalente a $\zeta = 0.5$ en el sistema estándar de segundo orden), seleccionamos los polos en lazo cerrado deseados en $s = \mu_i\,(i = 1, 2, 3, 4)$, en donde

$$\mu_1 = -2 + j2\sqrt{3}, \qquad \mu_2 = -2 - j2\sqrt{3}, \qquad \mu_3 = -10, \qquad \mu_4 = -10$$

(En este caso, μ_1 y μ_2 son un par de polos dominantes en lazo cerrado con $\zeta = 0.5$ y $\omega_n = 4$. Los dos polos restantes en lazo cerrado, μ_3 y μ_4, se ubican lejos a la izquierda del par dominante de polos en lazo cerrado y, por tanto, el efecto sobre la respuesta de μ_3 y μ_4 es pequeño. Así, se cumplirán los requerimientos de velocidad y amortiguamiento.) La ecuación característica deseada se convierte en

$$(s-\mu_1)(s-\mu_2)(s-\mu_3)(s-\mu_4) = (s+2-j2\sqrt{3})(s+2+j2\sqrt{3})(s+10)(s+10)$$
$$= (s^2+4s+16)(s^2+20s+100)$$
$$= s^4+24s^3+196s^2+720s+1600$$
$$= s^4+\alpha_1 s^3+\alpha_2 s^2+\alpha_3 s+\alpha_4 = 0$$

En consecuencia, tenemos que

$$\alpha_1 = 24, \qquad \alpha_2 = 196, \qquad \alpha_3 = 720, \qquad \alpha_4 = 1600$$

Determinemos la matriz de ganancias de realimentación del estado K usando la ecuación (12-13) que puede reescribirse:

$$K = [\alpha_4 - a_4 \mid \alpha_3 - a_3 \mid \alpha_2 - a_2 \mid \alpha_1 - a_1]\mathbf{T}^{-1}$$

en donde la matriz T se obtiene mediante la ecuación (9-4), o

$$T = M\,W$$

y M y W se obtienen mediante las ecuaciones (12-5) y (12-6), respectivamente. Así,

$$M = [B \mid AB \mid \mathbf{A^2B} \mid \mathbf{A^3B}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -20.601 \\ -1 & 0 & -20.601 & 0.4905 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & \\ 0.5 & 0 & 0.4905 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -20.601 & 0 & 1 \\ -20.601 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la matriz T se vuelve

$$T = M\,W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -9.81 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & -9.81 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

De modo que,

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{0.5}{9.81} & 0 & \frac{1}{9.81} & 0 \\ 0 & -\frac{0.5}{9.81} & 0 & -\frac{1}{9.81} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

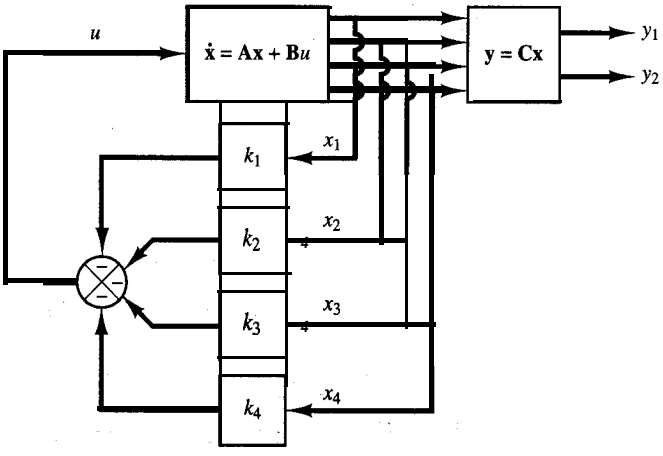


Figura **12–3**
Sistema del péndulo invertido con control mediante la realimentación del estado.

La matriz de ganancias de realimentación deseada K se convierte en

$$K = [\alpha_4 - a_4 \quad \alpha_3 - a_3 \mid \alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1]\,\mathbf{T}^{-1}$$

$$= [1600 - 0 \quad 720 - 0 \mid 196 + 20.601 \quad 24 - 0]\,\mathbf{T}^{-1}$$

$$= [1600 \quad 720 \quad 216.601 \quad 24] \begin{bmatrix} -\frac{0.5}{9.81} & 0 & -\frac{1}{9.81} & 0 \\ 0 & -\frac{0.5}{9.81} & 0 & -\frac{1}{9.81} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [-298.1504 \quad -60.6972 \quad -163.0989 \quad -73.3945]$$

La señal de control u se obtiene mediante

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} = 298.1504x_1 + 60.6972x_2 + 163.0989x_3 + 73.3945x_4$$

Observe que éste es un sistema regulador. El ángulo θ_d deseado siempre es cero y la ubicación x_d deseada en el carro siempre es cero. Por tanto, las entradas de referencia son cero. (En la sección 12-6 consideraremos el caso en el que el carro se mueve de acuerdo con la entrada de referencia.) La figura 12-3 muestra el esquema de control mediante la realimentación del estado para el sistema del péndulo invertido. (Dado que en este sistema las entradas de referencia son siempre cero, no aparecen en el diagrama.)

Determinación de la matriz de ganancias de realimentación del estado K con MATLAB. El programa MATLAB 12-3 produce la matriz de ganancias de realimentación del estado K.

Programa MATLAB 12–3

```
% -------- Diseño de un sistema de control del péndulo invertido --------
```

```
% ***** Este programa determina la matriz de ganancias de realimentación
% del estado K = [k1 k2 k3 k4] usando la fórmula
% de Ackermann *****

% ***** Introduzca las matrices A, B, C y D *****

A = [ 0        1   0   0;
      20.601   0   0   0;
      0        0   0   1;
     -0.4905   0   0   0];
B = [0; -1; 0; 0.5];
C = [1   0   0   0;
     0   0   1   0];
D = [0;0];

% ***** Defina la matriz de controlabilidad M y verifique su rango *****

M = [B   A*B   A^2*B   A^3*B];
rank(M)

ans =

     4

% ***** Dado que el rango de M es 4, el sistema es de estado
% completamente controlable. Por tanto, es posible la ubicación
% arbitraria de los polos *****

% ***** Introduzca el polinomio característico deseado, que
% se obtiene definiendo la matriz J siguiente e
% introduciendo el enunciado poly(J) *****

J = [-2 + 2*sqrt(3)*i    0      0      0;
     0      -2 - 2*sqrt(3)*i    0      0;
     0      0      -10     0;
     0      0      0      -10];
JJ = poly(J)

JJ =

  1.0e + 003 *

  0.0010   0.0240   0.1960   0.7200   1.6000

% ***** Introduzca el polinomio característico Phi *****

Phi = polyvalm(poly(J),A);

% ***** La matriz de ganancias de realimentación del estado K se determina
```

```
% a partir de *****
K = [0  0  0  1]*(inv(M))*Phi
K =
-298.1504  -60.6972  -163.0989  -73.3945
```

Obtención de la respuesta del sistema ante condiciones iniciales. Una vez determinada la matriz de ganancias de realimentación del estado K, el desempeño del sistema debe examinarse mediante simulaciones en computadora. Para simular la dinámica del sistema en la computadora y obtener respuestas a cualesquiera condiciones iniciales, procedemos del modo siguiente: las ecuaciones básicas para el sistema son la ecuación de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

y la ecuación de control

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

Cuando la ecuación de control se sustituye en la ecuación de estado, obtenemos

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}$$

que, cuando se sustituyen los valores numéricos, se obtiene mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -277.5494 & -60.6972 & -163.0989 & -73.3945 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 148.5847 & 30.3486 & 81.5494 & 36.6972 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{12-25}$$

A continuación obtendremos la respuesta del sistema diseñado a una condición inicial, mediante MATLAB.

La ecuación de estado del sistema se obtiene mediante la ecuación (12-25). Suponga que las condiciones iniciales se obtienen a partir de

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12-26}$$

Reescribimos la ecuación (12-25) como

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}$$

en donde

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ -277.5494 & -60.6972 & -163.0989 & -73.3945 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 148.5847 & 30.3486 & 81.5494 & 36.6972 \end{bmatrix}$$

Definimos el vector de condiciones iniciales como $\hat{\mathbf{B}}$ o

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Así la respuesta del sistema alas condiciones iniciales se obtiene despejando las ecuaciones siguientes (consulte en la sección 4-4 la respuesta a las condiciones iniciales):

$$\dot{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \hat{\mathbf{B}}u$$
$$x = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{z} + \hat{\mathbf{D}}u$$

en donde

$$\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{A}}, \quad \hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{B}}$$

El programa MATLAB 12-4 generará la respuesta del sistema obtenido mediante la ecuación (12-25) ante las condiciones iniciales especificadas por la ecuación (12-26). Observe que en el programa MATLAB que se muestra usamos las notaciones siguientes:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathrm{AA}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathrm{BB}, \quad \hat{\mathbf{C}} = \mathrm{AA}, \quad \hat{\mathbf{D}} = \mathrm{BB}$$

Programa MATLAB 12–4

```
% --------- Respuesta ante condiciones iniciales ---------

% ***** Este programa obtiene la respuesta del sistema
% xdot = (Ahat)x a la condición inicial dada x(0) *****

% ***** Introduzca las matrices A, B y K para producir la matriz AA
% = Ahat *****

A = [ 0       1   0   0;
      20.601  0   0   0;
      0       0   0   1;
     -0.4905  0   0   0];
B = [0;-1.0;0.5];
K = [-298.1504  -60.6972  -163.0989  -73.3945];
AA = A - B*K;

% ***** Introduzca la matriz de las condiciones iniciales BB = Bhat *****

BB = [0.1;0;0;0];
[x,z,t] = step(AA,BB,AA,BB);
x1 = [1  0  0  0]*x';
x2 = [0  1  0  0]*x';
x3 = [0  0  1  0]*x';
x4 = [0  0  0  1]*x';

% ***** Grafique las curvas de respuesta x1 contra t, x2 contra t, x3 contra t,
% y x4 contra t en un diagrama *****
```

```
subplot (2,2,1);
plot(t,x1); grid
title('x1 (Theta) contra t')
xlabel('t seg')
ylabel('x1 = Theta')

subplot(2,2,2);
plot(t,x2); grid
title('x2 (punto Theta) contra t')
xlabel('t seg')
ylabel('x2 = punto Theta')

subplot(2,2,3);
plot(t,x3); grid
title('x3 (Desplazamiento del carro) contra t')
xlabel('t seg')
ylabel('x3 = Desplazamiento del carro')

subplot(2,2,4);
plot(t,x4); grid
title ('x4 (Velocidad del carro) contra t')
xlabel('t seg')
ylabel('x4 = Velocidad del carro')
```

La figura 12-4 muestra las curvas de respuesta obtenidas con el programa MATLAB 12-4. Estas curvas muestran cómo el sistema del péndulo invertido regresa a la posición de referencia ($\theta = 0, x = 0$), dada la condición inicial $\theta(0) = 0.1$ rad, $\dot{\theta}(0) = 0, x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 0$. Las curvas de respuesta parecen aceptables. (Aquí hemos mostrado el uso del co-

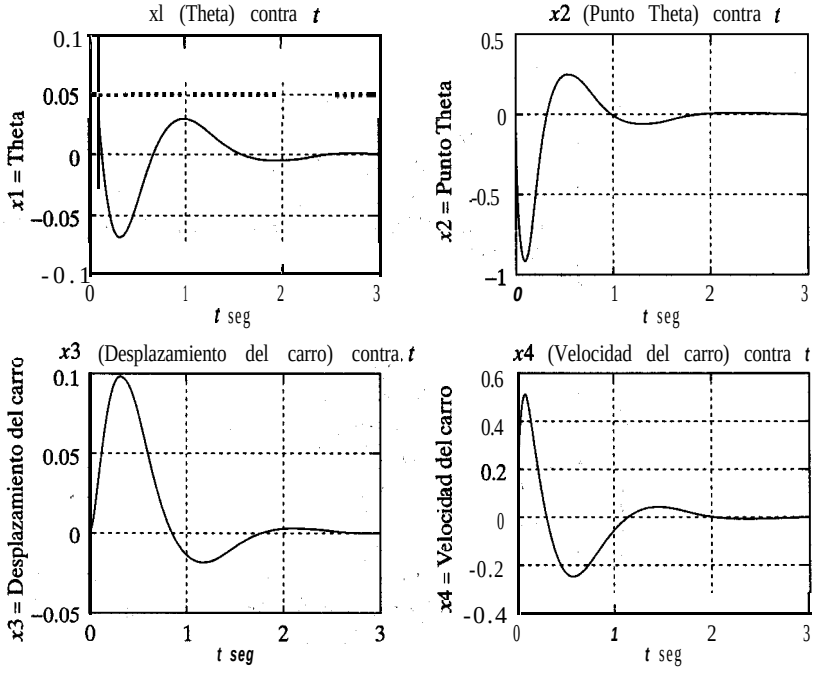


Figura 12–4
Respuesta del sistema del péndulo invertido sujeto ante condiciones iniciales.

mando subplot para presentar diagramas separados simultáneamente en la pantalla y graficar varios diagramas en una hoja de papel.)

Es importante señalar que tales curvas de respuesta dependen de la ecuación característica deseada (es decir, de los polos en lazo cerrado deseados). Para ecuaciones características deseadas diferentes, las curvas de respuesta, para las mismas condiciones iniciales, son distintas.

Observe que una respuesta más rápida normalmente requiere de una señal de control grande. Al diseñar un sistema de control semejante, se pretende que el diseñador examine varios conjuntos diferentes de polos en lazo cerrado deseados y determine las matrices K correspondientes. Después de hacer simulaciones en computadora del sistema y examinar las curvas de respuesta, seleccione la matriz K que ofrezca el mejor desempeño general del sistema. El criterio para el mejor desempeño general del sistema depende de la situación particular, incluyendo las consideraciones económicas.

12-5 OBSERVADORES DE ESTADO

En la sección 12-2, en la que presentamos el enfoque de ubicación de polos para el diseño de sistemas de control, supusimos que todas las variables de estado estaban disponibles para su realimentación. Sin embargo, en la práctica no todas las variables de estado están disponibles para su realimentación. Entonces, necesitamos estimar las variables de estado que no están disponibles Es importante señalar que debemos evitar diferenciar una variable de estado para generar otra. La diferenciación de una señal siempre decrementa la relación señal a ruido, porque este ultimo por lo general fluctúa más rápidamente que la señal de comando. En ocasiones, la relación señal a ruido se decrementa varias veces mediante un proceso único de diferenciación. Existen métodos para estimar las variables de estado que no se miden sin un proceso de diferenciación. La estimación de semejantes variables -de estado por lo- general se denomina observación. Un dispositivo (o un programa de computadora) que estima u observa las variables de estado se llama ***observador de estado,*** o, simplemente, ***observador.*** Si el observador de estado capta todas las variables de estado del sistema, sin importar si algunas están disponibles para una medición directa, se denomina ***observador de estado de orden completo.*** Hay ocasiones en las que un observador tal no es necesario, en las que sólo se requiere de la observación de las variables de estado que no se miden, pero no de aquellas que también se miden directamente. Por ejemplo, dado que las variables de salida son observables y se relacionan en forma lineal con las variables de estado, no necesitamos observar todas las variables de estado, sino sólo las $n - m$ variables de estado en las que n es la dimensión del vector de estado y m es la dimensión del vector de salida.

Un observador que estima menos de n variables de estado, en donde n es la dimensión del vector de estado, se denomina ***observador de estado de orden reducido*** o, simplemente, ***observador de orden reducido.*** Si el observador de estado de orden reducido tiene el orden mínimo posible, se denomina ***observador de estado de orden mínimo,*** u ***observador de orden mínimo.*** En esta sección analizaremos el observador de estado de orden completo y el observador de estado de orden mínimo.

Observador de estado. Un observador de estado estima las variables de estado con base en las mediciones de las variables de salida y de control. Aquí tiene una función importante el concepto de observabilidad analizado en la sección ll -7. Como veremos más adelante, los observadores de estado pueden diseñarse si y sólo si se satisface la condición de observabilidad.

En los análisis siguientes de los observadores de estado, usaremos la notación #para designar el vector de estado observado. En muchos casos prácticos, el vector de estado observado $\tilde{\mathbf{x}}$ se usa en la realimentación del estado para generar el vector de control deseado.

Considere el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{12-27}$$

$$y = cx \tag{12-28}$$

Suponga que el estado x se aproximará mediante el estado Xdel modelo dinámico

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{K}_e(y - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}) \tag{12-29}$$

que representa al observador de estado. Observe que el observador de estado tiene y y u como entradas y $\tilde{\mathbf{x}}$ como salida. El último término del segundo miembro de esta ecuación modelo, ecuación (12−29), es un término de corrección que contiene la diferencia entre la salida y medida y la salida $\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}$ estimada. La matriz $\mathbf{K}_e$ funciona como una matriz de ponderación. El término de corrección vigila el estado $\tilde{\mathbf{x}}$. Ante la presencia de una discrepancia entre las matrices A y B usadas en este modelo y las del sistema real, la adición del término de corrección ayuda a reducir los efectos producidos por la diferencia entre el modelo dinámico y el sistema real. La figura 12-5 muestra el diagrama de bloques del sistema y el observador de estado de orden completo.

A continuación analizaremos los detalles del observador de estado para el cual la dinámica se caracteriza mediante las matrices A y B y mediante el término de corrección adicional, que contiene la diferencia entre la salida medida y la salida estimada. En el análisis actual, suponemos que las matrices A y B usadas en el modelo son iguales a las del sistema real.

Observador de estado de orden completo. El orden del observador de estado que se analizará aquí es igual al del sistema. Suponga que el sistema se define mediante las ecuaciones (12-27) y (12-28) y que el modelo del observador se define mediante la ecuación (12-29).

Para obtener la ecuación de error del observador, restamos la ecuación (12-29) de la ecuación (12-27).

$$\dot{\mathbf{x}} - \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{K}_e(\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{C}\tilde{x})$$

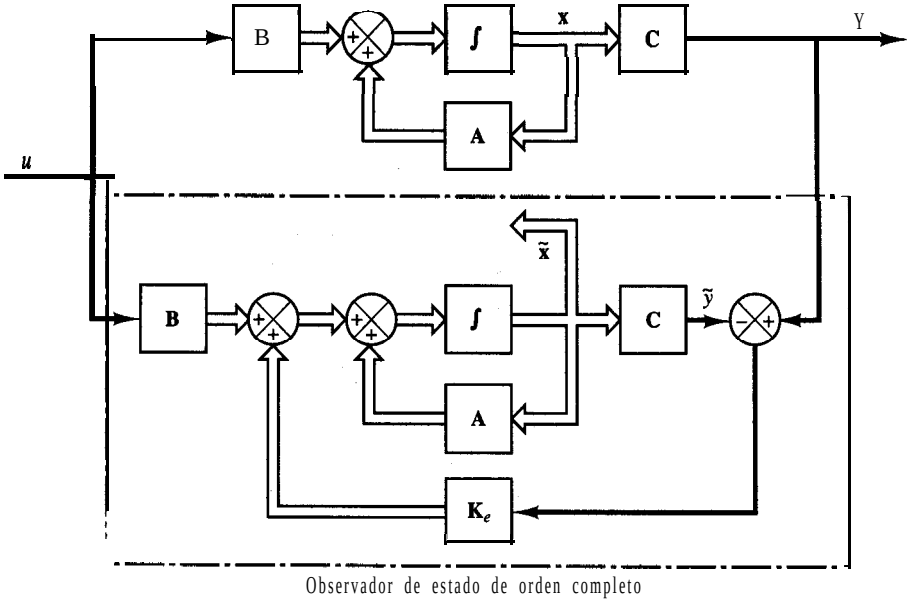


Figura **12–5**
Diagrama de bloques de un sistema y un observador de estado de orden completo cuando la entrada u y la salida y son escalares.

$$= (A - K_e C)(x - \tilde{x}) \tag{12-30}$$

Defina la diferencia entre x y $\tilde{x}$ como el vector de error e, o

$$e = x - \tilde{x}$$

Así, la ecuación (12-30) se convierte en

$$\dot{e} = (A - K_e C)e \tag{12-31}$$

A partir de la ecuación (12-31) vemos que el comportamiento dinámico del vector de error se determina mediante los valores característicos de la matriz $A - K_e C$. Si la matriz $A - K_e C$ es estable, el vector de error convergerá a cero para cualquier vector de error inicial e(O). Es decir que X(f) convergerá a x(t) sin considerar los valores de x(O) y X(O). Si se eligen los valores característicos de la matriz $A - K_e C$ en tal forma que el comportamiento dinámico del vector de error sea asintóticamente estable y suficientemente rápido, cualquier vector de error tenderá a 0 (el origen) con una velocidad adecuada.

Si el sistema es completamente observable, se demuestra que es posible seleccionar una matriz K_e tal que $A - K_e C$ tenga valores característicos arbitrariamente deseados. Es decir, se determina la matriz de ganancias del observador K_e para producir la matriz deseada $A - K_e C$. Analizaremos esto a continuación.

Problema dual. El problema de diseñar un observador de orden completo se convierte en determinar la matriz de ganancias del observador K_e tal que la dinámica de error definida mediante la ecuación (12-31) sea asintóticamente estable con una velocidad de respuesta suficiente. (La estabilidad asintótica y la velocidad de respuesta de la dinámica de error se determinan mediante los valores característicos de la matriz $A - K_e C$.) Por tanto, el diseño del observador de orden completo se convierte en determinar un K_e apropiado tal que $A - K_e C$ tenga los valores característicos deseados. Por tanto, aquí el problema se convierte en el mismo que en el caso de ubicación de polos analizado en la sección 12-2.

Considere el sistema definido mediante

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = cx$$

Al diseñar el observador de estado de orden completo, resolvemos el problema dual, es decir, solucionamos el problema de ubicación de polos para el sistema dual

$$\dot{z} = A^* z + C^* v$$

$$n = B^* z$$

suponiendo que la señal de control v es

$$v = -Kz$$

Si el sistema dual es de estado completamente controlable, la matriz de ganancias de realimentación del estado K se determina de tal modo que la matriz $A^* - C^* K$ produzca un conjunto de los valores característicos deseados.

Si $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ son los valores característicos de la matriz del observador de estado, tomando los mismos μ_i que los valores característicos deseados de la matriz de ganancias de realimentación del estado del sistema dual, obtenemos

$$|sI - (A^* - C^* K)| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n)$$

Considerando que los valores característicos de $A^* - C^* K$ y los de $A - K^* C$ son iguales, tenemos que

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{K})| = |s\mathbf{I} - (\mathrm{A} - \mathrm{K}^*\mathrm{C})|$$

Comparando el polinomio característico $|s\mathbf{I} - (\mathrm{A} - \mathbf{K}^*\mathbf{C})|$ y el polinomio característico $|s\mathbf{I} - (\mathrm{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})|$ para el sistema observador [consulte la ecuación (12−31)], encontramos que $\mathbf{K}_e$ y K* se relacionan mediante

$$\mathbf{K}_e = \mathrm{K}^*$$

Por tanto, usando la matriz K determinada mediante el enfoque de ubicación de polos en el sistema dual, la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ para el sistema original se determina a partir de la relación $\mathbf{K}_e = \mathrm{K}^*$. (Véanse los detalles en el problema A-12-10.)

Condición necesaria y suficiente para la observación del estado. Como ya se analizó, una condición necesaria y suficiente para la determinación de la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ para los valores característicos deseados de $\mathrm{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ es que el dual del sistema original

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^*\mathbf{z} + \mathbf{C}^*\mathbf{v}$$

sea de estado completamente controlable. La condición de controlabilidad completa del estado para este sistema dual es que el rango de

$$[\mathbf{C}^* \;\vdots\; \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]$$

sea n. Ésta es la condición para una observabilidad completa del sistema original definido mediante las ecuaciones (12-27) y (12-28). Esto significa que una condición necesaria y suficiente para la observación del estado del sistema definido mediante las ecuaciones (12-27) y (12-28) es que el sistema sea completamente observable.

A continuación presentaremos el enfoque directo (en lugar del enfoque del problema dual) para la solución del problema de diseño de un observador de estado. Más adelante usaremos el enfoque del problema dual a fin de obtener la fórmula de Ackermann para la determinación de la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$.

Diseño de observadores de estado de orden completo. Considere el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{12-32}$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{c}\mathrm{x} \tag{12-33}$$

en donde x = vector de estado (vector de dimensión n)
u = señal de control (escalar)
y = señal de salida (escalar)
A = matriz de coeficientes constantes de n X n
B = matriz de coeficientes constantes de n X 1
C = matriz de coeficientes constantes de 1 X n

Suponemos que el sistema es completamente observable. Además suponemos que la configuración del sistema es la misma que la de la figura 12-5.

Al diseñar el observador de estado de orden completo, es conveniente transformar las ecuaciones del sistema obtenidas mediante las ecuaciones (12-32) y (12-33) a la forma canónica observable. Como se presentó antes, esto se hace del modo siguiente: defina una matriz de transformación Q mediante

$$\mathrm{Q} = (\mathbf{W}\mathbf{N}^*)^{-1} \tag{12-34}$$

en donde N es la matriz de observabilidad

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}^* \quad \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \quad \cdots \quad (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^* \tag{12-35}$$

y W se define mediante la ecuación (12 – 6), que puede reescribirse como:

$$\mathbf{W} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

en donde al, $a_2, \ldots, a_{n-1}$ son coeficientes de la ecuación característica de la ecuación de estado original obtenida mediante la ecuación (12-32):

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

(Dado que suponemos que el sistema es completamente observable, existe la inversa de la matriz WN*.)

Defina un nuevo vector de estado j (vector de dimensión n) mediante

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\xi \tag{12-36}$$

Así las ecuaciones (12-32) y (12-33) se convierten en

$$\dot{\xi} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\xi + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}u \tag{12-37}$$

$$Y = \mathbf{C}\mathbf{Q}\xi \tag{12-38}$$

en donde

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{vmatrix} \tag{12-39}$$

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1}b_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \tag{12-40}$$

$$\mathbf{C}\mathbf{Q} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \tag{12-41}$$

[Para la obtención de las ecuaciones (12-39) a (12-41) véanse los problemas A-12-7 y A-12-8.] Las ecuaciones (12-37) y (12-38) están en la forma canónica observable. Por

tanto, dada una ecuación de estado y una ecuación de salida, ambas pueden transformarse a la forma canónica observable si el sistema es completamente observable y si el vector de estado original $\mathbf{x}$ se transforma en un nuevo vector de estado $\boldsymbol{\xi}$ mediante la transformación obtenida a partir de la ecuación (12-36). Observe que si la matriz A ya está en la forma canónica observable, entonces Q = 1.

Como se plante6 antes, elegimos que la dinámica del observador de estado se obtenga mediante

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e(y - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathrm{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathrm{B}\,\mathrm{u} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned} \tag{12-42}$$

Ahora defina

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\tilde{\boldsymbol{\xi}} \tag{12-43}$$

Sustituyendo la ecuación (12-43) dentro de la ecuación (12−42), tenemos que

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} = \mathrm{Q}\text{-}'(\mathrm{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{Q}\tilde{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}u + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{K}_e\mathbf{C}\mathbf{Q}\boldsymbol{\xi} \tag{12-44}$$

Restando la ecuación (12-44) de la ecuación (12−37), obtenemos

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} - \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} = \mathrm{Q}\text{-}'(\mathrm{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi} - \tilde{\boldsymbol{\xi}}) \tag{12-45}$$

Defina

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\xi} - \tilde{\boldsymbol{\xi}}$$

Así, la ecuación (12 -45) se convierte en

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{Q}\boldsymbol{\epsilon} \tag{12-46}$$

Requerimos que la dinámica de error sea asintóticamente estable y que r(t) llegue a cero con una velocidad suficiente. El procedimiento para determina la matriz $\mathbf{K}_e$ es seleccionar primero los polos del observador deseados (los valores característicos de A − $\mathbf{K}_e\mathbf{C}$) y a continuación determinar la matriz $\mathbf{K}_e$ para que produzca los polos del observador deseados. Considerando que $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{WN}^*$, tenemos que

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{K}_e = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathrm{C} \\ \mathrm{CA} \\ \\ \\ \\ \mathbf{CA}^{n-2} \\ \mathrm{CA}^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \\ \\ \\ k_{n-1} \\ k_n \end{vmatrix}$$

en donde

$$\mathbf{K}_e = \begin{vmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdot \\ \\ \\ k_n \end{vmatrix}$$

Dado que $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{K}_e$ es un vector de dimensión n, escribamos

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_{n-1} \\ \vdots \\ \delta_1 \end{bmatrix} \tag{12-47}$$

A continuación, remitiéndonos a la ecuación (12−41), tenemos que

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{K}_e\mathbf{C}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_{n-1} \\ \vdots \\ \delta_1 \end{bmatrix} [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \delta_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \delta_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \delta_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{K}_e\mathbf{C}\mathbf{Q}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n - \delta_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} - \delta_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \quad \delta_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 - \delta_1 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica

$$|s\mathbf{I} - \mathrm{Q}\text{-}'(\mathrm{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{Q}| = 0$$

se convierte en

$$\begin{vmatrix} s & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n + \delta_n \\ -1 & s & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} + \delta_{n-1} \\ 0 & -1 & s & \cdots & 0 & a_{n-2} + \delta_{n-2} \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & s + a_1 + \delta_1 \end{vmatrix} = 0$$

o bien

$$s^n + (a_1 + \delta_1)s^{n-1} + (a_2 + \delta_2)s^{n-2} + \cdots + (a_n + \delta_n) = 0 \tag{12-48}$$

Observe que cada una de las $\delta_n, \delta_{n-1}, \ldots, \delta_1$ se asocia con sólo uno de los coeficientes de la ecuación característica.

Suponga que la ecuación característica deseada para la dinámica del error es

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n)$$
$$= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \qquad (12\text{-}49)$$

(Observe que los valores característicos μ_i deseados determinan qué tan rápido converge el estado observado al estado real de la planta.) Comparando los coeficientes de los términos con potencias iguales de s en las ecuaciones (12-48) y (12−49), obtenemos

$$a_1 + \delta_1 = \alpha_1$$
$$a_2 + \delta_2 = \alpha_2$$

$$a_n + \delta_n = \alpha_n$$

a partir de lo cual conseguimos que

$$\delta_1 = \alpha_1 - a_1$$
$$\delta_2 = \alpha_2 - a_2$$

$$\delta_n = \alpha_n - a_n$$

Así, a partir de la ecuación (12−47), tenemos que

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = (\mathbf{WN}^*)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} \qquad (12\text{-}50)$$

La ecuación (12-50) especifica la matriz de ganancias del observador de estado $\mathbf{K}_e$ necesaria.

Como se señal6 antes, la ecuación (12-50) también se obtiene a partir de la ecuación (12− 13) considerando el problema dual. Es decir, considerando el problema de ubicación de polos para el sistema dual y obteniendo la matriz de ganancias de realimentación del estado K para el sistema dual. En este caso, la matriz de ganancias del observador de estado $\mathbf{K}_e$ se obtiene mediante $\mathbf{K}^*$ (véase el problema A-12-10).

Una vez seleccionados los valores característicos deseados (o la ecuación característica deseada), se diseña el observador de estado de orden completo, siempre y cuando el sistema sea completamente observable. Los valores característicos deseados de la ecuación característica deben elegirse de modo que el observador de estado responda al menos de dos a cinco veces más rápido que el sistema en lazo cerrado considerado. Como se dijo antes, la ecuación del observador de estado de orden completo es

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e y \tag{12-51}$$

Observe que, hasta aquí, hemos supuesto que las matrices A y B del observador son exactamente iguales a las de la planta real. En la práctica, esto podría no ser cierto. Entonces, la dinámica del error no se obtendría mediante la ecuación (12-46). Esto significa que el error podría no tender a cero. Por tanto, debemos intentar desarrollar un modelo matemático preciso a fin de que el observador haga el error aceptablemente pequeño.

Enfoque de sustitución directa para obtener la matriz de ganancias del observador de estado K,. Al igual que en el caso de la ubicación de los polos, si el sistema es de orden inferior, puede ser más sencilla la sustitución directa de la matriz $\mathbf{K}_e$ dentro del polinomio característico deseado. Por ejemplo, si x es un vector de dimensión 3, escriba la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ como

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \\ k_{e3} \end{bmatrix}$$

Sustituya esta matriz $\mathbf{K}_e$ en el polinomio característico deseado:

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)$$

Igualando los coeficientes de las potencias iguales de s en ambos miembros de esta última ecuación, determinamos los valores de k_{e1}, k_{e2} y k_{e3}. Este enfoque es conveniente si n = 1, 2, o 3, en donde n es la dimensión del vector de estado x. (Aunque se use este enfoque cuando $n = 4, 5, 6, \ldots,$ los cálculos implícitos se vuelven muy tediosos.)

Otra manera de determinar de la matriz de ganancias del observador de estado $\mathbf{K}_e$ es usar la fórmula de Ackermann. Los detalles se presentan a continuación.

Fórmula de Ackermann. Considere el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{12-52}$$

$$y = cx \tag{12-53}$$

En la sección 12 -2 obtuvimos la fórmula de Ackermann para la ubicación de los polos para el sistema definido mediante la ecuación (12-52). El resultado se obtuvo mediante la ecuación (12−18), que, de este modo, se puede reescribir como:

$$K=[O \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1][\mathbf{B} \mid AB \quad \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]^{-1}\phi(\mathbf{A})$$

Para el dual del sistema definido mediante las ecuaciones (12-52) y (12−53),

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^*\mathbf{z} + \mathbf{C}^*v$$

$$n = \mathbf{B}^*\mathbf{z}$$

la fórmula de Ackermann anterior para la ubicación de los polos se modifica a

$$K=[O \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1][\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \mid \cdots \quad (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]^{-1}\phi(\mathbf{A}^*) \tag{12-54}$$

Como se mencionó antes, la matriz de ganancias del observador de estado $\mathbf{K}_e$ se obtiene mediante $\mathbf{K}^*$, en donde K se obtiene mediante la ecuación (12-54). Por tanto,

$$\mathbf{K}_e = \mathrm{K}^* = \phi(\mathbf{A}^*) \begin{vmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \\ \\ \mathbf{CA}^{n-2} \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \phi(\mathbf{A} \begin{vmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \\ \\ \mathbf{CA}^{n-2} \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \tag{12-55}$$

en donde $\phi(s)$ es el polinomio característico deseado para el observador de estado, o

$$\phi(s) = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdot \cdot \cdot (s - \mu_n)$$

en donde $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ son los valores característicos deseados La ecuación (12-55) se denomina fórmula de Ackermann para la determinación de la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$.

Comentarios sobre la selección de la mejor K,. Remitiéndonos a la figura 12-5, observe que la señal de realimentación a través de la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ funciona como una señal de corrección para el modelo de planta que incorpora los factores desconocidos en la planta. Si están implícitos factores desconocidos significativos, la señal de realimentación a través de la matriz $\mathbf{K}_e$ debe ser relativamente grande. Sin embargo, si la señal de salida se contamina en forma significativa con perturbaciones y ruido en la medición, la salida y no es confiable y la señal de realimentación a través de la matriz $\mathbf{K}_e$ debe ser relativamente pequeña. Al determinar la matriz $\mathbf{K}_e$, debemos examinar cuidadosamente los efectos de las perturbaciones y el ruido implícitos en la salida y.

Recuerde que la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ depende de la ecuación característica deseada

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdot \cdot \cdot (s - \mu_n) = 0$$

La elección de un conjunto de $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ en muchos casos, no es única. Por tanto, podrían elegirse muchas ecuaciones características diferentes como ecuaciones características deseadas. Para cada ecuación característica deseada, tenemos una matriz $\mathbf{K}_e$ diferente.

En el diseño de un observador de estado, es conveniente determinar varias otras matrices de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ con base en varias ecuaciones características deseadas distintas. Para cada una de las distintas matrices $\mathbf{K}_e$, deben realizarse pruebas de simulación a fin de evaluar el desempeño del sistema resultante. Así, se selecciona la mejor $\mathbf{K}_e$ desde el punto de vista del desempeño general del sistema. En muchos casos prácticos la elección de la mejor matriz $\mathbf{K}_e$ se resuelve en un compromiso entre la respuesta rápida y la sensibilidad ante perturbaciones y ruidos.

EJEMPLO 12-2 Considere el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathrm{Ax} + \mathrm{Bu}$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{cx}$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{C}=[\mathrm{O} \quad 1]$$

Diseñe un observador de estado de orden completo suponiendo que la configuración del sistema es idéntica a la que se observa en la figura 12-5. Suponga que los valores característicos deseados de la matriz del observador son

$$\mu_1 = -1.8 + j2.4, \qquad \mu_2 = -1.8 - j2.4$$

El diseño del observador de estado se reduce a la determinación de la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ apropiada.

Examinemos la matriz de observabilidad. El rango de

$$[\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es 2. Por tanto, el sistema es completamente observable y es posible la determinación de la matriz de ganancias del observador deseada. Resolveremos este problema mediante tres métodos.

Método *1:* determinaremos la matriz de ganancias del observador mediante la ecuación (12-50). La matriz de estado A determinada ya está en la forma canónica observable. Por tanto, la matriz de transformación $Q = (\mathbf{WN}^*)^{-1}$ es 1. Dado que la ecuación característica del sistema determinado es

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & -20.6 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 - 20.6 = s^2 + a_1 s + a_2 = 0$$

tenemos que

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = -20.6$$

La ecuación característica deseada es

$$(s + 1.8 - j2.4)(s + 1.8 + j2.4) = s^2 + 3.6s + 9 = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2 = 0$$

Por tanto,

$$\alpha_1 = 3.6, \qquad \alpha_2 = 9$$

Así, la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ se obtiene a partir de la ecuación (12-50) del modo siguiente:

$$\mathbf{K}_e = (\mathbf{WN}^*)^{-1}\begin{bmatrix} \alpha_2 - a_2 \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 + 20.6 \\ 3.6 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.6 \\ 3.6 \end{bmatrix}$$

Método 2: remitiéndonos a la ecuación (12−31),

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{e}$$

la ecuación característica para el observador se convierte en

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| = 0$$

Defina

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \end{bmatrix}$$

Entonces, la ecuación característica se vuelve

$$\left|\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} 20.6 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 1 & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \end{bmatrix}[0 \quad 1]\right| = \begin{vmatrix} s & -20.6 + k_{e1} \\ -1 & s + k_{e2} \end{vmatrix}$$
$$= s^2 + k_{e2}s - 20.6 + k_{e1} = 0 \qquad (12\text{-}56)$$

Dado que la ecuación característica deseada es

$$s^2 + 3.6s + 9 = 0$$

comparando la ecuación (12-56) con esta última ecuación, obtenemos

$$k_{e1} = 29.6, \qquad k_{e2} = 3.6$$

o bien

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 29.6 \\ 3.6 \end{bmatrix}$$

Método 3: usaremos la fórmula de Ackermann obtenida mediante la ecuación (12-55):

$$\mathbf{K}_e = \phi(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en donde

$$\phi(s) = (s - \mu_1)(s - \mu_2) = s^2 + 3.6s + 9$$

Por tanto,

$$\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + 3.6\mathbf{A} + 9\mathbf{I}$$

y

$$\mathbf{K}_e = (\mathbf{A}^2 + 3.6\mathbf{A} + 9\mathbf{I}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 29.6 & 74.16 \\ 3.6 & 29.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.6 \\ 3.6 \end{bmatrix}$$

Por supuesto, obtenemos la misma $\mathbf{K}_e$ sin importar qué método se use.

La ecuación para el observador de estado de orden completo se obtiene mediante la ecuación (12-51):

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e y$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 1 & -3.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 29.6 \\ 3.6 \end{bmatrix} y$$

Por último, observe que, al igual que en el caso de la ubicación de los polos, si n el orden del sistema es 4 o mayor, se prefieren los métodos 1 y 3, debido a que todos los cálculos matriciales se realizan con una computadora, en tanto que el método 2 siempre requiere de los cálculos manuales de la ecuación característica que contiene parámetros desconocidos $k_{e1}, k_{e2}, \ldots, k_{en}$.

Efectos de la adición del observador en un sistema en lazo cerrado. En el proceso de diseño mediante la ubicación de polos, supusimos que el estado real $\mathbf{x}(t)$ estaba disponible para su realimentación. Sin embargo, en la práctica tal vez no pueda medirse el estado real $\mathbf{x}(t)$, por lo que necesitaremos diseñar un observador y usar el estado observado X(t) para la realimentación, como se aprecia en la figura 12-6. Por tanto, el proceso de diseño tiene ahora dos etapas, la primera de las cuales es la determinación de la matriz de ganancias de realimentación $\mathbf{K}$ para producir la ecuación característica deseada y la segunda es la determinación de la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ para obtener la ecuación característica deseada del observador.

Investiguemos ahora los efectos del uso del estado observado X(t) en lugar del estado real x(t) en la ecuación característica de un sistema en lazo cerrado.

Considere el sistema de estado completamente controlable y observable definido mediante las ecuaciones

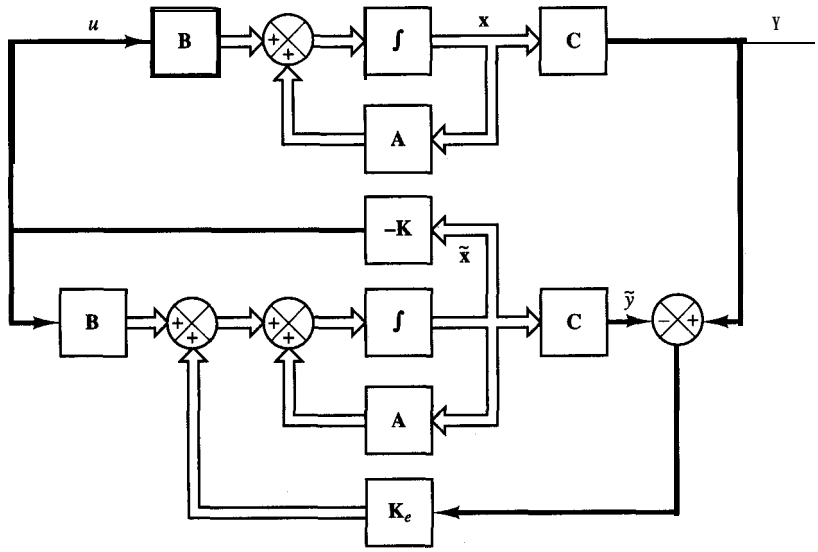


Figure 12–6
Sistema de control mediante la realimentación del estado observado.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = cx$$

Para el control mediante la realimentación basado en el estado observado $\tilde{\mathbf{x}}$,

$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$$

Con este control, la ecuación de estado se vuelve

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \qquad (12\text{-}57)$$

La diferencia entre el estado real x(t) y el estado observado $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ se definió como el error e(r):

$$e(t) = \mathbf{x}(t) - H(t)$$

La sustitución del vector de error e(t) dentro de la ecuación (12-57) produce

$$\dot{\mathbf{x}} = (A - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e} \qquad (12\text{-}58)$$

Observe que la ecuación del error del observador se obtuvo mediante la ecuación (12-31) y se repite aquí como:

$$\dot{\mathbf{e}} = (A - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{e} \qquad (12\text{-}59)$$

Combinando las ecuaciones (12-58) y (12−59), obtenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B K & BK \\ 0 & A - \mathbf{K}_e\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \qquad (12\text{-}60)$$

La ecuación (12-60) describe la dinámica del sistema de control mediante la realimentación del estado observado. La ecuación característica para el sistema es

$$\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - A + BK & -B K \\ 0 & s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} \end{vmatrix} = 0$$

o bien

$$|s\mathbf{I} - \mathrm{A} + \mathbf{BK}|\,|s\mathbf{I} - \mathrm{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| = 0$$

Observe que los polos en lazo cerrado del sistema de control mediante la realimentación del estado observado consisten en los polos producidos por el solo diseño mediante la ubicación de los polos y los polos producidos sólo por el diseño del observador. Esto significa que el diseño mediante la ubicación de los polos y el diseño del observador son independientes uno del otro. Se diseñan por separado y se combinan para formar el sistema de control mediante la realimentación del estado observado. Observe que, si el orden de la planta es n, entonces el observador es también de n-ésimo orden (si se usa el observador de estado de orden completo) y la ecuación característica resultante para todo el sistema en lazo cerrado se vuelve del orden $2n$.

Los polos en lazo cerrado deseados que generará la realimentación del estado (la ubicación de polos) se eligen de tal forma que el sistema satisfaga los requerimientos de desempeño. Por lo general los polos del observador se seleccionan para que la respuesta del observador sea mucho más rápida que la respuesta del sistema. Una regla práctica es elegir una respuesta del observador al menos 2 o 5 veces más rápida que la respuesta del sistema. Dado que el observador, en general, no es un dispositivo físico, sino un programa de computadora, es posible incrementar la velocidad de respuesta para que el estado observado converja rápidamente hacia el estado actual. Por lo general, la velocidad de respuesta máxima del observador se limita sólo mediante el problema de la sensibilidad y el ruido implícitos en el sistema de control. Observe que, dado que los polos del observador se ubican a la izquierda de los polos en lazo cerrado deseados en el proceso de ubicación de polos, estos últimos dominaran en la respuesta.

Función de transferencia para el controlador-observador. Considere el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathrm{A}x + \mathrm{B}u$$

$$y = cx$$

Suponga que el sistema es completamente observable, pero que x no está disponible para una medición directa. Suponga que empleamos el control mediante la realimentación del estado observado

$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} \tag{12-61}$$

En el sistema de control mediante la realimentación del estado observado que aparece en la figura 12-6, la ecuación del observador es

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e y \tag{12-62}$$

Tomemos la transformada de Laplace de la ecuación (12-61),

$$U(s) = -\mathrm{ti}(\mathrm{s}) \tag{12-63}$$

La transformada de Laplace de la ecuación del observador obtenida mediante la ecuación (12-62) es

$$s\tilde{\mathbf{X}}(s) = (\mathrm{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{X}}(s) + \mathrm{BU(s)} + \mathbf{K}_e Y(s) \tag{12-64}$$

en donde supusimos que el estado observado inicial es cero, o X(O) = 0. Sustituyendo la ecuación (12-63) en la ecuación (12-64) y despejando $\tilde{\mathbf{X}}(s)$ en la ecuación resultante, llegamos a

$$\tilde{\mathbf{X}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathrm{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{K}_e Y(s)$$

Sustituyendo esta última ecuación en la ecuación (12-63), obtenemos

$$U(s) = -\mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathrm{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{K}_e Y(s) \tag{12-65}$$

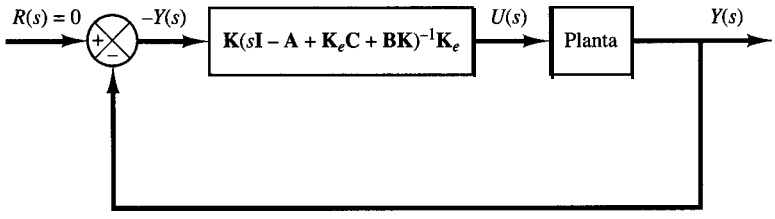


Figura **12** -7
Representación en diagrama de bloques del sistema con un controlador-observador.

En los análisis actuales, tanto u como y son escalares. La ecuación (12-65) produce la función de transferencia entre $U(s)$ y -Y(s).

La figura 12-7 muestra la representación del sistema en diagrama de bloques. Observe que la función de transferencia funciona como controlador para el sistema.

Por tanto, llamaremos a la función de transferencia

$$\frac{U(s)}{-Y(s)} = \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathrm{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{K}_e \qquad (12\text{-}66)$$

la función de transferencia del controlador-observador.

EJEMPLO 12-3 Considere el diseño de un sistema regulador para la planta siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u \qquad (12\text{-}67)$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{cx} \qquad \textbf{(12-68)}$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

Suponga que usamos el enfoque de ubicación de polos para el diseño del sistema y que los polos en lazo cerrado deseados para este sistema están en $s = \mu_i (i = 1, 2,)$ en donde $\mu_1 = -1.8 +$ \$2.4 y $\mu_2 = -1.8 - 12.4$. La matriz de ganancias de realimentación del estado K para este caso se obtiene del modo siguiente:

$$\mathrm{K} = [29.6 \ 3.6]$$

Usando esta matriz de ganancias de realimentación del estado K, la señal de control u se obtiene mediante

$$u = -\mathbf{Kx} = -[29.6 \ 3.6]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Suponga que usamos el control mediante la realimentación del estado observado en lugar del control mediante la realimentación del estado real, o

$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = -[29.6 \quad 3.6]\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$$

en donde optamos por que los valores característicos de la matriz de ganancias del observador sean

$$\mu_1 = \mu_2 = -8$$

Obtenga la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ y dibuje un diagrama de bloques para el sistema de control mediante la realimentación del estado observado. A continuación obtenga la función de transferencia $U(s)/[-\mathrm{Y(s)}]$ para el controlador-observador y dibuje un diagrama de bloques para el sistema.

Para el sistema definido mediante la ecuación (12−67), el polinomio característico es

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -20.6 & s \end{vmatrix} = s^2 - 20.6 = s^2 + a_1 s + a_2$$

Así,

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = -20.6$$

El polinomio característico deseado para el observador es

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) = (s + 8)(s + 8) = s^2 + 16s + 64$$
$$= s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2$$

Por tanto,

$$\alpha_1 = 16, \qquad \alpha_2 = 64$$

Para la determinación de la matriz de ganancias del observador, usamos la ecuación (12−50), o

$$\mathbf{K}_e = (\mathbf{WN}^*)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_2 - a_2 \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

en donde

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$\mathbf{K}_e = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 64 + 20.6 \\ 16 - 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 84.6 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix} \tag{12-69}$$

La ecuación (12-69) produce la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$. La ecuación del observador se obtiene mediante la ecuación (12-51):

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e y \tag{12-70}$$

Dado que

$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$$

La ecuación (12-70) se convierte en

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} - \mathbf{BK})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_e y$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix} [1 \quad 0] - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [29.6 \quad 3.6] \right\} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix} y$$

$$= \begin{bmatrix} -16 & 1 \\ -93.6 & -3.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix} y$$

El diagrama de bloques del sistema con una realimentación del estado observado se aprecia en la figura 12-8.

Remitiéndonos a la ecuación (12−66), la función de transferencia del controlador-observador es

$$\frac{U(s)}{-Y(s)} = \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{K}_e$$

$$= [29.6 \quad 3.6]\begin{bmatrix} s + 16 & -1 \\ 93.6 & s + 3.6 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{778.16s + 3690.72}{s^2 + 19.6s + 151.2}$$

La figura 12-9 muestra un diagrama de bloques del sistema.

La dinámica del sistema de control mediante la realimentación del estado observado recién diseñado se describe mediante las ecuaciones siguientes: para la planta,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$Y = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

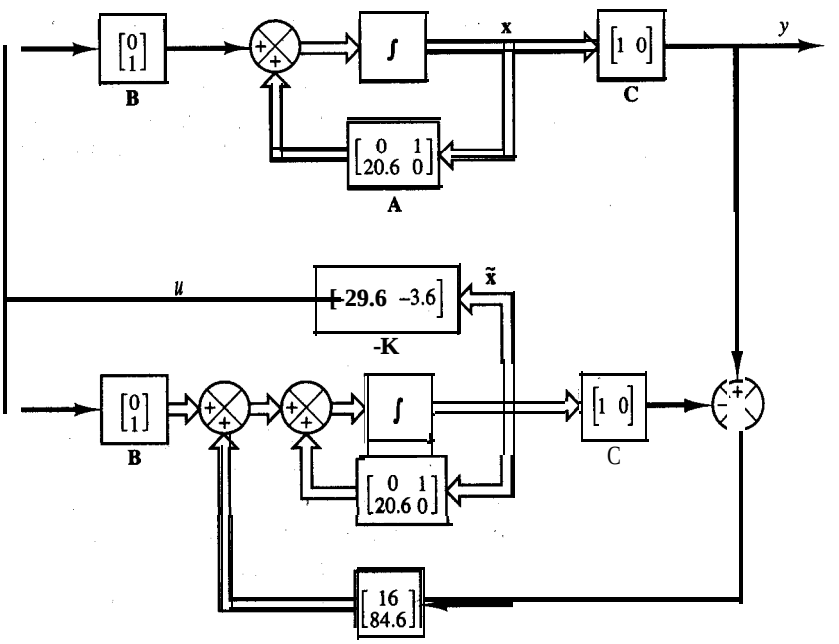


Figura 12–8
Diagrama de bloques del sistema con una realimentación del estado observado (ejemplo 12-3).

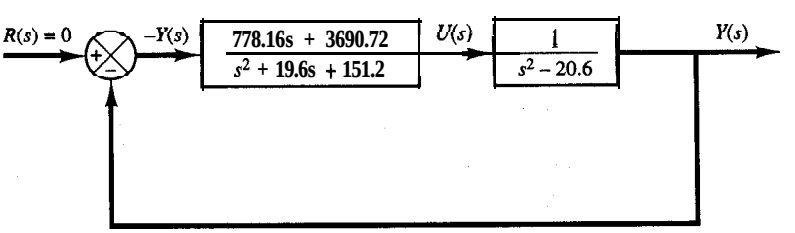


Figura 12-9
Diagrama de bloques del sistema de función de transferencia (ejemplo 12-3).

$$u = [29.6 \quad 3.6]\begin{bmatrix}\tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2\end{bmatrix}$$

Para el observador,

$$\begin{bmatrix}\dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-16 & 1 \\ -93.6 & -3.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}16 \\ 84.6\end{bmatrix} y$$

El sistema, como un todo, es de cuarto orden. La ecuación característica para el mismo es

$$|s\mathbf{I} \quad \mathrm{A} + \mathbf{BK}|\,|s\mathbf{I} - \mathrm{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| = (s^2 + 3.6s + 9)(s^2 + 16s + 64)$$

$$= s^4 + 19.6s^3 + 130.6s^2 + 374.4s + 576 = 0$$

La ecuación característica también se obtiene a partir del diagrama de bloques para el sistema de la figura 12-9. Dado que la función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{778.16s + 3690.72}{(s^2 + 19.6s + 151.2)(s^2 - 20.6) + 778.16s + 3690.72}$$

La ecuación característica es

$$(s^2 + 19.6s + 151.2)(s^2 - 20.6) + 778.16s + 3690.72$$

$$= s^4 + 19.6s^3 + 130.6s^2 + 374.4s + 576 = 0$$

Por supuesto, la ecuación característica es igual para el sistema representado en el espacio de estado y el representado mediante la función de transferencia.

Observador de orden mínimo. Los observadores analizados hasta aquí se diseñan para reconstruir todas las variables de estado. En la práctica, algunas de las variables de estado se miden con precisión. Tales variables de estado medidas con precisión no necesitan estimarse.

Suponga que el vector de estado $\mathbf{x}$ es un vector de dimensión n y que el vector de salida y es un vector de dimensión m medible. Dado que las m variables de salida son combinaciones lineales de las variables de estado, no necesitan estimarse n variables de estado, sino sólo $n - m$ variables de estado. Así, el observador de orden reducido se vuelve un observador de $(n - m)$-ésimo orden. Tal observador de $(n - m)$-ésimo orden es el observador de orden mínimo. La figura 12-10 muestra el diagrama de bloques de un sistema con un observador de orden mínimo.

Sin embargo, es importante considerar que, si la medición de las variables de salida implica ruido significativo y es relativamente imprecisa, el uso del observador de orden completo puede provocar un mejor desempeño del sistema.

Para ofrecer la idea básica del observador de orden mínimo, sin complicaciones matemáticas innecesarias, presentaremos el caso en el que la salida es un escalar (es decir, m = 1) y obtendremos la ecuación de estado para el observador de orden mínimo. Considere el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathrm{C}\mathrm{x}$$

en donde el vector de estado $\mathbf{x}$ se divide en dos partes x_a (un escalar) y $\mathbf{x}_b$ [un vector de dimensión $(n - 1)$]. Aquí la variable de estado x_a es igual a la salida y y, por tanto, se mide directamente y $\mathbf{x}_b$ es la parte que no se puede medir del vector de estado. De este modo, el estado dividido y las ecuaciones de salida se vuelven

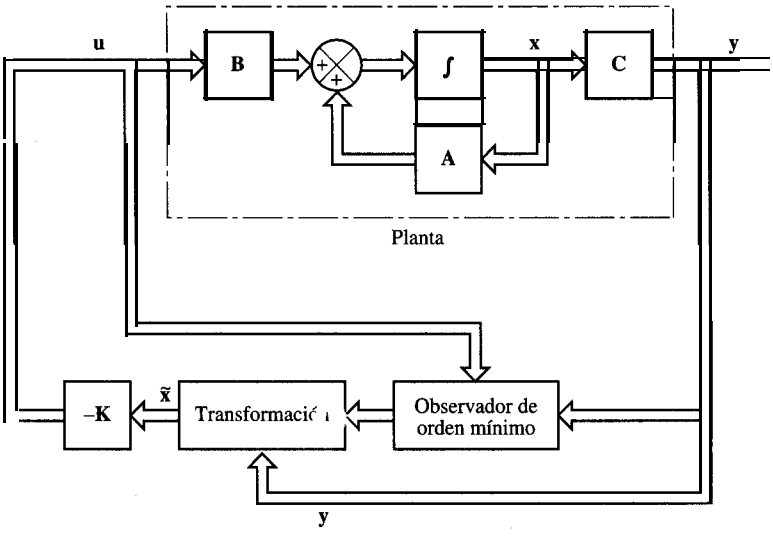


Figura 12–10
Sistema de control mediante la realimentación del estado observado con un observador de orden mínimo.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \hline \dot{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_{aa} & \mathbf{A}_{ab} \\ \hline \mathbf{A}_{ba} & \mathbf{A}_{bb} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_a \\ \hline \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} B_a \\ \hline \mathbf{B}_b \end{array}\right] u \tag{12-71}$$

$$y = [1 \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} x_a \\ \hline \mathbf{x}_b \end{bmatrix} \tag{12-72}$$

en donde A_{aa} = escalar
$\mathbf{A}_{ab}$ = matriz de 1 x $(n-1)$
$\mathbf{A}_{ba}$ = matriz de $(n-1)$ x 1
$\mathbf{A}_{bb}$ = matriz de $(n-1)$ x $(n-1)$
B_a = escalar
$\mathbf{B}_b$ = matriz de $(n-1)$ x 1

A partir de la ecuación (12−71), la ecuación para la parte medida del estado se vuelve

$$\dot{x}_a = A_{aa}x_a + \mathbf{A}_{ab}\mathbf{x}_b + B_a u$$

o bien

$$\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u = \mathbf{A}_{ab}\mathbf{x}_b \tag{12-73}$$

Los términos del primer miembro de la ecuación (12-73) se pueden medir. La ecuación (12-73) funciona como la ecuación de salida. Al diseñar el observador de orden mínimo, consideramos que el primer miembro de la ecuación (12-73) contiene cantidades conocidas. Por tanto, la ecuación (12-73) relaciona las cantidades medibles y no medibles del estado.

A partir de la ecuación (12−71), la ecuación de la parte no medida del estado se vuelve

$$\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{A}_{bb}\mathbf{x}_b + \mathbf{B}_b u \tag{12-74}$$

Considerando que los términos $\mathbf{A}_{ba}x_a$ y $\mathbf{B}_b u$ son cantidades conocidas, la ecuación (12-74) describe la dinámica de la parte no medida del estado.

A continuación presentaremos un método para diseñar un observador de orden mínimo. El procedimiento de diseño se simplifica si utilizamos la técnica de diseño desarrollada para el observador de estado de orden completo.

Comparemos la ecuación de estado para el observador de orden completo con la del observador de orden mínimo. La ecuación de estado para el observadorde orden completo es

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

y la "ecuación de estado" para el observador de orden mínimo es

$$\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{A}_{bb}\mathbf{x}_b + \mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{B}_b u$$

La ecuación de salida para el observador de orden completo es

$$y = cx$$

y la "ecuación de salida" para el observador de orden mínimo es

$$\dot{x}_a - A_{aa}x_a \quad B_a u = \mathbf{A}_{ab}\mathbf{x}_b$$

El diseño del observador de orden mínimo se realiza del modo siguiente: primero, considere que la ecuación del observador para el observador de orden completo se obtuvo a partir de la ecuación (12−51), la cual repetimos aquí:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e y \tag{12-75}$$

Así, haciendo las sustituciones de la tabla 12-1 en la ecuación (12−75), obtenemos

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_b = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\tilde{\mathbf{x}}_b + \mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{B}_b u + \mathbf{K}_e(\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u) \tag{12-76}$$

en donde la matriz de ganancias del observador de estado $\mathbf{K}_e$ es una matriz de $(n - 1)$ X 1. En la ecuación (12−76), observe que, para calcular $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_b$ necesitamos la derivada de x_a. Esto no es conveniente y, por tanto, necesitamos modificar la ecuación (12-76).

Reescribamos la ecuación (12-76) del modo siguiente. Considerando que x_a = y, tenemos que

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_b - \mathbf{K}_e\dot{x}_a &= (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\tilde{\mathbf{x}}_b + (\mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e A_{aa})y + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a)u \\ &= (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})(\tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y) \\ &\quad + [(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e A_{aa}]y \\ &\quad + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a)u\end{aligned} \tag{12-77}$$

Tabla 12–1 Lista de las sustituciones necesarias para escribir la ecuación para el observador de estado de orden mínimo

Observador de estado de orden completo	Observador de estado de orden mínimo
$\tilde{\mathbf{x}}$	$\tilde{\mathbf{x}}_b$
$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}_{bb}$
BU	$\mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{B}_b u$
Y	$\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u$
$\mathbf{C}$	$\mathbf{A}_{ab}$
$\mathbf{K}_e$ (matriz de n x 1)	$\mathbf{K}_e$ [(matriz de $n - 1$) $\times 1$]

Defina

$$\mathbf{x}_b - \mathbf{K}_e y = \mathbf{x}_b - \mathbf{K}_e x_a = \boldsymbol{\eta}$$

Y

$$\tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y = \tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e x_a = \tilde{\boldsymbol{\eta}} \tag{12-78}$$

Entonces, la ecuación (12-77) se vuelve

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\tilde{\boldsymbol{\eta}} + [(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e A_{aa}]y + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a)u \tag{12-79}$$

La ecuación (12−79), junto con la ecuación (12−78), define el observador de orden mínimo.

A continuación obtendremos la ecuación del error del observador. Usando la ecuación (12−73), la ecuación (12-76) se modifica a

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_b = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\tilde{\mathbf{x}}_b + \mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{B}_b u + \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab}\mathbf{x}_b \tag{12-80}$$

Restando la ecuación (12-80) de la ecuación (12−74), obtenemos

$$\dot{\mathbf{x}}_b - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_b = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})(\mathbf{x}_b - \tilde{\mathbf{x}}_b) \tag{12-81}$$

Defina

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_b - \tilde{\mathbf{x}}_b = \boldsymbol{\eta} - \tilde{\boldsymbol{\eta}}$$

Así, la ecuación (12-81) se vuelve

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\mathbf{e} \tag{12-82}$$

Ésta es la ecuación del error para el observador de orden mínimo. Observe que e es un vector de dimensión $(n - 1)$.

La dinámica del error se selecciona como se prefiera siguiendo la técnica desarrollada para el observador de orden completo, siempre y cuando el rango de la matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ab} \\ \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb}^{n-2} \end{bmatrix}$$

sea n 1. (Ésta es la condición de observabilidad completa aplicable al observador de orden mínimo.)

La ecuación característica para el observador de orden mínimo se obtiene a partir de la ecuación (12-82) del modo siguiente:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb} + \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)\cdots(s - \mu_{n-1}) = s^{n-1} + \hat{\alpha}_1 s^{n-2} + \cdots + \hat{\alpha}_{n-2}s + \hat{\alpha}_{n-1} = 0 \tag{12-83}$$

en donde $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ son valores característicos deseados para el observador de orden mínimo. La matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ se determina seleccionando primero los valores característicos deseados para el observador de orden mínimo [es decir, ubicando

las raíces de la ecuación característica, ecuación (12−83), en la posiciones deseadas] y después usando el procedimiento desarrollado para el observador de orden completo con las modificaciones adecuadas. Por ejemplo, si se va a usar la fórmula para determinar la matriz $\mathbf{K}_e$ obtenida mediante la ecuación (12−50), debe modificarse a

$$\mathbf{K}_e = \hat{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{n-1} - \hat{a}_{n-1} \\ \hat{\alpha}_{n-2} - \hat{a}_{n-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\alpha}_1 - \hat{a}_1 \end{bmatrix} = (\hat{\mathbf{W}}\hat{\mathbf{N}}^*)^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{n-1} - \hat{a}_{n-1} \\ \hat{\alpha}_{n-2} - \hat{a}_{n-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\alpha}_1 - \hat{a}_1 \end{bmatrix} \tag{12-84}$$

en donde $\mathbf{K}_e$ es una matriz de $(n - 1)$ X 1 y

$$\hat{\mathbf{N}} = [\mathbf{A}_{ab}^* \vdots \mathbf{A}_{bb}^*\mathbf{A}_{ab}^* \quad \cdots \quad (\mathbf{A}_{bb}^*)^{n-2}\mathbf{A}_{ab}^*] = (\text{n} - 1) \text{ X } (n - 1) \text{ matriz}$$

$$\hat{\mathbf{W}} = \begin{vmatrix} \hat{a}_{n-2} & \hat{a}_{n-3} & \cdots & \hat{a}_1 & 1 \\ \hat{a}_{n-3} & \hat{a}_{n-4} & \cdots & 1 & 0 \\ & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ \hat{a}_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \times (n-1) \text{ matriz}$$

Observe que $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_{n-2}$ son coeficientes en la ecuación característica para la ecuación de estado

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb}| = s^{n-1} + \hat{a}_1 s^{n-2} + \cdots + \hat{a}_{n-2}s + \hat{a}_{n-1} = 0$$

Asimismo, si se va a usar la fórmula de Ackermann obtenida mediante la ecuación (12−55), debe modificarse a

$$\mathbf{K}_e = \phi(\mathbf{A}_{bb}) \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{ab} \\ \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb}^{n-3} \\ \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb}^{n-2} \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \tag{12-85}$$

en donde

$$\phi(\mathbf{A}_{bb}) = \mathbf{A}_{bb}^{n-1} + \hat{\alpha}_1\mathbf{A}_{bb}^{n-2} + \cdots + \hat{\alpha}_{n-2}\mathbf{A}_{bb} + \hat{\alpha}_{n-1}\mathbf{I}$$

EJEMPLO 12-4 Considere el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

en donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad c = [1 \ 0 \ 0]$$

Suponga que la salida y se puede medir con precisión. Por tanto, no necesita estimarse la variable de estado x_1 (la cual es igual ay). Diseñe un observador de orden mínimo. (El observador de orden mínimo es de segundo orden.) Suponga también que los valores característicos deseados para el observador de orden mínimo son

$$\mu_1 = -2 + j2\sqrt{3}, \quad \mu_2 = -2 - j2\sqrt{3}$$

Remitiéndonos ala ecuación (12−83), la ecuación característica para el observador de orden mínimo es

$$\begin{aligned} |s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb} + \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab}| &= (s - \mu_1)(s - \mu_2) \\ &= (s + 2 - j2\sqrt{3})(s + 2 + j2\sqrt{3}) \\ &= s^2 + 4s + 16 = 0 \end{aligned}$$

A continuación, usaremos la fórmula de Ackermann obtenida mediante la ecuación (12-85). [El problema A-12-14 presenta la determinación de $\mathbf{K}_e$ usando la ecuación (12−84).]

$$\mathbf{K}_e = \phi(\mathbf{A}_{bb}) \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ab} \\ \hline \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{12-86}$$

en donde

$$\phi(\mathbf{A}_{bb}) = \mathbf{A}_{bb}^2 + \hat{\alpha}_1\mathbf{A}_{bb} + \hat{\alpha}_2\mathbf{I} = \mathbf{A}_{bb}^2 + 4\mathbf{A}_{bb} + 16\mathbf{I}$$

Dado que

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_a \\ \hline \mathbf{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hline x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{array}\right], \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hline 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tenemos que

$$A_{aa} = 0, \quad \mathbf{A}_{ab} = [1 \quad 0], \quad \mathbf{A}_{ba} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{bb} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad B_a = 0, \quad \mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ahora la ecuación (12-86) se convierte en

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}^2 + 4\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} + 16\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 22 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Remitiéndonos alas ecuaciones (12-78) y (12−79), la ecuación para el observador de orden mínimo se obtiene mediante

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\,\tilde{\boldsymbol{\eta}} + [(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_eA_{aa}]y + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_eB_a)u \tag{12-87}$$

en donde

$$\tilde{\eta} = \tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y = \tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e x_1$$

Considerando que

$$\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix}[1 \quad 0] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -28 & -6 \end{bmatrix}$$

la ecuación para el observador de orden mínimo, ecuación (12−87), se vuelve

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\eta}}_2 \\ \dot{\tilde{\eta}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -28 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{\eta}_2 \\ \tilde{\eta}_3 \end{bmatrix} + \left\{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -28 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix}0\right\} y + \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix}0\right\} u$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\eta}}_2 \\ \dot{\tilde{\eta}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -28 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{\eta}_2 \\ \tilde{\eta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ -52 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

en donde

$$\begin{bmatrix} \tilde{\eta}_2 \\ \tilde{\eta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} - \mathbf{K}_e y$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_2 \\ \tilde{\eta}_3 \end{bmatrix} + \mathbf{K}_e x_1$$

Si se usa la realimentación del estado observado, la señal de control u se convierte en

$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}\begin{bmatrix} x_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}$$

en donde K es la matriz de ganancias de realimentación del estado. (En este ejemplo no se determina la matriz K.) La figura 12-11 es un diagrama de bloques que muestra la configuración del sistema con una realimentación del estado observado, en donde el observador es el observador de orden mínimo.

Sistema de control mediante la realimentación del estado observado con un observador de orden mínimo. Para el caso del sistema de control mediante la realimentación del estado observado con un observador de estado de orden completo, hemos demostrado que los polos en lazo cerrado del sistema de control mediante la realimentación del estado observado están formados por los polos producidos por el solo diseño mediante ubicación de polos, más los polos producidos por el solo diseño del observador. Por tanto, el diseño mediante ubicación de polos y el diseño del observador de orden completo son independientes uno del otro.

Para el sistema de control mediante la realimentación del estado observado con un observador de orden mínimo, se aplica la misma conclusión. La ecuación característica del sistema se obtiene como

$$|s\mathbf{I} - \mathrm{A} + \mathbf{BK}|\,|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb} + \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab}| = 0 \qquad (12\text{-}88)$$

(Para los detalles véase el problema A-12-13.) Los polos en lazo cerrado del sistema de control mediante la realimentación del estado observado con un observador de orden mínimo comprenden los polos en lazo cerrado producidos por la ubicación de los polos [los valores

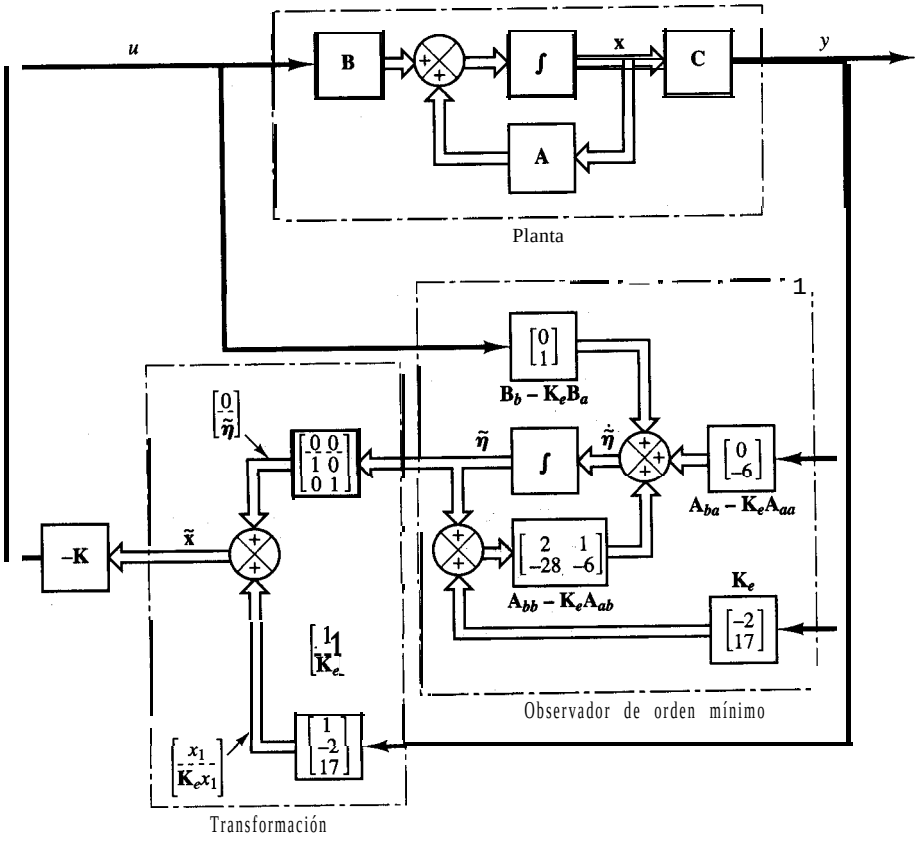


Figura 12–11
Sistema con una realimentación del estado observado, en donde el observador es el observador de orden mínimo diseñado en el ejemplo 12-4.

característicos de la matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$] y los polos en lazo cerrado producidos por el observador de orden mínimo [los valores característicos de la matriz $(\mathbf{A}_{bb} - \mathrm{Ke}\ \mathbf{A}_{ab})$]. Por tanto, el diseño mediante ubicación de polos y el diseño del observador de orden mínimo son independientes uno del otro.

12-6 DISEÑO DE OBSERVADORES DE ESTADO CON MATLAB

Esta sección presenta algunos ejemplos del diseño de observadores de estado con MATLAB. Presentaremos el enfoque de MATLAB para el diseño de un observador de estado de orden completo y un observador de estado de orden mínimo.

EJEMPLO 12-5 Considere el diseño de un sistema regulador. La planta se describe mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{cx}$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

Se desea tener polos en lazo cerrado en $s = \mu_i$ $(i = 1, 2)$, en donde

$$\mu_1 = -1.8 + j2.4, \qquad \mu_2 = -1.8 - j2.4$$

Se supone que se quiere un control mediante la realimentación del estado observado en lugar de un control mediante la realimentación del estado real. Los valores característicos de la matriz de ganancias del observador son

$$\mu_1 = \mu_2 = -8$$

Obtengamos la matriz de ganancias de realimentación del estado K necesaria y la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ usando MATLAB.

El programa MATLAB 12-5 se usa para determinar la matriz de ganancias de realimentación del estado K y la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ para el sistema considerado.

Programa MATLAB 12–5

```
% ---------- Ubicación de polos y diseño del observador ----------

% *****Diseño de un sistema de control usando la técnica de
% ubicación de polos y el observador de estado. Primero resuelva el problema
% de ubicación de polos *****

% ***** Introduzca las matrices A, B, C y D *****

A = [0   1;20.6   0];
B = [0;1]
C = [1   0];
D = [0];

% ***** Verifique el rango de la matriz de controlabilidad M *****

M = [B   A*B];
rank(M)

ans =

     2

% ***** Dado que el rango de la matriz de controlabilidad M es 2,
% es posible una ubicación arbitraria de los polos *****

% ***** Introduzca el polinomio característico deseado definiendo
% la matriz J siguiente y calculando poly(J) *****

J = [-1.8+2.4*i   0;0   -1.8-2.4*i];

poly(J)

ans =

    1.0000    3.6000    9.0000
```

```
% **** Introduzca el polinomio característico Phi *****

Phi = polyvalm(poly(J),A);

% ***** La matriz de ganancias de realimentación del estado K se obtiene
% mediante *****

K = [0   1]*inv(M)*Phi

K =

   29.6000    3.6000

% ***** El programa siguiente determina la matriz del observador Ke *****

% ***** Introduzca la matriz de observabilidad M y verifique su rango *****

N = [C'   A'*C'];
rank(N)

ans =

     2

% ***** Dado que el rango de la matriz de observabilidad es 2, es posible
% el diseño del observador *****

% **** Introduzca el polinomio característico deseado definiendo la
% matriz J0 siguiente e introduciendo el enunciado poly(J0) *****

J0 = [-8   0;0   -8];
poly(J0)

ans =

     1    16    64

% ***** Introduzca el polinomio característico Ph *****

Ph = polyvalm(poly(J0),A);

% ***** La matriz de ganancias del observador Ke se obtiene a partir de *****

Ke = Ph*(inv(N'))*[0;1]

Ke =

   16.0000
   84.6000
```

Obtenemos la matriz de ganancias de realimentación del estado K como

$$K = [29.6 \quad 3.6]$$

y la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ como

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix}$$

El sistema diseñado es de cuarto orden. La ecuación característica para el sistema se obtiene mediante

$$|s\mathbf{I} - A + \mathbf{BK}||s\mathbf{I} - A + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| = 0$$

Sustituyendo los polos en lazo cerrado deseados y los polos del observador deseados en la ecuación anterior, obtenemos

$$|s\mathbf{I} - A + \mathbf{BK}||s\mathbf{I} - A + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| = (s + 1.8 - j2.4)(s + 1.8 - j2.4)(s + 8)^2$$

$$= s^4 + 19.6s^3 + 130.6s^2 + 314.4s + 576$$

Este resultado se obtiene con facilidad usando **MATLAB,** como se observa en el programa **MATLAB** 12-6. (El programa MATLAB 12-6 es una continuación del programa MATLAB 12-5. Las matrices A, B, C, K y $\mathbf{K}_e$ se obtienen en el programa MATLAB 12-5.)

Programa MATLAB 12-6

```
% ---------- Polinomio característico ----------

% ***** El polinomio característico para el sistema diseñado
% se obtiene mediante |sI - A + BK||sI - A + KeC| *****

% ***** Este polinomio característico se obtiene usando los
% valores característicos de A - BK y A - KeC del modo siguiente *****

X = [eig(A-B*K);eig(A-Ke*C)]

X =

  -1.8000 +2.4000i
  -1.8000 -2.4000i
  -8.0000
  -8.0000

poly(X)

ans =

    1.0000   19.6000   130.6000   374.4000   576.0000
```

WEMPLO 12-6 Considere el problema de diseñar un observador de orden mínimo analizado ya en el ejemplo 12-4. El sistema se define mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u$$

$$y = cx$$

en donde

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{array}\right], \qquad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 1 \end{array}\right], \qquad \mathbf{C} = [1 \;\vdots\; 0 \quad 0]$$

Suponga que la variable de estado x_1 (que es igual a y) es medible y que no necesita observarse. Determine la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ para el observador de orden mínimo. Los valores característicos deseados son

$$\mu_1 = -2 + j2\sqrt{3}, \qquad \mu_2 = -2 - j2\sqrt{3}$$

Use el enfoque de MATLAB para la solución del problema.

A continuación, presentamos dos programas MATLAB para la solución de este problema. El programa MATLAB 12-7 usa la matriz de transformación Q y el programa MATLAB 12-8 usa la fórmula de Ackermann.

Programa MATLAB 12–7

```
% ------- Diseño de un observador de orden mínimo -------

% ***** Este programa usa la matriz de transformación Q *****

% ***** Introduzca las matrices A y B *****

A = [0  1  0;0  0  1;-6  -11  -6];
B = [0;0;1];

% ***** Introduzca las matrices Aaa, Aab, Aba, Abb, Ba y Bb. Observe que
% A = [Aaa  Aab;Aba  Abb] y B = [Ba;Bb] *****

Aaa = [0]; Aab = [1  0]; Aba = [0;-6]; Abb = [0  1;-11  -6];
Ba = [0]; Bb = [0;1];

% ***** Determine a1 y a2 del polinomio característico
% para la parte no observada del sistema *****

p = poly(Abb)

P =

    1   6   11

a1 = p(2); a2 = p(3);

% ***** Introduzca la matriz de observabilidad reducida N y la matriz W *****

N = [Aab'   Abb'*Aab'];
W = [a1   1;1   0];

% ***** Introduzca el polinomio característico deseado definiendo
% la matriz J siguiente e introduciendo el enunciado poly(J) *****
```

```
J = [-2+2*sqrt(3)*i   0;0   -2-2*sqrt(3)*i];
JJ = poly(J)

JJ =

   1.0000   4.0000   16.0000

% ***** Determine aa1 y aa2 del polinomio
% característico deseado *****

aa1 = JJ(2); aa2 = JJ(3);

% ***** La matriz de ganancias del observador Ke para el observador de
% orden mínimo se obtiene mediante *****

ke = inv(W*N')*[aa2-a2;aa1-a1]

Ke =

   -2
   17
```

Programa MATLAB 12–8

```
% --------- Diseño de un observador de orden mínimo ---------

% ***** Este programa se basa en la fórmula de Ackermann *****

% ***** Introduzca las matrices A y B *****

A = [0   1   0;0   0   1;-6   -11   -6];
B = [0;0;1];

% ***** Introduzca las matrices Aaa, Aab, Aba, Abb, Ba y Bb. Observe que
% A = [Aaa   Aab;Aba   Abb] y B = [Ba;Bb] *****

Aaa = [0]; Aab = [1   0]; Aba = [0;-6]; Abb = [0   1;-11   -6];
Ba = [0]; Bb = [0;1];

% ***** Introduzca la matriz de observabilidad reducida N *****

N = [Aab'   Abb'*Aab'];

% ***** Introduzca el polinomio característico deseado definiendo
% la matriz J siguiente e introduciendo el enunciado poly() ****

J = [-2+2*sqrt(3)*i   0;0   -2-2*sqrt(3)*i];
JJ = poly(J)
```

```
JJ =

    1.0000    4.0000   16.0000

% **** Introduzca el polinomio característica Phi *****

Phi = polyvalm(poly(J),Abb);

% **** La matriz de ganancias del observador Ke para el observador
% de orden mínimo se obtiene mediante ****

Ke = Phi*inv(N')*[0;1]

Ke =

   -2
   17
```

12-7 DISEÑO DE SISTEMAS DE SEGUIMIENTO

En el capítulo 5 analizamos los tipos de sistemas de acuerdo con el número de integradores en la función de transferencia de la trayectoria directa. El sistema de tipo 1 tiene un integrador en la trayectoria directa y no exhibirá un error en estado estable en la respuesta escalón. En esta sección analizaremos el enfoque de ubicación de polos para el diseño de sistemas de seguimiento de tipo 1. Aquí limitaremos cada uno de nuestros sistemas a que tenga una señal de control escalar u y una salida escalar y.

A continuación, analizaremos el problema de diseñar un sistema de seguimiento de tipo 1 cuando la planta contiene un integrador. Después, analizaremos el diseño de los sistemas de seguimiento de tipo 1 cuando la planta no tiene integrador.

Sistema de seguimiento de tipo 1 cuando la planta tiene un integrador. Suponga que la planta se define mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{12-89}$$

$$y = cx \tag{12-90}$$

en donde x = vector de estado para la planta (vector de dimensión n)
u = señal de control (escalar)
y = señal de salida (escalar)
A = matriz de coeficientes constantes de n X n
B = matriz de coeficientes constantes de n X 1
C = matriz de coeficientes constantes de 1 X n

Como se plante6 antes, suponemos que la señal de control u y la señal de salida y son escalares. Mediante una elección adecuada de un conjunto de variables de estado, es posible seleccionar la salida igual a una de las variables de estado. (Véase el método presentado en el capítulo 3 para obtener una representación en el espacio de estados del sistema de función de transferencia en el cual la salida y se vuelve igual a x_1.)

La figura 12-12 muestra una configuración general del sistema de seguimiento de tipo 1 cuando la planta tiene un integrador. Aquí suponemos que y = x_1. En el análisis actual, suponemos que la entrada de referencia r es una función escalón. En este sistema usamos el esquema de control mediante la realimentación del estado siguiente:

$$u = -[0 \quad k_2 \quad k_3 \quad \cdots \quad k_n] \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} + k_1 (r - x_1)$$

$$= -\mathbf{K}\mathbf{x} + k_1 r \tag{12-91}$$

en donde

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n]$$

Suponga que la entrada de referencia (la función escalón) se aplica a $t = 0$. Así, para $t > 0$, la dinámica del sistema se describe mediante las ecuaciones (12-89) y (12−91), o

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathrm{Bu} = (\mathrm{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}k_1 r \tag{12-92}$$

Diseñaremos el sistema de seguimiento de tipo 1 de modo que los polos en lazo cerrado se ubiquen en las posiciones deseadas. El sistema diseñado será un sistema asintóticamente estable y $y(\infty)$ tenderá a un valor constante r y $u(\infty)$ tenderá a cero. (r es una entrada escalón.)

Observe que, en el estado estable, tenemos que

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) = (\mathrm{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{B}k_1 r(\infty) \tag{12-93}$$

Considerando que $r(t)$ es una entrada escalón, tenemos $r(\infty) = r(t) = \mathrm{r(constante)}$ para $t > 0$. Restando la ecuación (12-93) de la ecuación (12−92), obtenemos

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(\infty) = (\mathrm{A} - \mathrm{BK})[\mathrm{x(t)} - \mathbf{x}(\infty)] \tag{12-94}$$

Defina

$$x(t) - \mathbf{x}(\infty) = e(t)$$

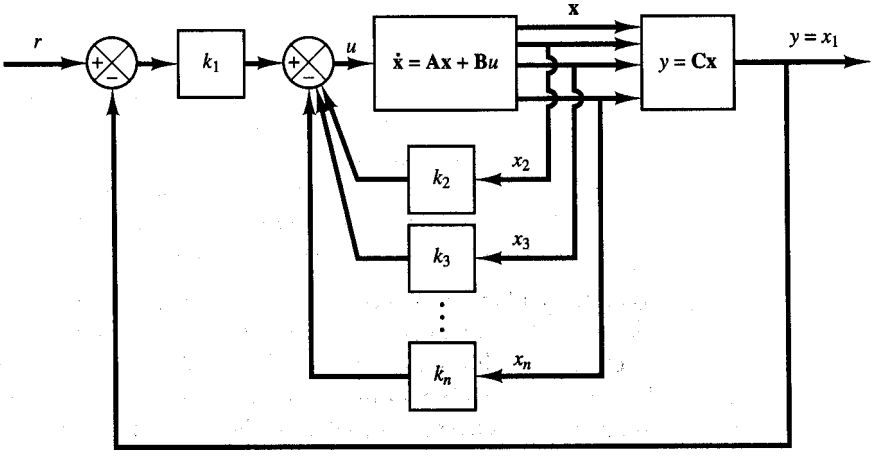


Figura **12–12** Sistema de seguimiento de tipo 1 cuando la planta tiene un integrador.

La ecuación (12-94) se convierte en

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathrm{BK})\mathbf{e} \tag{12-95}$$

La ecuación (12-95) describe la dinámica del error.

El diseño del sistema de seguimiento de tipo 1 se convierte aquí en el diseño de un sistema regulador asintóticamente estable tal que e(t) tienda a cero, dada cualquier condición inicial e(O). Si el sistema definido mediante la ecuación (12-89) es de estado completamente controlable, entonces, especificando los valores característicos deseados $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ para la matriz A - BK, la matriz K se determina mediante la técnica de ubicación de polos presentada en la sección 12-2.

Los valores en estado estable de x(t) y $u(t)$ se encuentran del modo siguiente: en estado estable $(t = \infty)$, a partir de la ecuación (12-92), tenemos que,

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) = \mathbf{0} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{B}k_1 r$$

Dado que todos los valores característicos deseados de $\mathbf{A}$ - BK están en el semiplano izquierdo del plano s, existe la inversa de la matriz $\mathbf{A}$ - BK. En consecuencia, $\mathbf{x}(\infty)$ se determina como

$$\mathbf{x}(\infty) = -(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}k_1 r$$

Asimismo, $u(\infty)$ se obtiene como

$$u(\infty) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(\infty) + k_1 r = 0$$

(Véase el ejemplo 12-5 para verificar esta última ecuación.)

EJEMPLO 12-7 Considere el diseño de un sistema de seguimiento de tipo 1 cuando la función de transferencia de la planta tiene un integrador. Suponga que la función de transferencia de la planta se obtiene mediante

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

Se quiere diseñar un sistema de seguimiento de tipo 1 tal que los polos en lazo cerrado estén en $-2 \pm j2\sqrt{3}$ y -10. Suponga que la configuración del sistema es igual a la de la figura 12-12 y que la entrada de referencia r es una función escalón.

Defina las variables de estado x_1, x_2 y x_3 del modo siguiente:

$$x_1 = \mathrm{Y}$$
$$x_2 = \dot{x}_1$$
$$x_3 = \dot{x}_2$$

Así, la representación en el espacio de estados del sistema se vuelve

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{12-96}$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{cx} \tag{12-97}$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{C}=[1 \quad 0 \quad 0]$$

Remitiéndonos a la figura 12- 12 y considerando que $n = 3$, la señal de control u se obtiene mediante

$$u = -(k_2 x_2 + k_3 x_3) + k_1(r - x_1) = -\mathbf{K}\mathbf{x} + k_1 r \tag{12-98}$$

en donde

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

Nuestro problema aquí es determinar la matriz de ganancias de realimentación del estado K mediante el enfoque de ubicación de los polos.

Examinemos la matriz de controlabilidad para el sistema. El rango de

$$M = [B \quad AB \mid A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

es 3. Por tanto, la planta es de estado completamente controlable y es posible una ubicación arbitraria de los polos.

Sustituyendo la ecuación (12-98) dentro de la ecuación (12−96), obtenemos

$$\dot{\mathbf{x}} = Ax + B(-Kx + k_1 r) = (A - BK)\mathbf{x} + Bk_1 r \tag{12-99}$$

en donde la entrada r es una función escalón. Así, conforme t tiende a infinito, $x(t)$ tiende a $\mathbf{x}(\infty)$, un vector constante. En estado estable, tenemos que

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) = (A - BK)\mathbf{x}(\infty) + Bk_1 r \tag{12-100}$$

Restando la ecuación (12-100) de la ecuación (12-99) tenemos

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(\infty) = (A - BK)[x(t) - \mathbf{x}(\infty)]$$

Defina

$$x(t) - \mathbf{x}(\infty) = e(t)$$

Entonces

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (A - BK)e(t) \tag{12-101}$$

La ecuación (12-101) define la dinámica del error.

La ecuación característica para el sistema es

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 2 & s+3 \end{vmatrix}$$

$$= s^3 + 3s^2 + 2s$$

$$= s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

Por tanto,

$$a_1 = 3, \qquad a_2 = 2, \qquad a_3 = 0$$

Dado que los valores característicos deseados de A − BK son

$$\mu_1 = -2 + j2\sqrt{3}, \qquad \mu_2 = -2 - j2\sqrt{3}, \qquad \mu_3 = -10$$

tenemos la ecuación característica deseada del modo siguiente:

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3) = (s + 2 - j2\sqrt{3})(s + 2 + j2\sqrt{3})(s + 10)$$

$$= s^3 + 14s^2 + 56s + 160$$

$$= s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3 = 0$$

Por tanto,

$$\alpha_1 = 14, \qquad \alpha_2 = 56, \qquad \alpha_3 = 160$$

Para la determinación de la matriz K mediante el enfoque de ubicación de polos usaremos la ecuación (12−13), que puede reescribirse como

$$K = [\alpha_3 - a_3 \quad \alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1]\,\mathbf{T}^{-1} \tag{12-102}$$

Dado que la ecuación de estado para el sistema, ecuación (12−96), ya está en la forma canónica controlable, tenemos que T = I. Por tanto,

$$\begin{aligned} K &= [\alpha_3 - a_3 \quad \alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1]\,\mathbf{T}^{-1} \\ &= [160 - 0 \quad 56 - 2 \quad 14 - 3]\mathbf{I} \\ &= [160 \quad 54 \quad 11] \end{aligned}$$

La respuesta escalón para este sistema se obtiene fácilmente mediante una simulación en computadora. Dado que

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [160 \quad 5 \quad 4 \quad 11] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -160 & -56 & -14 \end{bmatrix}$$

a partir de la ecuación (12-99) la ecuación de estado para el sistema diseñado es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -160 & -56 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 160 \end{bmatrix} r \tag{12-103}$$

y la ecuación de salida es

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{12-104}$$

Resolver las ecuaciones (12-103) y (12-104) para $y(t)$ cuando *res* una función escalón unitario produce la curva de respuesta escalón unitario $y(t)$ contra t. El programa MATLAB 12-9 produce la respuesta escalón unitario.

Programa MATLAB 12-9

```
% --------- Respuesta escalón unitario ---------

% ***** Introduzca la matriz de estado A, la matriz de control B,
% la matriz de salida C y la matriz de transmisión directa D *****

A = [0  1  0;0  0  1;−160  −56  −14];
B = [0;0;160];
C = [1  0  0];
D = [0];

% ***** Introduzca el comando step y el comando plot *****

t = 0:0.01:5;
y = step(A,B,C,D,1,t);
plot(t,y)
grid
title('Respuesta escalón unitario')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salida y')
```

La curva de respuesta escalón unitario resultante aparece en la figura 12-13.

Observe que $\dot{\mathbf{x}}(\infty) = 0$. Por tanto, a partir de la ecuación (12−100), tenemos que,

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(\infty) = -\mathbf{B}k_1 r$$

Dado que

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -160 & -56 & -14 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{20} & -\frac{7}{80} & -\frac{1}{160} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tenemos que

$$\mathbf{x}(\infty) = -(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}k_1 r = -\begin{bmatrix} -\frac{7}{20} & -\frac{7}{80} & -\frac{1}{160} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}(160)r$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{160} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}(160)r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es evidente que $x_1(\infty) = y(\infty) = r$. No hay error en estado estable en la respuesta escalón.

Observe que, dado que

$$u(\infty) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(\infty) + k_1 r(\infty) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(\infty) + k_1 r$$

tenemos que

$$u(\infty) = -[160 \quad 54 \quad 11]\begin{bmatrix} x_1(\infty) \\ x_2(\infty) \\ x_3(\infty) \end{bmatrix} + 160r$$

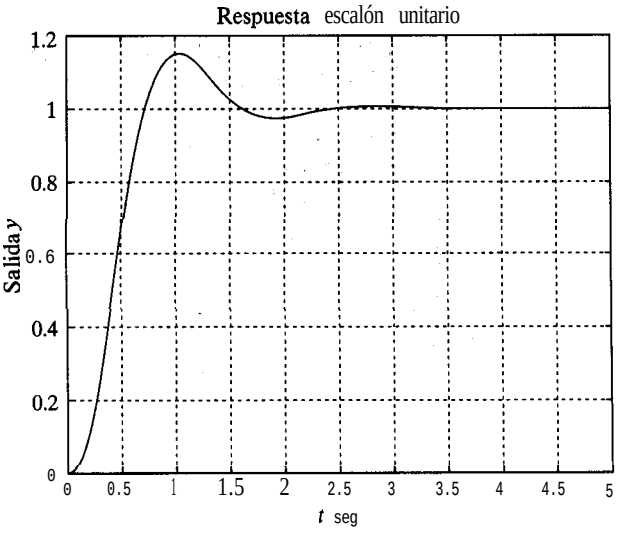


Figura **12–13**
Curva de respuesta escalón unitario y(t) contra t para el sistema diseñado en el ejemplo 12-7.

$$= -[160 \quad 54 \quad 11] \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 160r$$

$$= -160r + 160r = 0$$

En estado estable la señal de control u se vuelve cero.

Diseño de un sistema de seguimiento de tipo 1 cuando la planta no tiene integrador. Si la planta no tiene integrador (planta de tipo 0), el principio básico del diseño de un sistema de seguimiento de tipo 1 es insertar un integrador en la trayectoria directa entre el comparador de error y la planta, como se aprecia en la figura 12-14. (El diagrama de bloques de la figura 12-14 es una forma básica del sistema de seguimiento de tipo 1 en donde la planta no tiene integrador.) A partir del diagrama obtenemos

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathrm{Ax} + \mathrm{Bu} \tag{12-105}$$

$$y = cx \tag{12-106}$$

$$u = -\mathbf{Kx} + k_I\xi \tag{12-107}$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - \mathbf{Cx} \tag{12-108}$$

en donde x = vector de estado de la planta (vector de dimensión n)
u = señal de control (escalar)
y = seña1 de salida (escalar)
ξ = salida del integrador (variable de estado del sistema, escalar)
r = señal de entrada de referencia (función escalón, escalar)
A = matriz de coeficientes constantes de n X n
B = matriz de coeficientes constantes de n X 1
C = matriz de coeficientes constantes de 1 X n

Suponemos que la planta obtenida mediante la ecuación (12-105) es de estado completamente controlable. La función de transferencia de la planta se obtiene mediante

$$G_p(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

Para evitar la posibilidad de que el integrador insertado se cancele por un cero de la planta en el origen, suponemos que $G_p(s)$ no tiene un cero en el origen.

Suponga que la entrada de referencia (función escalón) se aplica en $t = 0$. En este caso, para $t > 0$, la dinámica del sistema se describe mediante una ecuación que es una combinación de las ecuaciones (12-105) y (12-108):

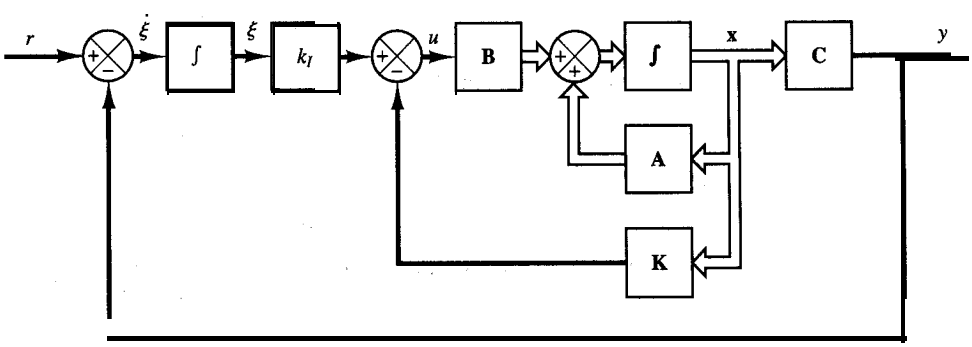


Figura 12–14
Sistema de seguimiento de tipo 1.

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}(t)\\ \dot{\xi}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ -\mathbf{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \xi(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{B}\\ 0\end{bmatrix}u(t) + \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ 1\end{bmatrix}r(t) \qquad (12\text{-}109)$$

Diseñaremos un sistema asintóticamente estable, tal que $\mathbf{x}(\infty), \xi(\infty)$ y $u(\infty)$ tiendan avalores constantes, respectivamente. Así, en un estado estable $\dot{\xi}(t) = 0$ y obtenemos $y(\infty) = r$.

Observe que, en estado estable, tenemos que

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}(\infty)\\ \dot{\xi}(\infty)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ -\mathbf{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(\infty)\\ \xi(\infty)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{B}\\ 0\end{bmatrix}u(\infty) + \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ 1\end{bmatrix}r(\infty) \qquad (12\text{–}110)$$

Considerando que r(t) es una entrada escalón, tenemos que $r(\infty) = \text{r(t)} = r$ (constante) para $t > 0$. Restando la ecuación (12-110) de la ecuación (12−109), obtenemos

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(\infty)\\ \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(\infty)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ -\mathbf{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty)\\ \xi(t) - \xi(\infty)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{B}\\ 0\end{bmatrix}[u(t) - u(\infty)] \qquad (12\text{-}111)$$

Defina

$$\text{x(t)} - \mathbf{x}(\infty) = \mathbf{x}_e(t)$$
$$\xi(t) - \xi(\infty) = \xi_e(t)$$
$$\text{u(t)} - u(\infty) = \text{u,(t)}$$

Entonces, la ecuación (12-111) se escribe como

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_e(t)\\ \dot{\xi}_e(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ -\mathbf{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_e(t)\\ \xi_e(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{B}\\ 0\end{bmatrix}u_e(t) \qquad (12\text{-}112)$$

en donde

$$u_e(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}_e(t) + k_I\xi_e(t) \qquad (12\text{-}113)$$

Defina un nuevo vector de error e(t) $(n + 1)$-ésimo de orden mediante

$$\mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix}\mathbf{x}_e(t)\\ \xi_e(t)\end{bmatrix} = (n + 1)\text{-vector}$$

Así, la ecuación (12-112) se vuelve

$$\dot{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{e} + \text{Bu}, \qquad (12\text{-}114)$$

en donde

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ -\mathbf{C} & 0\end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix}\mathbf{B}\\ 0\end{bmatrix}$$

y la ecuación (12-113) se convierte en

$$u_e = -\hat{\mathbf{K}}\mathbf{e} \qquad (12\text{-}115)$$

en donde

$$\hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \quad -k_I]$$

Aquí, la idea básica de diseñar el sistema de seguimiento de tipo 1 es diseñar un sistema regulador estable de $(n + 1)$-ésimo orden que lleve a cero el nuevo vector de error $e(t)$, dada cualquier condición inicial e(O).

Las ecuaciones (12-114) y (12-115) describen la dinámica del sistema regulador de $(n + 1)$-ésimo orden. Si el sistema definido mediante la ecuación (12-114) es de estado completamente controlable, entonces, especificando la ecuación característica deseada para el sistema, se determina la matriz K mediante la técnica de ubicación de polos presentada en la sección 12-2.

Los valores en estado estable de x(t), $\xi(t)$ y u(t) se encuentran del modo siguiente: en estado estable $(t = \infty)$, a partir de las ecuaciones (12-105) y (12-108), tenemos que

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) = \mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{B}u(\infty)$$

$$\dot{\xi}(\infty) = 0 = r - \mathbf{C}\mathbf{x}(\infty)$$

lo cual se combina en una ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ r \end{bmatrix}$$

Si la matriz P, definida mediante

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \tag{12-116}$$

es de rango $n + 1$, entonces existe su inversa y

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -r \end{bmatrix}$$

Asimismo, a partir de la ecuación (12 – 107), tenemos que

$$u(\infty) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(\infty) + k_I\xi(\infty)$$

y, por tanto

$$\xi(\infty) = \frac{1}{k_I}[u(\infty) + \mathbf{K}\mathbf{x}(\infty)]$$

Observe que, si la matriz P obtenida mediante la ecuación (12-116) es de rango $n + 1$, entonces el sistema definido mediante la ecuación (12-114) se vuelve de estado completamente controlable (véase el problema A-12-1.5) y la solución para este problema se obtiene mediante el enfoque de ubicación de polos.

La ecuación del error de estado se obtiene sustituyendo la ecuación (12-115) dentro de la ecuación (12-114).

$$\dot{\mathbf{e}} = (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}})\mathbf{e} \tag{12-117}$$

Si los valores característicos deseados de la matriz $\hat{\mathbf{A}}$ $\hat{\mathbf{B}}$ $\hat{\mathbf{K}}$ (es decir, los polos en lazo cerrado deseados) se especifican como $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n+1}$, entonces la matriz de ganancias de realimentación del estado K y la constante de ganancia integral k_1 pueden determinarse. En el diseño actual, es necesario considerar varias matrices K diferentes (que correspondan a varios conjuntos distintos de valores característicos deseados) y realizar simulaciones en computadora para encontrar aquella que produzca el mejor desempeño general del sistema. A continuación, seleccione la mejor como la matriz K .

Como ocurre normalmente, no todas las variables de estado se pueden medir en forma directa. En ese caso, necesitamos usar un observador de estado. La figura 12-15 muestra un diagrama de bloques de un sistema de seguimiento de tipo 1 con un observador de estado.

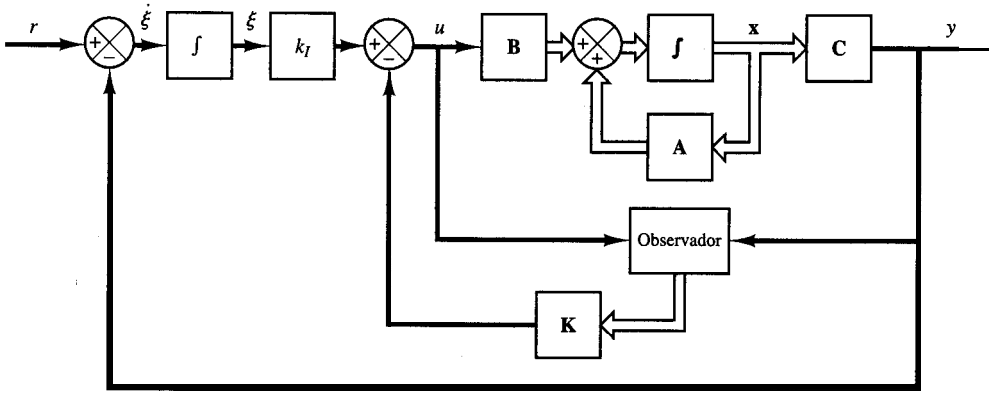


Figura1215
Sistema de seguimiento de tipo 1 con un observador de estado.

12-8 EJEMPLO DEL DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL CON MATLAB

Considere el sistema de control del péndulo invertido de la figura 12–16. En este ejemplo, sólo nos interesa los movimientos del péndulo y carro en el plano de la página.

Se desea conservar el péndulo invertido lo más cercano posible a la vertical y aun así controlar la posición del carro, por ejemplo, moverlo súbitamente de un punto a otro. Para controlar la posición del carro es necesario desarrollar un sistema de seguimiento de tipo 1. El sistema del péndulo invertido montado en un carro no tiene un integrador. Por tanto, la señal de posición y (que indica la posición del carro) se realimenta a la entrada y se inserta un integrador en la trayectoria directa, como se observa en la figura 12–17. (Compare este sistema con el analizado en la figura 12-4, cuando no existí? entrada para el carro.) Suponemos que el ángulo del péndulo θ y la velocidad angular $\dot{\theta}$ son pequeños, por lo que

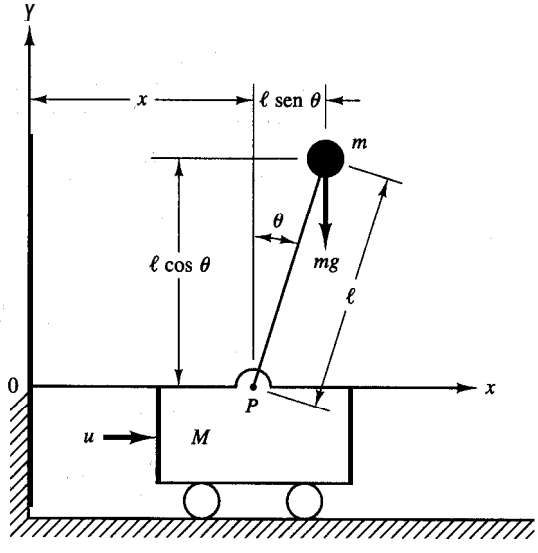


Figura1216
Sistema de control del péndulo invertido.

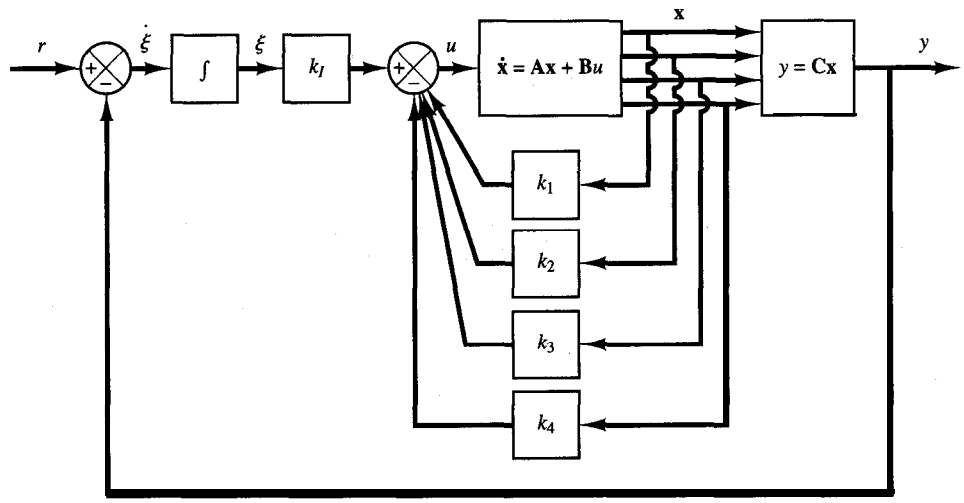


Figura 12–17
Sistema de control del péndulo invertido. (Un sistema de seguimiento de tipo 1 cuando la planta no tiene integrador.)

sen $\theta \doteqdot \theta$, $\cos\theta \doteqdot 1$ y $\theta\dot{\theta}^2 \doteqdot 0$. También suponemos que los valores numéricos para M, m y l son iguales a los usados en el sistema que se analizó en la sección 12-4, es decir,

$$M = 2\ \text{kg}, \qquad m = 0.1\ \text{kg}, \qquad l = 0.5\ \text{m}$$

Remitiéndonos a la sección 12-4 [las ecuaciones (12-21) y (12−22)], las ecuaciones para el sistema de control del péndulo invertido son

$$Ml\ddot{\theta} = (M + m)g\theta - u \tag{12-118}$$

$$M\ddot{x} = u - mg\theta \tag{12-119}$$

Cuando se sustituyen los valores numéricos determinados, las ecuaciones (12-118) y (12-119) se convierten en

$$\ddot{\theta} = 20.601\theta - u \tag{12-120}$$

$$\ddot{x} = 0.5u - 0.49058 \tag{12-121}$$

Definamos las variables de estado x_1, x_2, x_3 y x_4, como

$$x_1 = \theta$$
$$x_2 = \dot{\theta}$$
$$x_3 = x$$
$$x_4 = \dot{x}$$

Así, remitiéndonos a las ecuaciones (12-120) y (12-121) y a la figura 12-17 y considerando la posición del carro x como la salida del sistema, obtenemos las ecuaciones para el sistema del modo siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathrm{Bu} \tag{12-122}$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{cx} \tag{12-123}$$

$$u = -\mathbf{Kx} + k_I\xi \tag{12-124}$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - \mathbf{Cx} \tag{12-125}$$

en donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & 100 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & 001 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \qquad c = [0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0]$$

Para el sistema de seguimiento de tipo 1, tenemos la ecuación de error del estado obtenida mediante la ecuación (12-114):

$$\dot{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{e} + \hat{\mathbf{B}}u_e \tag{12-126}$$

en donde

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{O-l} & & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y la señal de control se obtiene mediante la ecuación (12-115):

$$u_e = -\hat{\mathbf{K}}\mathbf{e}$$

en donde

$$\hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \quad -k_I] = [k_1 \;\; k_2 \;\; k_3 \;\; k_4 \;\vdots\; -k_I]$$

Determinemos la matriz de ganancias de realimentación del estado $\hat{\mathbf{K}}$ necesaria, mediante la técnica de ubicación de polos. Usaremos la ecuación (12-13) para la determinación de la matriz $\hat{K}$. A continuación, presentaremos una solución analítica y después la solución de MATLAB.

Antes de continuar, debemos examinar el rango de la matriz P, en donde

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ -c & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz P se obtiene mediante

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & \text{O-l} & & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{12-127}$$

Se encuentra que el rango de esta matriz es 5. Por tanto, el sistema definido mediante la ecuación (12- 126) es de estado completamente controlable y es posible una ubicación arbitraria de los polos. A continuación obtendremos la ecuación característica para el sistema obtenido mediante la ecuación (12-126).

$$|s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -20.601 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 & 0 \\ 0.4905 & 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & s \end{vmatrix}$$

$$= s^3(s^2 - 20.601)$$

$$= s^5 - 20.601s^3$$

$$= s^5 + a_1s^4 + a_2s^3 + a_3s^2 + a_4s + a_5 = 0$$

Por tanto,

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = -20.601, \qquad a_3 = 0, \qquad a_4 = 0, \qquad a_5 = 0$$

Para obtener una velocidad y un amortiguamiento razonables en la respuesta del sistema diseñado (por ejemplo, el tiempo de estabilización de aproximadamente 4 $\sim$ 5 seg y el sobrepaso máximo de 15% $\sim$ 16% en la respuesta escalón del carro), seleccionemos los polos en lazo cerrado deseados en $s = \mu_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, en donde

$$\mu_1 = -1 + j\sqrt{3}, \qquad \mu_2 = -1 - j\sqrt{3}, \qquad \mu_3 = -5, \qquad \mu_4 = -5, \qquad \mu_5 = -5$$

(Éste es un conjunto posible de los polos en lazo cerrado deseados. Se pueden elegir otros conjuntos.) En este caso, la ecuación característica deseada se convierte en

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4)(s - \mu_5)$$

$$= (s + 1 - j\sqrt{3})(s + 1 + j\sqrt{3})(s + 5)(s + 5)(s + 5)$$

$$= s^5 + 17s^4 + 109s^3 + 335s^2 + 550s + 500$$

$$= s^5 + \alpha_1s^4 + \alpha_2s^3 + \alpha_3s^2 + \alpha_4s + \alpha_5 = 0$$

Por tanto,

$$\alpha_1 = 17, \qquad \alpha_2 = 109, \qquad \alpha_3 = 335, \qquad \alpha_4 = 550, \qquad \alpha_5 = 500$$

El paso siguiente es obtener la matriz de transformación T a partir de la ecuación (12-4):

$$T = M W$$

en donde M y W se obtienen mediante las ecuaciones (12-5) y (12−6), respectivamente:

$$M = [\hat{\mathbf{B}} \quad \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} \quad \hat{\mathbf{A}}^2\hat{\mathbf{B}} \quad \hat{\mathbf{A}}^3\hat{\mathbf{B}} \quad \hat{\mathbf{A}}^4\hat{\mathbf{B}}]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -20.601 & 0 \\ -1 & 0 & -20.601 & 0 & (20.601)^2 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.4905 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.4905 & 0 & 10.1048 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & -0.4905 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -20.601 & 0 & 1 \\ 0 & -20.601 & 0 & 1 & 0 \\ -20.601 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$T = MW = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -9.81 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -9.81 & 0 & 0.5 \\ 9.81 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La inversa de la matriz T es

$$T^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{0.25}{(9.81)^2} & 0 & -\frac{0.5}{(9.81)^2} & \frac{1}{9.81} \\ -\frac{0.5}{9.81} & 0 & -\frac{1}{9.81} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{0.5}{9.81} & 0 & -\frac{1}{9.81} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Remitiéndonos a la ecuación (12−13), la matriz $\hat{\mathbf{K}}$ se obtiene mediante

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}} &= [\alpha_5 - \alpha_5 \quad \alpha_4 - \alpha_4 \quad \alpha_3 - \alpha_3 \quad \alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1]\mathbf{T}^{-1} \\ &= [500 - 0 \quad 500 - 0 \quad 335 - 0 \quad 109 + 20.601 \quad 17 - 0]\mathbf{T}^{-1} \\ &= [500 \quad 500 \quad 335 \quad 129.601 \quad 17]\mathbf{T}^{-1} \\ &= [-157.6336 \quad -35.3733 \quad -56.0652 \quad -36.7466 \quad 50.96841 \\ &= [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad -k_I] \end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos

$$K = [k, \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] = [-157.6336 \quad -35.3733 \quad -56.0652 \quad -36.74661$$

Y

$$k_I = -50.9684$$

Características de la respuesta escalón unitario del sistema diseñado. Una vez que determinamos la matriz de ganancias de realimentación K y la constante de ganancia integral k_I, la respuesta escalón en la posición del carro se obtiene despejando la ecuación siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r \qquad (12\text{-}128)$$

Dado que

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + k_I\xi$$

La ecuación (12-128) se escribe como:

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}\\ \dot{\xi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}k_I\\ -\mathbf{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \xi\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ 1\end{bmatrix} r \tag{12-129}$$

o bien

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{\xi}\end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -137.0326 & -35.3733 & -56.0652 & -36.7466 & 50.9684\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 78.3263 & 17.6867 & 28.0326 & 18.3733 & -25.4842\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0\end{vmatrix} \begin{vmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ \xi\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1\end{vmatrix} r \tag{12-130}$$

La figura 12-18 muestra las curvas de respuesta $x_1(t)$ contra t, $x_2(t)$ contra t, $x_3(t)$ contra t, $x_4(t)$ contra t y $\xi(t)[= x_5(t)]$ contra t, en donde la entrada $r(t)$ para el carro es una función escalón unitario, o $r(t) = 1$ m. Observe que $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = x$ y $x_4 = \dot{x}$. Todas las condiciones iniciales se establecen iguales a 0.

La respuesta escalón en $x_3(t)[= x(t)]$ muestra el tiempo de asentamiento de aproximadamente 4.5 seg y sobrepaso máximo de aproximadamente 14.8%, como se busca. Un punto interesante en la curva de posición $[x_3(t)$ contra $t]$ es que el carro se mueve hacia atrás durante los primeros 0.6 seg más o menos para que el péndulo caiga hacia adelante. Después el carro acelera para moverse en la dirección positiva.

La curva de respuesta $x_3(t)$ contra t muestra claramente que $x_3(\infty)$ tiende a r. Asimismo, $x_1(\infty) = 0, x_2(\infty) = 0, x_4(\infty) = 0$ y $\xi(\infty) = 1.1$. Este resultado se verifica mediante el enfoque analítico que se presenta a continuación. En estado estable, a partir de las ecuaciones (12-122) y (12−125), tenemos que

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) = 0 = \mathbf{A}\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{B}u(\infty)$$

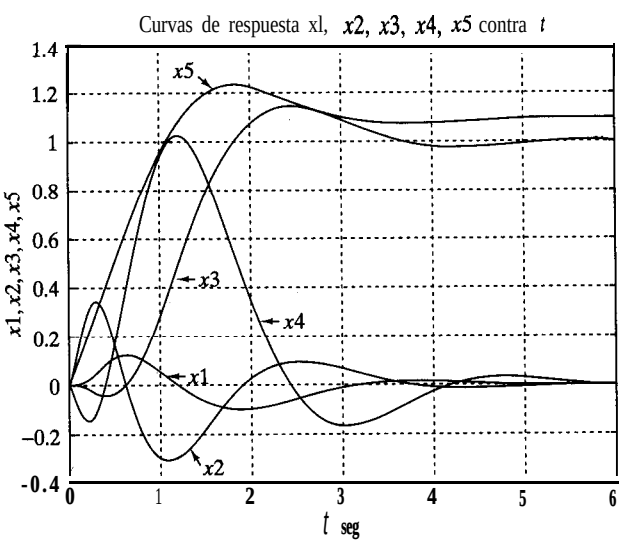


Figura 12 -18
Cúrvas de respuesta $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t)$ contra t.

$$\dot{\xi}(\infty) = 0 = r - \mathbf{C}\mathbf{x}(\infty)$$

lo cual se combina en

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ r \end{bmatrix}$$

Dado que antes encontramos que el rango de la matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}$$

es 5, tiene la inversa. Por tanto,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ \mathbf{u}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -r \end{bmatrix}$$

Remitiéndonos a la ecuación (12– 127), tenemos que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{0.5}{9.81} & 0 & \frac{1}{9.81} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 & 2.1 & 0 \end{bmatrix}$$

Así,

$$\begin{bmatrix} x_1(\infty) \\ x_2(\infty) \\ x_3(\infty) \\ x_4(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{0.5}{9.81} & 0 & \frac{1}{9.81} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 & 2.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En consecuencia,

$$y(\infty) = \mathbf{C}\mathbf{x}(\infty) = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(\infty) \\ x_2(\infty) \\ x_3(\infty) \\ x_4(\infty) \end{bmatrix} = x_3(\infty) = r$$

Dado que

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) = 0 = \mathbf{A}\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{B}u(\infty)$$

o bien

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{x}_4 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(\infty)$$

obtenemos

$$u(\infty) = 0$$

Dado que $u(\infty) = 0$, tenemos, a partir de la ecuación (12−125), que

$$u(\infty) = 0 = -\mathbf{K}\mathbf{x}(\infty) + k_1\xi(\infty)$$

y, de este modo,

$$\xi(\infty) = \frac{1}{k_I}[\mathbf{K}\mathbf{x}(\infty)] = \frac{1}{k_I} k_3 x_3(\infty) = \frac{-56.0652}{-50.9684} r = 1.1r$$

Por tanto, para $r = 1$, tenemos que

$$\xi(\infty) = 1.1$$

como se aprecia en la figura 12− 18.

Observe que, como en cualquier problema de diseño, si la velocidad y el amortiguamiento no son suficientemente satisfactorios, debemos modificar la ecuación característica deseada y determinar una nueva matriz $\hat{\mathbf{K}}$. Deben repetirse las simulaciones en computadora hasta obtener un resultado satisfactorio.

Determinación de la matriz de ganancias de realimentación del estado y la ganancia integral con MATLAB. El programa MATLAB 12− 10 se usa para diseñar el sistema de control del péndulo invertido considerado. Observe en el programa que usamos las notaciones A1, B1 y KK para $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$ y $\hat{\mathbf{K}}$ respectivamente. Es decir,

$$A1 = \hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c} & 0 \end{bmatrix} \qquad B1 = \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad KK = \hat{\mathbf{K}}$$

Programa MATLAB 12–10

```
% -------- Diseño de un sistema de control del péndulo invertido --------

% ***** En este programa usamos la fórmula de Ackermann para
% la ubicación de polos *****

% ***** Este programa determina la matriz de ganancias de realimentación
% del estado K = [k1  k2  k3  k4] y la constante de ganancia integral KI *****

% ***** Introduzca las matrices A, B, C y D *****

A = [0       1  0  0
     20.601  0  0  0
     0       0  0  1
     -0.4905 0  0  0];
```

```
    -157.6336  -35.3733  -56.0652  -36.7466  50.9684

k1 = KK(1), k2 = KK(2), k3 = KK(3), k4 = KK(4), KI = -KK(5)

k1 =

   -157.6336

k2 =

   -35.3733

k3 =

   -56.0652

k4 =

   -36.7466

KI =

   -50.9684
```

Características de la respuesta escalón unitario del sistema diseñado. Una vez determinada la matriz de ganancias de realimentación K y la constante de ganancia integral k_I, la respuesta escalón en la posición del carro se obtiene despejando la ecuación (12−129), que se vuelve a escribir a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{B}k_I \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{12-131}$$

La salida del sistema es $x_3(t)$, o bien

$$y = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{bmatrix} + [0]\, r \tag{12-132}$$

Defina la matriz de estado, la matriz de control, la matriz de salida y la matriz de transmisión directa del sistema obtenido mediante las ecuaciones (12-131) y (12−132), como **AA, BB,** CC y **DD,** respectivamente.

El programa MATLAB 12-11 se usa para obtener las curvas de respuesta escalón del sistema diseñado. Observe que, para obtener la respuesta escalón unitario, introducimos el comando

```
[y, x, t] = step(AA,BB,CC,DD)
```

La figura 12-19 muestra x_1 contra t, x_2 contra t, x_3(= salida y) contra t, x_4 contra t y x_5 (= ξ) contra t. (Antes, la figura 12-18 presentó estas curvas de respuesta en un solo diagrama.)

Programa MATLAB 12-11

```
% ---------- Respuesta escalón del sistema diseñado ----------
% **** El programa siguiente es para obtener una respuesta escalón
```

```
    -157.6336   -35.3733   -56.0652   -36.7466   50.9684

k1 = KK(1), k2 = KK(2), k3 = KK(3), k4 = KK(4), KI = -KK(5)

k1 =

   -157.6336

k2 =

   -35.3733

k3 =

   -56.0652

k4 =

   -36.7466

KI =

   -50.9684
```

Características de la respuesta escalón unitario del sistema diseñado. Una vez determinada la matriz de ganancias de realimentación K y la constante de ganancia integral k_I, la respuesta escalón en la posición del carro se obtiene despejando la ecuación (12−129), que se vuelve a escribir a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{B}k_I \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{12-131}$$

La salida del sistema es $x_3(t)$, o bien

$$y = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{bmatrix} + [0]\, r \tag{12-132}$$

Defina la matriz de estado, la matriz de control, la matriz de salida y la matriz de transmisión directa del sistema obtenido mediante las ecuaciones (12-131) y (12−132), como AA, BB, CC y DD, respectivamente.

El programa MATLAB 12-11 se usa para obtener las curvas de respuesta escalón del sistema diseñado. Observe que, para obtener la respuesta escalón unitario, introducimos el comando

```
[y, x, t] = step(AA,BB,CC,DD)
```

La figura 12− 19 muestra x_1 contra t, x_2 contra t, x_3(= salida y) contra t, x_4 contra t y x_5 (= ξ) contra t. (Antes, la figura 12-18 presentó estas curvas de respuesta en un solo diagrama.)

Programa MATLAB 12–11

```
% ------- Respuesta escalón del sistema diseñado ---------

% **** El programa siguiente es para obtener una respuesta escalón
```

```
% del sistema del péndulo invertido recién diseñado *****

% ***** Introduzca las matrices necesarias *****

A = [0  1  0  0;20.601  0  0  0;0  0  0  1;−0.4905  0  0  0];
B = [0;−1;0;0.5];
C = [0  0  1  0];
D = [0];
K = [−157.6336  −35.3733  −56.0652  −36.7466];
KI = −50.9684;
AA = [A − B*K  B*KI;−C  0];
BB = [0;0;0;0;1];
CC = [C  0];
DD = [0];

% **** A continuación introduzca el comando siguiente ****

t = 0:0.02:6;
[y,x,t] = step(AA,BB,CC,DD,1,t);
plot(t,x)
grid
title('Curvas de respuesta x1, x2, x3, x4, x5 contra t')
xlabel('t seg')
ylabel('x1, x2, x3, x4, x5')
text(1.3,0.04,'x1')
text(1.5,−0.34,'x2')
text(1.5,0.44,'x3')
text(2.33,0.26,'x4')
text(1.2,1.3,'x5')

% ***** Las curvas de respuesta anteriores se presentaron en la
% figura 12–18 *****

% ***** Para obtener las curvas de respuesta x1 contra t, x2
% contra t, x3 contra t, x4 contra t y x5 contra
% t, por separado, introduzca el comando siguiente *****

x1 = [1  0  0  0  0]*x';
x2 = [0  1  0  0  0]*x';
x3 = [0  0  1  0  0]*x';
x4 = [0  0  0  1  0]*x';
x5 = [0  0  0  0  1]*x';

subplot(3,2,1);
plot(t,x1); grid
title('x1 contra t')
xlabel('t seg')
ylabel('x1')
```

```
subplot(3,2,2);
plot(t,x2); grid
title('x2 contra t')
xlabel('t seg')
ylabel('x2')

subplot(3,2,3);
plot(t,x3); grid
title('x3 contra t')
xlabel('t seg')
ylabel('x3')

subplot(3,2,4);
plot(t,x4); grid
title('x4 contra t')
xlabel('t seg')
ylabel('x4')

subplot(3,2,5);
plot(t,x5); grid
title('x5 contra t')
xlabel('t seg')
ylabel('x5')
```

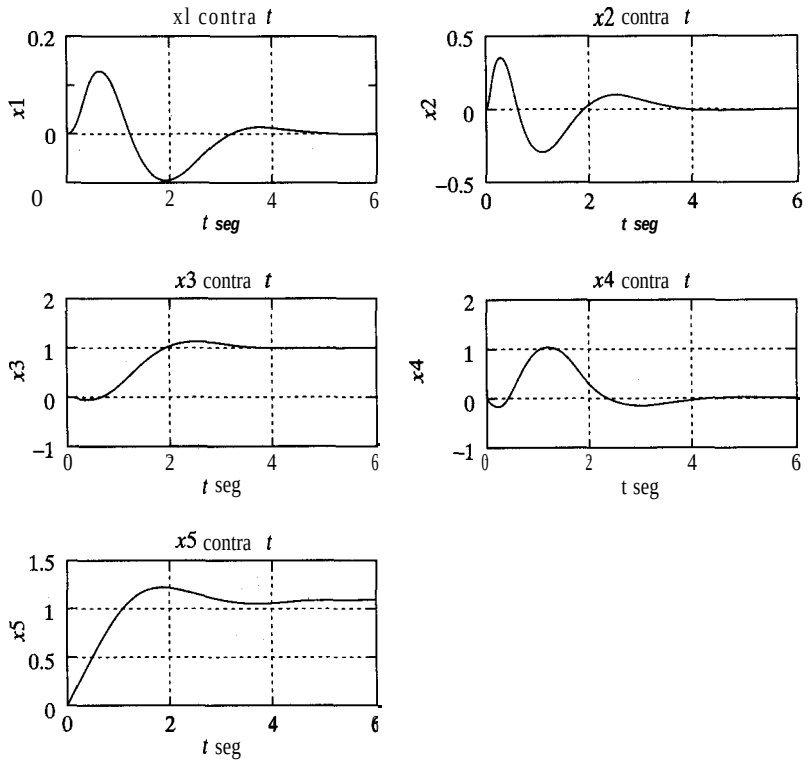


Figura 12 -19
Curvas x_1 contra t, x_2 contra t, x_3 (= salida y) contra t, x_4 contra t y x_5 (= ξ) contra t.

A-12-1. Considere el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

Suponga que este sistema no es de estado completamente controlable. De este modo, el rango de la matriz de controlabilidad es menor que n, o

$$\text{rango } [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = q < n \tag{12-133}$$

Esto significa que hay q vectores columna linealmente independientes en la matriz de controlabilidad. Definamos tales q vectores columna linealmente independientes como $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_q$. Asimismo, seleccionemos $n-q$ vectores de dimensión n adicionales $\mathbf{v}_{q+1}, \mathbf{v}_{q+2}, \ldots, \mathbf{v}_n$ tales que

$$\mathbf{P} = [\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{f}_q \mid \mathbf{v}_{q+1} \quad \mathbf{v}_{q+2} \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n]$$

sea de rango n. Usando la matriz $\mathbf{P}$ como la matriz de transformación, definimos

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \hat{\mathbf{A}}, \qquad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}}$$

Demuestre que $\hat{\mathbf{A}}$ se obtiene mediante

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

en donde $\mathbf{A}_{11}$ es una matriz de $q \times q$, $\mathbf{A}_{12}$ es una matriz de $q \times (n-q)$, $\mathbf{A}_{22}$ es una matriz de $(n-q)\times(n-q)$ y 0 es una matriz de $(n-q) \times q$. Demuestre también que la matriz de $\hat{\mathbf{B}}$ se obtiene mediante

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

en donde $\mathbf{B}_{11}$ es una matriz de $q \times 1$ y 0 es una matriz de $(n-q) \times 1$.

Solución. Observe que

$$\mathbf{AP} = \mathbf{P}\hat{\mathbf{A}}$$

o bien

$$[\mathbf{Af}_1 \quad \mathbf{Af}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{Af}_q \quad \mathbf{Av}_{q+1} \mid \cdots \mid \mathbf{Av}_n] = [\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{f}_q \quad \mathbf{v}_{q+1} \quad \cdots \mid \mathbf{v}_n]\hat{\mathbf{A}} \tag{12-134}$$

Asimismo,

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}\hat{\mathbf{B}} \tag{12-135}$$

Dado que tenemos q vectores columna linealmente independiente $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_q$, usamos el teorema de Cayley-Hamilton para expresar los vectores $\mathbf{Af}_1, \mathbf{Af}_2, \ldots, \mathbf{Af}_q$ en términos de estos q vectores. Es decir,

$$\mathbf{Af}_1 = a_{11}\mathbf{f}_1 + a_{21}\mathbf{f}_2 + \cdots + a_{q1}\mathbf{f}_q$$

$$\mathbf{Af}_2 = a_{12}\mathbf{f}_1 + a_{22}\mathbf{f}_2 + \cdots + a_{q2}\mathbf{f}_q$$

$$\mathbf{Af}_q = a_{1q}\mathbf{f}_1 + a_{2q}\mathbf{f}_2 + \cdots + a_{qq}\mathbf{f}_q$$

Por tanto, la ecuación (12-134) se escribe del modo siguiente:

$$[\mathbf{Af}_1 \quad \mathbf{Af}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{Af}_q \quad \mathbf{Av}_{q+1} \quad \cdots \quad \mathbf{Av}_n]$$

$$= [\mathbf{f}_1 \mid \mathbf{f}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{f}_q \mid \mathbf{v}_{q+1} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n] \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1q} & a_{1q+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} & a_{2q+1} & \cdots & a_{2n} \\ & & & & & \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} & a_{qq+1} & \cdots & a_{qn} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_{q+1q+1} & \cdots & a_{q+1n} \\ & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nq+1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right]$$

Defina

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} \\ & & \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{11}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1q+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2q+1} & \cdots & a_{2n} \\ & & \\ a_{qq+1} & \cdots & a_{qn} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{12}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{21} = \text{matriz cero de } (n-q) \times q$$

$$\begin{bmatrix} a_{q+1q+1} & \cdots & a_{q+1n} \\ & & \\ a_{nq+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{22}$$

Entonces, la ecuación (12-134) se escribe como

$$[\mathbf{Af}_1 \quad \mathbf{Af}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{Af}_q \mid \mathbf{Av}_{q+1} \quad \cdots \quad \mathbf{Av}_n]$$

$$= [\mathbf{f}_1 \mid \mathbf{f}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{f}_q \mid \mathbf{v}_{q+1} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$\mathbf{AP} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

Así,

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

A continuación, remitiéndonos a la ecuación (12−135), tenemos que

$$\mathbf{B} = [\mathbf{f}_1 \mid \mathbf{f}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{f}_q \mid \mathbf{v}_{q+1} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n] \hat{\mathbf{B}} \tag{12-136}$$

Remitiéndonos a la ecuación (12-133) observe que el vector B se escribe en tbminos de q *vectores* columna linealmente independientes $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_q$. Por tanto, tenemos que

$$\mathrm{B} = b_{11}\mathbf{f}_1 + b_{21}\mathbf{f}_2 + \cdots + b_{q1}\mathbf{f}_q$$

En consecuencia, la ecuación (12-136) se escribe del modo siguiente:

$$b_{11}\mathbf{f}_1 + b_{21}\mathbf{f}_2 + \cdots + b_{q1}\mathbf{f}_q = [\mathbf{f}_1 \mid \mathbf{f}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{f}_q \mid \mathbf{v}_{q+1} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n] \begin{vmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \\ b_{q1} \\ 0 \\ \\ \\ 0 \end{vmatrix}$$

De este modo,

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

en donde

$$\mathbf{B}_{11} = \begin{vmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \\ b_{q1} \end{vmatrix}$$

A-12-2. Considere un sistema de estado completamente controlable

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

Defina la matriz de controlabilidad como M:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

Demuestre que

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{vmatrix}$$

en donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los coeficientes del polinomio característico

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

Solución. Consideremos el caso en el que n = 3. Demostraremos que

$$\mathbf{AM} = \mathbf{I}\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_3 \\ 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & a_1 \end{bmatrix} \tag{12-137}$$

El primer miembro de la ecuación (12-137) es

$$\mathbf{AM} = \mathbf{A}[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = [\mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \mathbf{A}^3\mathbf{B}]$$

El segundo miembro de la ecuación (12-137) es

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B}]\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_3 \\ 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & a_1 \end{bmatrix} = [\mathbf{A}\,\mathbf{B} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid -a_3\mathbf{B} - a_2\mathbf{AB} - a_1\mathbf{A}^2\mathbf{B}] \tag{12-138}$$

El teorema de Cayley-Hamilton plantea que la matriz A satisface su propia ecuación característica o, en el caso de $n = 3$,

$$\mathbf{A}^3 + a_1\mathbf{A}^2 + a_2\mathbf{A} + a_3\mathbf{I} = 0 \tag{12-139}$$

Usando la ecuación (12-139), la tercera columna del segundo miembro de la ecuación (12-138) se vuelve

$$-a_3\mathbf{B} - a_2\mathbf{AB} - a_1\mathbf{A}^2\mathbf{B} = (-a_3\mathbf{I} - a_2\mathbf{A} - a_1\mathbf{A}^2)\mathbf{B} = \mathbf{A}^3\mathbf{B}$$

Así, la ecuación (12-138), el segundo miembro de la ecuación (12-137), se convierte en

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}]\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_3 \\ 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & a_1 \end{bmatrix} = [\mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \mathbf{A}^3\mathbf{B}]$$

Por tanto, ambos miembros de la ecuación (12-137) son iguales. Por tal razón, hemos demostrado que la ecuación (12-137) es verdadera. En consecuencia,

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

La obtención anterior se extiende con facilidad al caso general de cualquier entero positivo n.

A-12-3. Considere un sistema de estado completamente controlable

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

Defina

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

Y

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en donde las a_i son coeficientes del polinomio característico

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

Defina asimismo

$$T = MW$$

Demuestre que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución. Consideremos el caso en el que n = 3. Demostraremos que

$$T^{-1}AT = (\mathbf{MW})^{-1}A(MW) = \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM})\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \tag{12-140}$$

Remitiéndonos al problema A-12-2, tenemos que

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la ecuación (12-140) puede reescribirse como

$$\mathbf{W}^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0 & -a_3\\ 1 & 0 & -a_2\\ 0 & 1 & -a_1\end{bmatrix}\mathbf{W} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_3 & -a_2 & -a_1\end{bmatrix}$$

Así, necesitamos demostrar que

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & -a_3\\ 1 & 0 & -a_2\\ 0 & 1 & -a_1\end{bmatrix}\mathbf{W} = \mathbf{W}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_3 & -a_2 & -a_1\end{bmatrix} \tag{12-141}$$

El primer miembro de la ecuación (12-141) es

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & -a_3\\ 1 & 0 & -a_2\\ 0 & 1 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_2 & a_1 & 1\\ a_1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-a_3 & 0 & 0\\ 0 & a_1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

El segundo miembro de la ecuación (12-141) es

$$\begin{bmatrix}a_2 & a_1 & 1\\ a_1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_3 & -a_2 & -a_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-a_3 & 0 & 0\\ 0 & a_1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

En este caso, es evidente la validez de la ecuación (12-141). Por tanto, hemos demostrado que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_3 & -a_2 & -a_1\end{bmatrix}$$

A continuación comprobaremos que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \tag{12-142}$$

Observe que la ecuación (12-142) se escribe como

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} = \mathbf{M}\mathbf{W}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

Considerando que

$$\mathbf{T}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} = [\mathbf{B} \;\vdots\; \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}]\begin{bmatrix}a_2 & a_1 & 1\\ a_1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \;\vdots\; \mathbf{A}^2\mathbf{B}]\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = \mathbf{B}$$

tenemos que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

La obtención que se mostró aquí se extiende wn facilidad al caso general de cualquier entero positivo ***n.***

A-12-4. Considere la ecuación de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz de controlabilidad M,

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

es 2. Por tanto, el sistema es de estado completamente controlable. Transforme la ecuación de estado determinada a la forma canónica controlable.

Solución. Dado que

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s-1 & -1 \\ 4 & s+3 \end{vmatrix} = (s-1)(s+3) + 4$$
$$= s^2 + 2.9 + 1 = s^2 + a_1 s + a_2$$

tenemos que

$$a_1 = 2, \qquad a_2 = 1$$

Defina

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}\mathbf{W}$$

en donde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Así

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Y

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Defina

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}$$

Por tanto, la ecuación de estado se vuelve

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}u$$

Dado que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

y que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tenemos que

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

que está en la forma canónica controlable.

A-12-5. Considere un sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = cx$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 01$$

La ecuación característica del sistema es

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{vmatrix} = s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2) = 0$$

Los valores característicos de la matriz A son − 1 y -2.

Se quiere tener valores característicos en -3 y -5 usando un control mediante la realimentación del estado $u = -$ Kx. Determine la matriz de ganancias de realimentación **K** necesaria y la señal de control u.

Solución. El sistema dado es de estado completamente controlable, dado que el rango de

$$M = [B \mid AB] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

es 2. Por tanto, es posible la ubicación arbitraria de los polos.

Dado que la ecuación característica del sistema original es

$$s^2 + 3s + 2 = s^2 + a_1 s + a_2 = 0$$

tenemos que

$$a_1 = 3, \qquad a_2 = 2$$

La ecuación característica deseada es

$$(s + 3)(s + 5) = s^2 + 8s + 15 = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2 = 0$$

Por tanto,

$$\alpha_1 = 8, \qquad \alpha_2 = 15$$

Es importante señalar que la ecuación de estado original no está en la forma canónica controlable, porque la matriz B no es

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, debe determinarse la transformación de la matriz T.

$$T = M \quad W = [\ B \quad \mid \mathbf{AB}]\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

De este modo,

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Remitiéndonos a la ecuación (12−13), la matriz de ganancias de realimentación necesaria se obtiene mediante

$$\mathbf{K} = [\alpha_2 - a_2 \mid \alpha_1 - a_1]\mathbf{T}^{-1}$$
$$= [15 - 2 \quad 8 - 1] \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} = [6.5 \quad 2.5]$$

Así, la señal de control u se vuelve

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -[6.5 \quad 2.5] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

A-12-6. Un sistema regulador tiene una planta

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

Defina las variables de estado como

$$x_1 = y$$
$$x_2 = \dot{x}_1$$
$$x_3 = \dot{x}_2$$

Usando el control mediante la realimentación del estado $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, se quiere colocar los polos en lazo cerrado en $s = \mu_i \ (i = 1, 2, 3)$, en donde

$$\mu_1 = -2 + j2\sqrt{3}, \qquad \mu_2 = -2 - j2\sqrt{3}, \qquad \mu_3 = -10$$

Obtenga la matriz de ganancias de realimentación del estado K necesaria con MATLAB.

Solución. Las ecuaciones en el espacio de estados para el sistema se convierten en

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0u$$

Por tanto,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0], \qquad D = [0]$$

(Observe que, para la ubicación de los polos, las matrices $\mathbf{C}$ y D no afectan la matriz de ganancias de realimentación del estado K.)

Los programas MATLAB 12-12 y 12-13 obtienen la matriz de ganancias de realimentación del estado K. El programa MATLAB 12-12 usa una matriz de transformación T y el programa MATLAB 12-13 usa la fórmula de Ackermann.

Programa MATLAB 12–12

```
% ------ Ubicación de polos ------

% **** Determinación de la matriz de ganancias de realimentación del estado K
% usando la matriz de transformación T ****

% **** Introduzca las matrices A y B ****
A = [ 0     1     0
      0     0     1
     -6    -11    -6];
B = [0;0;1];

% **** Defina el vector de coeficientes del polinomio característico ****
JA = poly(A);

% **** Verifique el orden de la matriz A ****
n=6;

% Calcule la matriz de transformación
% El enunciado poly(A)

JA = poly(A);

JA =

    1.0000    6.0000   11.0000    6.0000

a1 = JA(2); a2 = JA(3); a3 = JA(4);

% **** Defina las matrices W y T del modo siguiente ****

W = [a2  a1  1;a1  1  0;1  0  0];
T = M*W;

% **** Obtenga el polinomio característico deseado
% definiendo la matriz J siguiente e introduciendo
% el enunciado poly(J) ****

J = [-2+2*sqrt(3)*j          0          0
          0     -2-2*sqrt(3)*j          0
          0                0     -10];
```

```
J] = poly(J)

J] =

   1.0000   14.0000   56.0000   160.0000

aa1 = J](2);a2 = J](3);aa1 = J](4);

% ***** La matriz de ganancias de realimentación del estado se obtiene mediante *****

K = [aa3-a3   aa2-a2   aa1-a1]*inv(T)

K =

   13.4000   4.5000   0.4000
```

```
% Programa 12A1.M (2ª ed.)

% ***** Ubicación de polos *****

% ***** Determinación de la matriz de ganancias de realimentación
% de estado K usando la fórmula de Ackermann *****

% ***** Introduzca las matrices A y B *****

A = [0   1   0;0   0   1;-a   -a2   -a1];
B = [0;0;10];

% ***** Defina la matriz de controlabilidad M *****

M = [B   A*B   A^2*B];

% ***** Verifique el rango de la matriz M *****

rank(M)

ans =

     3

% ***** Dado que el rango de M es 3, el sistema es de estado
% completamente controlable. Por tanto, es posible
% la ubicación arbitraria de los polos *****

% *****Obtenga el polinomio característico deseado
% definiendo la matriz J siguiente e introduciendo
% el enunciado poly(J) *****
```

```
J =  [-2+2*sqrt(3)*i        0        0
          0      -2-2*sqrt(3)*i     0
          0                 0      -10];

poly(J)

ans =

    1.0000   14.0000   56.0000  160.0000

%***** Calcule el polinomio característico Phi
% = polyvalm(poly(J),A) *****
Phi = polyvalm(poly(J),A);
%***** La matriz de ganancias de realimentación del estado K se obtiene mediante *****
K = [0  0  1]*inv(M)*Phi
K =

   15.4000   4.5000   0.8000
```

A-12-7. Considere un sistema completamente observable

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$
$$y = cx$$

Defina la matriz de observabilidad como N:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \mid \cdots \mid (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]$$

Demuestre que

$$\mathbf{N}^*\mathbf{A}(\mathbf{N}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \tag{12-143}$$

en donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los coeficientes del polinomio característico

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n$$

Solución. Consideremos el caso en donde $n = 3$. La ecuación (12-143) se escribe como

$$\mathbf{N}^*\mathbf{A}(\mathbf{N}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \tag{12-144}$$

La ecuación (12-144) puede reescribirse como

$$\mathbf{N}^*\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{N}^* \tag{12-145}$$

Demostraremos que la ecuación (12− 145) es válida. El primer miembro de la ecuación (12-145) es

$$N^*A = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} \tag{12-146}$$

El segundo miembro de la ecuación (12-145) es

$$\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} N^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ -a_3C \quad a_2CA - a_1CA^2 \end{bmatrix} \tag{12-147}$$

El teorema de Cayley-Hamilton plantea que la matriz A satisface su propia ecuación característica,

$$A^3 + a_1A^2 + a_2A + a_3I = 0$$

Por tanto,

$$-a_1CA^2 - a_2CA - a_3C = CA^3$$

Así, el segundo miembro de la ecuación (12-147) se vuelve igual al segundo miembro de la ecuación (12-146). En consecuencia,

$$N^*A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} N^*$$

que es la ecuación (12-145). Esta última ecuación se modifica a

$$N^*A(N^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & & \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

La obtención presentada aquí se extiende al caso general de cualquier entero positivo *n.*

A-12-8. Considere un sistema completamente observable definido mediante

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{12-148}$$

$$y = cx + Du \tag{12-149}$$

Defina

$$N = [C^* \mid A^*C^* \mid \cdots \mid (A^*)^{n-1}C^*]$$

Y

$$W = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ & & & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

en donde las a son coeficientes del polinomio característico

$$|s\mathbf{I} - \mathrm{Al} = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

Defina también

$$Q = (\mathbf{WN}^*)^{-1}$$

Demuestre que

$$Q\text{-}'AQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$CQ = [0 \quad 0 \cdots 0 \quad 1]$$

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \\ \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}$$

en donde las b_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ son aquellos coeficientes que aparecen en el numerador de la función de transferencia cuando $\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ B + D se escribe del modo siguiente:

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

en donde $D = b_0$.

Solución. Consideremos el caso en el que n = 3. Demostraremos que

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = (\mathbf{WN}^*)\mathbf{A}(\mathbf{WN}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \tag{12-150}$$

Observe que, remitiéndonos al problema A-12-7, tenemos que

$$(\mathbf{WN}^*)\mathbf{A}(\mathbf{WN}^*)^{-1} = \mathbf{W}[\mathbf{N}^*\mathbf{A}(\mathbf{N}^*)^{-1}]\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}\mathbf{W}^{-1}$$

Por tanto, necesitamos demostrar que

$$\mathbf{W}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}\mathbf{W}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

o bien

$$\mathbf{W}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}\mathbf{W} \tag{12-151}$$

El primer miembro de la ecuación (12-151) es

$$\mathbf{W}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El segundo miembro de la ecuación (12-151) es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Así, vemos que la ecuación (12-151) es válida. Por tanto, hemos comprobado la ecuación (12-150).

A continuación demostraremos que

$$\mathbf{CQ} = [0 \quad 0 \quad 1]$$

o bien

$$\mathbf{C}(\mathbf{WN}^*)^{-1} = [0 \quad 0 \quad 1]$$

Observe que

$$[0 \quad 0 \quad 1](\mathbf{WN}^*) = [0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}$$

Por tanto, hemos demostrado que

$$[0 \quad 0 \quad 1] = \mathbf{C}(\mathbf{WN}^*)^{-1} = \mathbf{CQ}$$

A continuación defina

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}$$

Entonces, la ecuación (12-148) se vuelve

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}u \tag{12-152}$$

y la ecuación (12-149) se convierte en

$$y = \mathbf{C}\mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}} + Du \tag{12-153}$$

Para el caso de $n = 3$, la ecuación (12-152) se vuelve

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} u$$

en donde

$$\begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}$$

La función de transferencia $G(s)$ para el sistema definido mediante las ecuaciones (12-152) y 12-153) es

$$G(s) = \mathbf{CQ}(s\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ})^{-1}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B} + D$$

Considerando que

$$CQ = [0 \quad 0 \quad 1]$$

tenemos que

$$G(s) = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} s & 0 & a_3 \\ -1 & s & a_2 \\ 0 & -1 & s + a_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} + D$$

Observe que $D = b_0$. Dado que

$$\begin{bmatrix} s & 0 & a_3 \\ -1 & s & a_2 \\ 0 & -1 & s + a_1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} \begin{vmatrix} s^2 + a_1 s + a_2 & -a_3 & -a_3 s \\ s + a_1 & s^2 + a_1 s & -a_2 s - a_3 \\ 1 & s & s^2 \end{vmatrix}$$

tenemos que

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} [1 \quad s \quad s^2] \begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} + D$$

$$= \frac{\gamma_1 s^2 + \gamma_2 s + \gamma_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} + b_0$$

$$= \frac{b_0 s^3 + (\gamma_1 + a_1 b_0) s^2 + (\gamma_2 + a_2 b_0) s + \gamma_3 + a_3 b_0}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

$$= \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

Por tanto,

$$\gamma_1 = b_1 - a_1 b_0, \qquad \gamma_2 = b_2 - a_2 b_0, \qquad \gamma_3 = b_3 - a_3 b_0$$

Así, hemos demostrado que

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_3 - a_3 b_0 \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}$$

Observe que lo que hemos obtenido aquí se extiende fácilmente al caso en el que n es cualquier entero positivo.

A-12-9. Considere un sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 1]$$

El rango de la matriz de observabilidad N,

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}^* \quad \mathbf{A}^*\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

es 2. Por tanto, el sistema es completamente observable. Transforme las ecuaciones del sistema a la forma canónica observable.

Solución. Dado que

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^2 + 2s + 1 = s^2 + a_1 s + a_2$$

tenemos que

$$a_1 = 2, \qquad a_2 = 1$$

Defina

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{W}\mathbf{N}^*)^{-1}$$

en donde

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Así,

$$\mathbf{Q} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \right\}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Defina

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}$$

Entonces, la ecuación de estado se vuelve

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}u$$

o

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u \qquad (12\text{-}154)$$

La ecuación de salida se vuelve

$$y = CQX$$

o bien

$$y = [1 \quad 1]\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} \tag{12-155}$$

Las ecuaciones (12-154) y (12-155) están en la forma canónica observable.

A-12-10. Para el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = cx$$

considere el problema de diseñar un observador de estado tal que los valores característicos deseados para la matriz de ganancias del observador sean $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$.

Demuestre que la matriz de ganancias del observador obtenida mediante la ecuación (12−50), reescrita como

$$\mathbf{K}_e = (\mathbf{W}\mathbf{N}^*)^{-1}\begin{vmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_1 - a_1 \end{vmatrix} \tag{12-156}$$

se obtiene a partir de la ecuación (12-13) considerando el problema dual. Es decir, la matriz $\mathbf{K}_e$ se determina considerando el problema de ubicación de polos para el sistema dual, obteniendo la matriz de ganancias de realimentación del estado K y tomando su transpuesta conjugada o $\mathbf{K}_e = \mathrm{K}^*$.

Solución. La dual del sistema obtenido es

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^*\mathbf{z} + \mathbf{C}^*v \tag{12-157}$$
$$n = \mathbf{B}^*\mathbf{z}$$

Usando: el control mediante la realimentación del estado

$$v = -\mathbf{K}\mathbf{z}$$

la ecuación (12-157) se vuelve

$$\dot{\mathbf{z}} = (\mathrm{A}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{K})\mathbf{z}$$

La ecuación (12−13), reescrita aquí, es

$$\mathrm{K} = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} \quad a_{n-1} \mid \cdots \mid \alpha_2 \quad a_2 \mid \alpha_1 - a_1]\,\mathbf{T}^{-1} \tag{12-158}$$

en donde

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}\mathbf{W} = [\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \quad \cdots \quad (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]\mathbf{W}$$

Remitiéndonos a la ecuación (12−35),

$$[\mathbf{C}^* \quad \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \quad \cdots \mid (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*] = \mathbf{N}$$

Por tanto,

$$\mathrm{T} = \mathrm{N}\,\mathrm{W}$$

Dado que W = W*, tenemos que

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{W}^*\mathbf{N}^* = \mathbf{W}\mathbf{N}^*$$

Y

$$(\mathbf{T}^*)^{-1} = (\mathbf{WN}^*)^{-1}$$

Tomando la transpuesta conjugada de ambos miembros de la ecuación (12−158), tenemos que

$$\mathbf{K}^* = (\mathbf{T}^{-1})^* \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = (\mathbf{T}^*)^{-} \begin{vmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \\ \\ \\ \alpha_1 - a_1 \end{vmatrix} = (\mathbf{WN}^*)^{-} \begin{vmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-} \\ \\ \\ \\ \alpha_1 - a_1 \end{vmatrix}$$

El segundo miembro de esta última ecuación es igual al segundo miembro de la ecuación (12-156). Por tanto, tenemos que $\mathbf{K}_e = \mathbf{K}^*$

A-12-11. Considere el sistema con un doble integrador

$$\ddot{y} = u$$

Defina $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$. Entoncg, las ecuaciones de estado y de salida se convierten en

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Diseñe un observador de estado tal que los valores característicos de la matriz de ganancias del observador sean

$$\mu_1 = -2 + j2\sqrt{3}, \qquad \mu_2 = -2 - j2\sqrt{3}$$

Solución. El rango de la matriz de observabilidad para este sistema

$$N = [C^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es 2. Por tanto, es posible diseñar un observador de estado con una matriz de ganancias del observador arbitraria. La ecuación característica para el sistema es

$$\left| s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{vmatrix} = s^2 = s^2 + a_1 s + a_2 = 0$$

Por tanto,

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = 0$$

La ecuación característica deseada para el observador es

$$\begin{aligned} (s - \mu_1)(s - \mu_2) &= (s + 2 - j2\sqrt{3})(s + 2 + j2\sqrt{3}) \\ &= s^2 + 4s + 16 \\ &= s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

Así,

$$\alpha_1 = 4, \qquad \alpha_2 = 16$$

Remitiéndonos a la ecuación (12−50), tenemos que

$$\mathbf{K}_e = (\mathbf{WN}^*)^{-1}\begin{bmatrix}\alpha_2 - a_2\\ \alpha_1 - a_1\end{bmatrix}$$

en donde N se obtuvo antes como

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Y

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix}a_1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$\mathbf{K}_e = \left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix}16 - 0\\ 4 - 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16\\ 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\ 16\end{bmatrix}$$

El observador de estado se obtiene mediante

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + K_e y$$

o bien

$$\begin{bmatrix}\dot{\tilde{x}}_1\\ \dot{\tilde{x}}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4 & 1\\ -16 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}4\\ 16\end{bmatrix}y$$

A-12-12. Considere el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{Cx}$$

en donde

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, \qquad c = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Se quiere diseñar un observador de orden completo. Determine la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ usando (a) el método de sustitución directa y (b) la fórmula de Ackermann. Suponga que los valores característicos deseados de la matriz de ganancias del observador son

$$\mu_1 = -2 + j2\sqrt{3}, \qquad \mu_2 = -2 - j2\sqrt{3}, \qquad \mu_3 = -5$$

Solución. Dado que el rango de

$$N = [C^* \quad A^*C^* \quad (\mathbf{A}^*)^2\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

es 3, el sistema es completamente observable. Por tanto, es posible el diseño de un observador de estado.

(a) Defina la matriz de ganancias del observador como $\mathbf{K}_e$. En este caso, $\mathbf{K}_e$ se escribe como

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \\ k_{e3} \end{bmatrix}$$

El polinomio característico para el sistema observador es

$$|s\mathbf{I} - \mathrm{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| = \left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \\ k_{e3} \end{bmatrix} [1 \quad 0 \quad 0] \right|$$

$$= \begin{vmatrix} s + k_{e1} & -1 & 0 \\ k_{e2} & s & -1 \\ k_{e3} + 6 & 11 & s + 6 \end{vmatrix}$$

$$= s^3 + (k_{e1} + 6)s^2 + (6k_{e1} + k_{e2} + 11)s + 11k_{e1} + 6k_{e2} + k_{e3} + 6 \tag{12-159}$$

El polinomio característico deseado es

$$(s + \mu_1)(s + \mu_2)(s + \mu_3) = (s + 2 - j3.464)(s + 2 + j3.464)(s + 5)$$

$$= s^3 + 9s^2 + 36s + 80 \tag{12-160}$$

Igualando los coeficientes de las potencias iguales de s en las ecuaciones (12-159) y (12−160), obtenemos

$$k_{e1} + 6 = 9$$

$$6k_{e1} + k_{e2} + 11 = 36$$

$$11k_{e1} + 6k_{e2} + k_{e3} + 6 = 80$$

a partir de lo cual llegamos a

$$k_{e1} = 3, \qquad k_{e2} = 7, \qquad k_{e3} = -1$$

Por tanto,

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(b) A continuación obtendremos la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ con la fórmula de Ackermann. Remitiéndonos a la ecuación (12−155), tenemos que

$$\mathbf{K}_e = \phi(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dado que el polinomio característico deseado es

$$\phi(s) = s^3 + 9s^2 + 36s + 80$$

tenemos que

$$\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 + 9\mathbf{A}^2 + 36\mathrm{A} + 801$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}^3 + 9 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

$$+ 36\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} + 80\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 74 & 25 & 3 \\ -42 & -95 & -1 \\ -18 & 41 & 7 \end{bmatrix}$$

Asimismo,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 74 & 25 & 3 \\ -18 & 41 & 7 \\ -42 & -95 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A-U-W. Considere un sistema de control mediante la realimentación del estado observado con un observador de orden mínimo descrito mediante las ecuaciones siguientes:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathrm{Bu} \tag{12-161}$$

$$y = cx$$

$$u = -\mathbf{K}\tilde{x} \tag{12-162}$$

en donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_a \\ \hline \mathbf{x}_b \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_a \\ \hline \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix}$$

(x. es la variable de estado que se mide directamente y $\tilde{\mathbf{x}}_b$ corresponde a las variables del estado observado.)

Demuestre que los polos en lazo cerrado del sistema comprenden los polos en lazo cerrado producidos por la ubicación de los polos [los valores características de la matriz (A − BK)] y los polos en lazo cerrado producidos por el observador de orden mínimo [los valores característicos de la matriz $(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})$].

Solución. La ecuación de error para el observador de orden mínimo se obtiene a partir de la ecuación (12−82), que, entonces, puede reescribirse como:

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A}_{bb} \quad \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\mathbf{e} \tag{12-163}$$

en donde

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_b - \tilde{\mathbf{x}}_b$$

A partir de las ecuaciones (12-161) y (12−162), obtenemos

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} - \mathbf{BK}\begin{bmatrix} x_a \\ \hline \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \mathbf{Ax} - \mathbf{BK}\begin{bmatrix} x_a \\ \hline \mathbf{x}_b - \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{Ax} - \mathbf{BK}\left\{\boldsymbol{x} - \begin{bmatrix}0\\ \hline \mathbf{e}\end{bmatrix}\right\} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{BK}\begin{bmatrix}0\\ \hline \mathbf{e}\end{bmatrix} \tag{12-164}$$

Si combinamos las ecuaciones (12-163) y (12-164) y escribimos

$$\mathrm{K} = [\mathbf{K}_a \quad \mathbf{K}_b]$$

obtenemos

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}\\ \dot{\mathbf{e}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{A} - \mathrm{BK} & \mathbf{BK}_b\\ 0 & \mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{e}\end{bmatrix} \tag{12-165}$$

La ecuación (12-165) describe la dinámica del sistema de control mediante la realimentación del estado observado con un observador de orden mínimo. La ecuación característica para este sistema es

$$\begin{vmatrix}s\mathbf{I} & \mathrm{A} + \mathrm{BK} & -\mathbf{BK}_b\\ & 0 & s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb} + \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab}\end{vmatrix} = 0$$

o bien

$$|s\mathbf{I} - \mathrm{A} + \mathbf{BK}|\,|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb} + \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab}| = 0$$

Los polos en lazo cerrado del sistema de control mediante la realimentación del estado observado con un observador de orden mínimo consisten en los polos en lazo cerrado producidos por la ubicación de polos y los polos en lazo cerrado producidos por el observador de orden mínimo. (Por tanto, el diseño mediante ubicación de polos y el diseño del observador de orden mínimo son independientes uno del otro.)

A-12-14. Considere el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathrm{Ax} + \mathrm{Bu}$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{cx}$$

en donde

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|cc}0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{array}\right], \qquad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c}0\\ \hline 0\\ 1\end{array}\right], \qquad \mathbf{C} = \left[1 \;\middle|\; 0 \quad 0\right]$$

Suponga que la variable de estado x_1 (que es igual a y) es medible y que no necesita observarse. Determine la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ para el observador de orden mínimo. Los valores característicos deseados son

$$\mu_1 = -2 + j2\sqrt{3}, \qquad \mu_2 = -2 - j2\sqrt{3}$$

Solución. A partir de la matriz particionada, tenemos

$$A_{aa} = 0, \qquad \mathbf{A}_{ab} = [1 \quad 0]$$

$$\mathbf{A}_{ba} = \begin{bmatrix}0\\ -6\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_{bb} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -11 & -6\end{bmatrix}$$

$$B_a = 0, \qquad \mathbf{B}_b = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

El polinomio característico para la parte no observada del sistema es

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb}| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 11 & s+6 \end{vmatrix} = s^2 + 6s + 11 = s^2 + \hat{a}_1 s + \hat{a}_2$$

Entonces,

$$\hat{a}_1 = 6, \qquad \hat{a}_2 = 11$$

Observe que

$$\hat{\mathbf{N}} = [\mathbf{A}_{ab}^* \;\vdots\; \mathbf{A}_{bb}^* \mathbf{A}_{ab}^*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$\hat{\mathbf{Q}} = (\hat{\mathbf{W}}\hat{\mathbf{N}}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico deseado para el observador de orden mínimo es

$$(s + \mu_1)(s + \mu_2) = (s + 2 - j2\sqrt{3})(s + 2 + j2\sqrt{3})$$
$$= s^2 + 4s + 16 = s^2 + \hat{\alpha}_1 s + \hat{\alpha}_2$$

Así,

$$\hat{\alpha}_1 = 4, \qquad \hat{\alpha}_2 = 16$$

Remitiéndonos a la ecuación (12−84), tenemos que

$$\mathbf{K}_e = \hat{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_2 - \hat{a}_2 \\ \hat{\alpha}_1 - \hat{a}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 - 11 \\ 4 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Por supuesto, la matriz $\mathbf{K}_e$ determinada aquí es igual a la obtenida mediante la fórmula de Ackermann (véase el ejemplo 12-4).

A-12-15. Considere un sistema de estado completamente controlable definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{12-166}$$
$$y = cx$$

en donde x = vector de estado (vector de dimensión n)
u = señal de control (escalar)
y = señal de salida (escalar)
A = matriz de coeficientes constantes n X n
B = matriz de coeficientes constantes n X 1
C = matriz de coeficientes constantes 1 X n

Suponga que el rango de la matriz de $(n + 1)$ X $(n + 1)$ siguiente

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

es $n + 1$. Demuestre que el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{e} + \hat{\mathbf{B}}u_e \tag{12-167}$$

en donde

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \qquad u_e = u(t) - u(\infty)$$

es de estado completamente controlable.

Solución. Defina

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

Debido a que el sistema obtenido mediante la ecuación (12-166) es de estado completamente controlable, el rango de la matriz M es n. Entonces el rango de

$$\begin{bmatrix} \mathrm{M} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es n + 1. Considere la ecuación siguiente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{AM} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{CM} & 0 \end{bmatrix} \tag{12-168}$$

Dado que la matriz

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ -\mathrm{c} & 0 \end{bmatrix}$$

es de rango n + 1, el primer miembro de la ecuación (12-168) es de rango n + 1. Por tanto, el segundo miembro de la ecuación (12-168) también es de rango n + 1. Dado que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{AM} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{CM} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}[\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C}[\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^n\mathbf{B} & \mathrm{B} \\ -\mathbf{CB} & -\mathbf{CAB} & \cdots & -\mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} \quad \hat{\mathbf{A}}^2\hat{\mathbf{B}} \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{A}}^n\hat{\mathbf{B}} \quad \hat{\mathbf{B}}]$$

encontramos que el rango de

$$[\hat{\mathbf{B}} \quad \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} \quad \hat{\mathbf{A}}^2\hat{\mathbf{B}} \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{A}}^n\hat{\mathbf{B}}]$$

es n + 1. Por tanto, el sistema definido mediante la ecuación (12-167) es de estado completamente controlable.

A-12-16. Considere el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u$$

$$y = cx$$

en donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}, \qquad c = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Diseñe un observador de estado de orden completo, suponiendo que la configuración del sistema es idéntica a la que aparece en la figura 12-5. Suponga que los valores característicos deseados de la matriz del observador son

$$\mu_1 = -2 + j2\sqrt{3}, \qquad \mu_2 = -2 - j2\sqrt{3}, \qquad \mu_3 = -5$$

Solución. Examinemos la matriz de observabilidad. El rango de

$$N = [C^* \quad A^*C^* \quad (A^*)^2C^*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es 3. Por tanto, el sistema es completamente observable y es posible la determinación de la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$.

Dado que la ecuación característica del sistema obtenido es

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 11 & s+6 \end{vmatrix}$$

$$= s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

$$= s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 = 0$$

tenemos que

$$a_1 = 6, \qquad a_2 = 11, \qquad a_3 = 6$$

La ecuación característica deseada es

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3) = (s + 2 - j2\sqrt{3})(s + 2 + j2\sqrt{3})(s + 5)$$

$$= s^3 + 9s^2 + 36s + 80$$

$$= s^3 + \alpha_1s^2 + \alpha_2s + \alpha_3 = 0$$

Por tanto,

$$\alpha_1 = 9, \qquad \alpha_2 = 36, \qquad \alpha_3 = 80$$

Resolveremos este problema usando la ecuación (12-50):

$$\mathbf{K}_e = (\mathbf{WN}^*)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_3 - a_3 \\ \alpha_2 - a_2 \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

Considerando que

$$\mathbf{N}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tenemos que

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{WN}^*)^{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} 11 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 25 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así,

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 - 6 \\ 36 - 11 \\ 9 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Remitiéndonos a la ecuación (12−51), el observador de estado de orden completo se obtiene mediante

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (A - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + Bu + \mathbf{K}_e y$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \\ -5 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} y$$

El diseño del observador de orden completo con MATLAB es sencillo. El programa MATLAB 12−14 produce la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$. Este programa usa la fórmula de Ackermann.

Programa MATLAB 12–14

```
% --------- Diseño de un observador de estado de orden completo ---------

% ***** Este programa determina la matriz de ganancias del observador Ke
% con base en la fórmula de Ackermann *****

% ***** Introduzca las matrices A y C *****

A = [0    1    0
     0    0    1
    -6  -11   -6];
C = [1    0    0];

% ***** Introduzca la matriz de observabilidad N y verifique su rango *****

N = [C'    A'*C'    (A')^2*C'];
rank(N)

ans =

     3

% ***** Dado que el rango de la matriz de observabilidad es 3,
% es posible el diseño del observador *****

% ***** Introduzca el polinomio característico deseado definiendo
% la matriz J siguiente e introduciendo el enunciado poly(J) *****

J = [-2+2*sqrt(3)*i          0          0
          0       -2-2*sqrt(3)*i        0
          0                    0       -5];

JJ = poly(J)

JJ =

   1.0000    9.0000   36.0000   80.0000
```

```
% **** Introduzca el polinomio característico Phi *****

Phi = polyvalm(poly(J),A);

% **** La matriz de ganancias del observador Ke se obtiene a partir de *****

Ke = Phi*(inv(N'))*[0;0;1]

Ke =
    3.0000
    7.0000
   -1.0000
```

A-12-17. Considere el mismo sistema de control del péndulo invertido considerado en la sección 12-7. Diseñe una matriz de ganancias de realimentación del estado K, en donde $K = [k_1\ k_2\ k_3\ k_4]$ y una constante de ganancia integral k_I. Suponga que los polos en lazo cerrado deseados para el sistema son

$$\mu_1 = -2.5 + j2.5, \qquad \mu_2 = -2.5 - j2.5$$
$$\mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = -10$$

Use MATLAB para determinar K y k_I. Asimismo obtenga las curvas de respuesta escalón cuando se aplica una entrada escalón unitario a la posición del carro.

Solución. El programa MATLAB 12-15 sirve para determinar K y k_I. Las curvas de respuesta x_1 contra t, x_2 contra t, x_3 contra t, x_4 contra t y x_5 contra t aparecen en la figura 12-20.

Programa MATLAB 12–15

```
% --------- Diseño de un sistema de seguimiento de tipo 1 ---------

% ***** En este programa usamos la fórmula de Ackermann para
% la ubicación de los polos *****

A = [0  1  0  0;20.601  0  0  0;0  0  0  1;-0.4905  0  0  0];
B = [0;-1;0;0.5];
C = [0  0  1  0];
D = [0];
A1 = [A  zeros(4,1);-C  0];
B1 = [B;0];
M = [B1  A1*B1  A1^2*B1  A1^3*B1  A1^4*B1];
rank(M)

ans =

     5

J = [-2.5+2.5*i  0  0  0  0;0  -2.5-2.5*i  0  0  0;0  0  -10  0
0;0  0  0  -10  0;0  0  0  0  -10];
```

```
]] = poly(0
]] =
   1.0e + 004*
    0.0001   0.0035   0.0462   0.2875   0.8750   1.2500

Phi = polyvalm(poly(0),A1);
KK = [0  0  0  0  1]*(inv(M))*Phi

KK =

   1.0e + 003 *
   -0.9291   -0.2140   -0.8919   -0.3580   1.2742

K = [KK(1)  KK(2)  KK(3)  KK(4)];  kl = KK(5);
AA = [A - B*K  B*Kl; -C  0];
BB = [0;0;0;0;1];
CC = [C  0];
DD = 0;
[y,x,t] = step(AA,BB,CC,DD);
plot(t,y)

x1 = [1  0  0  0  0]*x';
x2 = [0  1  0  0  0]*x';
x3 = [0  0  1  0  0]*x';
x4 = [0  0  0  1  0]*x';
x5 = [0  0  0  0  1]*x';

subplot(3,2,1);
plot(t,x1); grid
title('x1(Theta) contra el tiempo')
xlabel('Tiempo (seg)')
ylabel('x1')

subplot(3,2,2);
plot(t,x2); grid
title('x2 (Punto Theta) contra el tiempo')
xlabel('Tiempo (seg)')
ylabel('x2')

subplot(3,2,3);
plot(t,x3); grid
title('x3 (Posición del carro) contra el tiempo')
xlabel('Tiempo (seg)')
ylabel('x3')

subplot(3,2,4);
plot(t,x4); grid
title('x4 (Velocidad del carro) contra el tiempo')
xlabel('Tiempo (seg)')
ylabel('x4')
```

```
subplot(3,2,5);
plot(t,x5); grid
title('x5 (salida del integrador) contra el tiempo')
xlabel('Tiempo (seg)')
ylabel('x5')
```

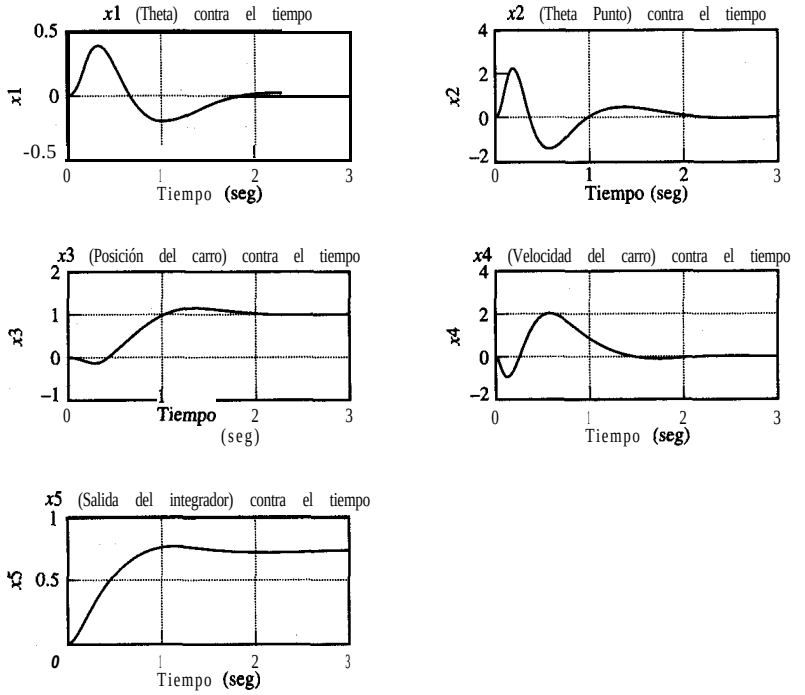


Figura 12–20
Curvas x_1 contra t, x_2 contra t, x_3 contra t, x_4 contra t, y x_5 contra t.

PROBLEMAS

B-12-1. Considere el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = c\ x$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C=[1 \quad 1 \quad 0]$$

Transforme la ecuación del sistema en (a) la forma canónica controlable y (b) la forma canónica observable.

B-12-2. Considere el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = cx$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C=[1 \quad 1 \quad 1]$$

Transforme las ecuaciones del sistema a la forma canónica observable.

B-12-3. Considere el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Usando el control mediante la realimentación del estado $u = -\mathbf{K}x$, se quiere tener los polos en lazo cerrado en $s = -2 \pm j4$, $s = -10$. Determine la matriz de ganancias de realimentación del estado **K.**

B-12-4. Resuelva el problema B-12-3 con MATLAB.

B-12-5. Considere el sistema definido mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Demuestre que este sistema no puede estabilizarse mediante el control de la realimentación del estado $u = -\mathbf{K}x$ sin importar la matriz **K** que se elija.

B-12-6. Un sistema regulador tiene una planta

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

Defina las variables de estado como

$$x_1 = Y$$
$$x_2 = \dot{x}_1$$
$$x_3 = \dot{x}_2$$

Usando el control mediante la realimentación del estado $u = -\mathbf{K}x$ se quiere ubicar los polos en lazo cerrado en $s = \mu_i$ $(i = 1, 2, 3)$, en donde

$$\mu_1 = -2 + j2\sqrt{3}, \qquad \mu_2 = -2 - j2\sqrt{3}, \qquad \mu_3 = -10$$

Determine la matriz de ganancias de realimentación del estado **K** necesaria.

B-12-7. Resuelva el problema B-12-6 con MATLAB.

B-12-8. Considere el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

Diseñe un observador de estado de orden completo. Los valores característicos deseados para la matriz del observador son $\mu_1 = -5$, $\mu_2 = -5$.

B-12-9. Considere el sistema definido en el problema B-12-8. Suponiendo que la salida y se puede medir con precisión, diseñe un observador de orden mínimo. El valor característico deseado para la matriz del observador es $\mu = -5$; es decir, la ecuación característica deseada para el observador de orden mínimo es

$$s + 5 = 0$$

B-12-10. Considere el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -6 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Diseñe un observador de estado de orden completo suponiendo que la configuración del sistema es idéntica ala que aparece en la figura 12-5. Los valores característicos deseados del observador son

$$\mu_1 = -10, \qquad \mu_2 = -10, \qquad \mu_3 = -15$$

B-12-11. Considere un sistema definido mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1.244 & 0.3956 & -3.145 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.24 \end{bmatrix} u$$

$$Y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Dado el conjunto de valores característicos deseados de la matriz de ganancias del observador

$$\mu_1 = -5 + j5\sqrt{3}, \qquad \mu_2 = 5 - j5\sqrt{3}, \qquad \mu_3 = -10$$

diseñe un observador de estado de orden completo.

B-12-12. Considere el mismo sistema que aparece en el problema B-12-11. Diseñe un observador de orden mínimo suponiendo que la salida y se puede medir con precisión. Seleccione los valores característicos deseados del observador de orden mínimo para que sean

$$\mu_1 = -5 + j5\sqrt{3}, \qquad \mu_2 = -5 - j5\sqrt{3}$$

B-12-13. Considere el sistema de seguimiento de tipo 1 de la figura 12-21. Las matrices **A, B** y C de la figura 12-21 se obtienen mediante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad c = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Determine las constantes de ganancias de realimentación k_1, k_2 y k_3, tales que los polos en lazo cerrado se ubiquen en $s = -2 \pm j4, s = -10$.

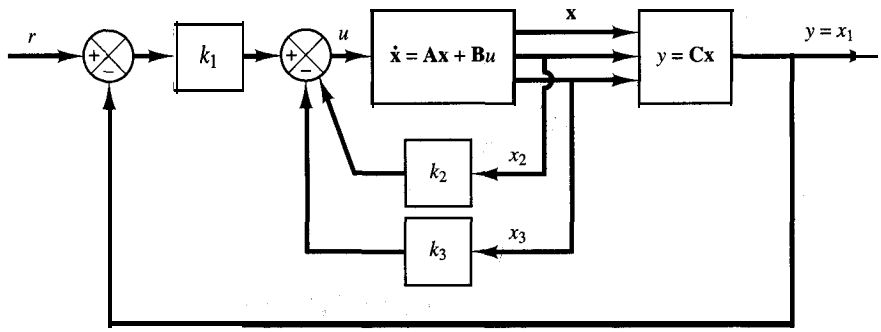


Figura 12–21
Sistema de seguimiento de tipo 1.

Simule en la computadora el sistema diseñado. Obtenga una solución en computadora para la respuesta escalón unitario y grafique la curva y(t) contra t.

B-12-14. Considere el sistema del péndulo invertido analizado en la sección 12-4. Remítase al diagrama esquemático de la figura 12-2, y suponga que

$$M = 2\ \text{kg}, \qquad m = 0.5\ \text{kg}, \qquad l = 1\text{m}$$

Defina las variables de estado como

$$x_1 = e, \qquad x_2 = \theta, \qquad x_3 = x, \qquad x_4 = \dot{x}$$

y las variables de salida como

$$y_1 = e = x_1, \qquad y_2 = x = x_3$$

Obtenga las ecuaciones en el espacio de estados para este sistema.

Se quiere tener polos en lazo cerrado en $s = \mu_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, en donde

$$\mu_1 = -4 + j4, \qquad \mu_2 = -4 - j4, \qquad \mu_3 = -20, \qquad \mu_4 = -20$$

Determine la matriz de ganancias de realimentación del estado **K.**

Usando la matriz de ganancias de realimentación del estado **K** determinada de este modo, examine el desempeño del sistema mediante una simulación en computadora. Escriba un programa MATLAB para obtener la respuesta del sistema ante condiciones iniciales arbitrarias. Obtenga las curvas de respuesta $x_1(t)$ contra t, $x_2(t)$ contra t, $x_3(t)$ contra t y $x_4(t)$ contra t para el siguiente conjunto de condiciones iniciales:

$$x_1(0) = 0, \qquad x_2(0) = 0, \qquad x_4(0) = 1\ \text{m/s}$$

B-12-15. Considere el sistema del péndulo invertido analizado en la sección 12-4. Suponga que los valores numéricos para m, M y l son iguales a los usados en la sección 12-4. Definiendo las variables de estado para el sistema como

$$x_1 = e, \qquad x_2 = \theta, \qquad x3 = x, \qquad x_4 = \dot{x}$$

obtenga las ecuaciones en el espacio de estados para el sistema.

Suponga que usa un control mediante la realimentación del estado $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, y diseñe un sistema de control estable. Para los polos en lazo cerrado deseados, considere los dos casos siguientes:

Caso 1: $\mu_1 = -1.3 + j, \qquad \mu_2 = -1.3 - j,$
$\mu_3 = -20, \qquad \mu_4 = -20$

Caso 2: $\mu_1 = -2, \qquad \mu_2 = -2, \qquad \mu_3 = -10, \qquad \mu_4 = -10$

Determine la matriz de ganancias de realimentación del estado **K** para ambos casos. Asimismo, obtenga la respuesta del sjstema diseñado ante la condición inicial $[\theta(0) = 0.1$ rad, $\theta(0) = 0, x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 0]$. Compare las respuestas de los dos sistemas.

B-12-16. Considere el mismo sistema de control del péndulo invertido analizado en la sección 12-7. Diseñe la matriz de ganancias de realimentación del estado **K,** en donde $\mathbf{K} = [k_1\ k_2\ k_3\ k_4]$ y la constante de ganancia integral k_I. Suponga que los polos en lazo cerrado deseados para el sistema son

$$\mu_1 = -2 \qquad \mu_2 = -2 \qquad \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = -10$$

Usando MATLAB, determine las constantes de ganancias de **K** y la constante de ganancia integral k_I. Asimismo obtenga las curvas de respuesta escalón cuando se aplica una entrada escalón unitario a la posición del carro.

Análisis de estabilidad de Liapunov y control óptimo cuadrático

13-1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo se centra primero en el análisis de estabilidad de Liapunov y después presenta los sistemas de control óptimo cuadrático. Se utiliza el método de estabilidad de Liapunov a fin de asentar la base para el diseño de sistemas de control óptimo cuadrático.

Existen muchos enfoques para el análisis de la estabilidad de los sistemas de control lineales e invariantes con el tiempo. Sin embargo, para los sistemas no lineales y/o los sistemas variantes con el tiempo, el análisis de estabilidad resulta muy difícil o imposible. El análisis de estabilidad de Liapunov es un método que se aplica para encontrar respuestas a las preguntas sobre la estabilidad de los sistemas no lineales.

Aunque el análisis de estabilidad de Liapunov es muy útil y poderoso para abordar los problemas de estabilidad de los sistemas no lineales, no es sencillo determinar la estabilidad de muchos sistemas no lineales. El ingenio y la experiencia son muy importantes para resolver problemas no lineales. En este capítulo, el análisis de estabilidad de los sistemas no lineales se limita a algunos casos simples.

Panorama del capítulo. La sección 13-1 presentó el material introductorio. La sección 13-2 presenta los teoremas de estabilidad de Liapunov y los aplica al análisis de estabilidad de los sistemas no lineales. La sección 13-3 estudia el análisis de estabilidad de Liapunov de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo. La sección 134 trata los sistemas de control con modelo de referencia; primero se formulan las condiciones para la estabilidad de Liapunov y después se diseña el sistema dentro de estas limitaciones. La sección 13-5 aborda los sistemas de control óptimo cuadrático; en ella se obtienen condiciones para el control óptimo cuadrático usando las ecuaciones de estabilidad de Liapunov.

Por último la sección 13-6 proporciona las soluciones de MATLAB para los problemas de control óptimo cuadrático.

13-2 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE LIAPUNOV

En un sistema de control determinado, por lo general, el aspecto cuya determinación es más importante es la estabilidad. Si el sistema es lineal e invariante con el tiempo, existen muchos criterios de estabilidad. Entre ellos están el criterio de estabilidad de Nyquist y el criterio de estabilidad de Routh. Sin embargo, si el sistema es no lineal o lineal pero variante con el tiempo, tales criterios de estabilidad no se aplican.

El segundo método de Liapunov (también es conocido como método directo de Liapunov) que se va a presentar en esta sección es el método más general para la determinación de la estabilidad de los sistemas no lineales y/o variantes con el tiempo. Por supuesto, este método se aplica a la determinación de la estabilidad de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo. Además, el segundo método es útil para resolver problemas de control óptimo cuadrático. (Véase la sección 13-5.)

A continuación presentaremos el material preliminar, que incluye las definiciones de diversos tipos de estabilidad de sistemas y el concepto de la definidad de las funciones escalares. Después presentaremos el teorema principal de la estabilidad del segundo método e introduciremos la función de Liapunov. La sección 13-3 contiene un análisis de la aplicación del segundo método de Liapunov en el análisis de la estabilidad de sistemas lineales variantes con el tiempo.

Segundo método de Liapunov. En 1892,A. M. Liapunov presentó dos métodos (llamados el primero y el segundo) para determinar la estabilidad de los sistemas dinámicos descritos mediante ecuaciones diferenciales ordinarias.

El primer método se compone de todos los procedimientos en los cuales se usa la forma explícita de la solución de las ecuaciones diferenciales para el análisis.

En cambio, el segundo método no requiere de las soluciones de las ecuaciones diferenciales. Es decir, mediante el segundo método de Liapunov, se determina la estabilidad de un sistema sin resolver las ecuaciones de estado. Esto ofrece una gran ventaja porque, por lo general, es muy difícil despejar las ecuaciones de estado no lineales y/o variantes con el tiempo.

Aunque el segundo método de Liapunov, cuando se aplica al análisis de estabilidad de los sistemas no lineales, requiere de mucha experiencia e ingenio, contesta a la pregunta de la estabilidad de los sistemas no lineales cuando otros métodos fracasan.

Sistema. El sistema que consideramos se define mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = f(x, t) \tag{13-1}$$

en donde x es el vector de estado (vector de dimensión n) y $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ es un vector de dimensión n cuyos elementos son funciones de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y t. Suponemos que el sistema de la ecuación (13-1) tiene una solución única que empieza en la condición inicial dada. Representaremos la solución de la ecuación (13-1) como $\boldsymbol{\phi}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$, en donde $x = \mathbf{x}_0$ en $t = t_0$ y t es el tiempo observado. Por tanto,

$$\boldsymbol{\phi}(t_0; \mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{x}_0$$

Estado de equilibrio. En el sistema de la ecuación (13–1), un estado $\mathbf{x}_e$ en el que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t) = 0 \qquad \text{para toda } t \tag{13-2}$$

se denomina estado de equilibrio del sistema. Si el sistema es lineal e invariante con el tiempo, es decir, si $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = Ax$, entonces sólo existe un estado de equilibrio si A es no singular, y existen infinitamente muchos estados de equilibrio si A es singular. Para los sistemas no lineales, pueden existir uno o más estados de equilibrio. Estos estados corresponden a las soluciones constantes del sistema ($x = \mathbf{x}_e$ para toda t). La determinación de los estados de equilibrio no involucra la solución de las ecuaciones diferenciales del sistema, ecuación (13–1), sino sólo la solución de la ecuación (13-2).

Un estado de equilibrio aislado (es decir, aislado uno de otro) se cambia al origen de las coordenadas o $\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = 0$, mediante una traslación de coordenadas. En esta sección y en la siguiente, abordaremos el análisis de la estabilidad de los estados de equilibrio en el origen.

Estabilidad en el sentido de Liapunov. A continuación, representaremos una región esférica con radio k a partir de un estado de equilibrio $\mathbf{x}_e$ como

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\| \leq k$$

en donde $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\|$ se denomina norma euclidiana, y se define mediante

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\| = [(x_1 - x_{1e})^2 + (x_2 - x_{2e})^2 + \cdots + (x_n - x_{ne})^2]^{1/2}$$

Suponga que $S(\delta)$ está formada por todos los puntos tales que

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| \leq \delta$$

y suponga que $S(\varepsilon)$ está formada por todos los puntos tales que

$$\|\phi(t;\mathbf{x}_0,t_0) - \mathbf{x}_e\| \leq \epsilon, \qquad \text{para toda } t \geq t_0$$

Se dice que un estado de equilibrio $\mathbf{x}_e$ del sistema de la ecuación (13-1) es estable en el sentido de Liapunov si, en correspondencia con cada S(E), existe una $S(\delta)$ tal que las trayectorias que empiezan en $S(\delta)$ no se alejan de $S(\varepsilon)$ conforme t se incrementa indefinidamente. El número real δ depende de ε y, en general, también depende de t_0. Si δ no depende de t_0, se dice que el estado de equilibrio es uniformemente estable.

Lo que hemos planteado aquí es que primero seleccionamos la región $S(\varepsilon)$ y, para cada S(E), debe existir una región $S(\delta)$ tal que las trayectorias que empiezan dentro de $S(\delta)$ no se apartan de $S(\varepsilon)$ conforme t se incrementa indefinidamente.

Estabilidad asintótica. Se dice que un estado de equilibrio $\mathbf{x}_e$ del sistema de la ecuación (13-1) es asintóticamente estable si es estable en el sentido de Liapunov y todas las soluciones que empiezan dentro de S(Q) convergen a $\mathbf{x}_e$, sin apartarse de S(E), conforme t se incrementa indefinidamente.

En la práctica, la estabilidad asintótica es más importante que la mera estabilidad. Asimismo, dado que la estabilidad asintótica es un concepto local, simplemente establecer una estabilidad asintótica tal vez no signifique que el sistema operará en forma adecuada. Por lo general, se requiere de cierto conocimiento del tamaño de la región más grande de la estabilidad asintótica, región conocida como ***dominio de atracción.*** Es esa parte del espacio de estados en el cual se originan las trayectorias asintóticamente estables. En otras palabras, todas las trayectorias que se originan en el dominio de atracción son asintóticamente estables.

Estabilidad asintótica en general. Si la estabilidad asintótica es válida para todos los estados (todos los puntos en el espacio de estados) a partir de los cuales se originan trayectorias, se dice que el estado de equilibrio es asintóticamente estable en general. Es decir, se

dice que el estado de equilibrio $\mathbf{x}_e$ del sistema obtenido mediante la ecuación (13-1) es asintóticamente estable, en general, si es estable y todas las soluciones convergen a $\mathbf{x}_e$ conforme t se incrementa indefinidamente. Es obvio que una condición necesaria para la estabilidad asintótica en general es que sólo exista un estado de equilibrio en todo el espacio de estados.

En los problemas de ingeniería de control, una característica conveniente es la estabilidad asintótica en general. Si el estado de equilibrio no es asintóticamente estable en general, determinar la región más grande de la estabilidad asintótica resulta ser un problema. Por. lo general, esto es muy difícil. Sin embargo, para todos los propósitos prácticos, basta con establecer una región de estabilidad asintótica suficientemente amplia para que las perturbaciones no la rebasen.

Inestabilidad. Se dice que un estado de equilibrio $\mathbf{x}_e$ es inestable si para algún número real $\varepsilon > 0$ y cualquier numero real $\delta > 0$, no importa qué tan pequeño, hay un estado $\mathbf{x}_0$ en $S(\delta)$ tal que la trayectoria que empieza en estos estados se aparta de S(F).

Representación gráfica de la estabilidad, la estabilidad asintótica y la inestabilidad. Una representación gráfica de los conceptos definidos servirá para aclararlos.

Consideremos el caso de dos dimensiones. Las figuras 13-l(a), (b) y (c) muestran los estados de equilibrio y las trayectorias comunes correspondientes a la estabilidad, la estabilidad asintótica y la inestabilidad, respectivamente. En las figuras 13-l(a), (b) o (c), la región $S(\delta)$ limita el estado inicial $\mathbf{x}_0$ y la región S(E) corresponde al límite para la trayectoria que empieza en $\mathbf{x}_0$.

Observe que las definiciones anteriores no especifican la región exacta de las condiciones iniciales permisibles. Por tanto, las definiciones se aplican a la cercanía del estado de equilibrio, a menos que $S(\varepsilon)$ corresponda al plano del estado completo.

Observe en la figura 13-l(c) que la trayectoria se aparta de $S(\varepsilon)$ e implica que el estado de equilibrio es inestable. Sm embargo, no podemos decir que la trayectoria se dirija al infinito, dado que tiende a un ciclo límite fuera de la región S(E). (Si un sistema lineal e invariante con el tiempo es inestable, las trayectorias que empiezan cerca del estado de equilibrio inestable van al infinito. Pero en el caso de los sistemas no lineales, esto no es necesariamente cierto.)

El conocimiento de las definiciones anteriores es un requisito mínimo para comprender el análisis de la estabilidad de los sistemas lineales y no lineales presentados en esta sección. Observe que estas definiciones no son sólo aquellas que definen los conceptos de estabilidad de un estado de equilibrio. De hecho, existen otras formas diversas en la literatura. Por ejemplo, en la teoría de control convencional o clásica, sólo los sistemas asintóticamente estables se denominan sistemas estables y aquellos sistemas estables en el sentido de Liapunov, pero no asintóticamente estables, se denominan inestables.

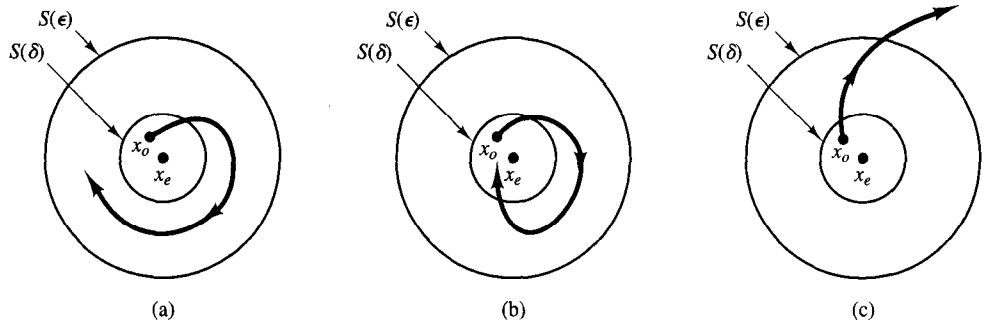


Figura 13-1
(a) Estado de equilibrio estable y una trayectoria representativa; (b) estado de equilibrio asintóticamente estable y una trayectoria representativa; (c) estado de equilibrio inestable y una trayectoria representativa.

Definidad positiva de las funciones escalares. Se dice que una función escalar ***V(x) es definida positiva*** en una región Ω (que incluye el origen del espacio de estados) si ***V(x)*** > 0 para todos los estados x diferentes de cero en la región Ω y ***V(O) = 0.***

Se dice que una función variante con el tiempo $V(\mathbf{x}, t)$ es definida positiva en una región Ω (que incluye el origen del espacio de estados) si está limitada desde abajo por una función definida positiva variante con el tiempo, es decir, si existe una función definida positiva ***V(x)*** tal que

$$V(\mathbf{x}, t) > V(\mathbf{x}), \qquad \text{para toda } t \geq t_0$$
$$V(\mathbf{0}, t) = 0, \qquad \text{para toda } t \geq t_0$$

Definidad negativa de las funciones escalares. Se dice que una función escalar ***V(x) es definida negativa*** si ***-V(x)*** es definida positiva.

Semidefinidad positiva de las funciones escalares. Se dice que una función escalar ***V(x) es semidefinida positiva*** si es positiva en todos los estados de la región Ω, excepto en el origen y en ciertos otros estados, en donde es cero.

Semidefinidad negativa de las funciones escalares. **Se** dice que una función escalar ***V(x) es semidefinida negativa*** si ***-V(x)*** es semidefinida positiva.

Indefinidad de las funciones escalares. Se dice que una función escalar ***V(x) es indefinida*** si en la región Ω adopta tanto valores positivos como negativos, sin importar qué tan pequeña sea la región Ω.

EJEMPLO 13-1 En este ejemplo, ofreceremos varias funciones escalares y sus clasificaciones de acuerdo con las definiciones anteriores. Aquí suponemos que $\mathbf{x}$ es un vector de dos dimensiones.

1. $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2$ — definida positiva
2. $V(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)^2$ — semidefinida positiva
3. $V(\mathbf{x}) = -x_1^2 - (3x_1 + 2x_2)^2$ — definida negativa
4. $V(\mathbf{x}) = x_1 x_2 + x_2^2$ — indefinida
5. $V(x) = x_1^2 + \dfrac{2x_2^2}{1 + x_2^2}$ — definida positiva

Forma cuadrática. Una clase de funciones escalares que juega un papel importante en el análisis de estabilidad basado en el segundo método de Liapunov es la forma cuadrática. Un ejemplo es

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix}$$

Observe que $\mathbf{x}$ es un vector real y P es una matriz simétrica real.

Forma hermitiana. Si $\mathbf{x}$ es un vector de dimensión n complejo y P es una matriz hermitiana, entonces, la forma cuadrática compleja se denomina forma hermitiana. Un ejemplo es

$$V(x) = \mathbf{x}^*\mathbf{P}\mathbf{x} = [\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2 \quad \cdots \quad \bar{x}_n] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \bar{p}_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & & \\ \bar{p}_{1n} & \bar{p}_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix}$$

En el análisis de estabilidad en el espacio de estados, con frecuencia se usa la forma hermitiana en lugar de la forma cuadrática, dado que la primera es más general que la última. (Para un vector real $\mathbf{x}$ y una matriz simétrica real P, una forma hermitiana $\mathbf{x}^*\mathbf{P}\mathbf{x}$ se vuelve igual a la forma cuadrática $\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$.)

La definidad positiva de la forma cuadrática o la forma hermitiana $V(x)$ pueden determinarse mediante el criterio de Sylvester, que plantea que las condiciones necesarias y suficientes para que la forma cuadrática o la forma hermitiana $V(x)$ sea definida positiva son que todas las menores principales sucesivas de P sean positivas; es decir,

$$p_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ \bar{p}_{12} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \bar{p}_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \bar{p}_{1n} & \bar{p}_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

(Observe que $\bar{p}_{ij}$ es el complejo conjugado de p_{ij}. Para la forma cuadrática, $\bar{p}_{ij} = p_{ij}$.)

$V(x) = \mathbf{x}^*\mathbf{P}\mathbf{x}$ es semidefinida positiva si P es singular y todas las menores principales son no negativas.

$V(x)$ es definida negativa si -V(x) es definida positiva. Asimismo, $V(x)$ es semidefinida negativa si -V(x) es semidefinida positiva.

EJEMPLO 13-2 Demuestre que la siguiente forma cuadrática es definida positiva:

$$V(x) = 10x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 \quad 2x_2x_3 \quad 4x_1x_3$$

La forma cuadrática $V(x)$ se escribe

$$V(x) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Aplicando el criterio de Sylvester, obtenemos

$$10 > 0, \quad \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

Dado que todas las menores principales sucesivas de la matriz P son positivas, $V(x)$ es definida positiva.

Segundo método de Liapunov. A partir de la teoría clásica de la mecánica, sabemos que un sistema vibratorio es estable si su energía total (una función definida positiva) es continuamente decreciente (lo que significa que la derivada de tiempo de la energía total debe ser definida negativa) hasta que se alcanza un estado de equilibrio.

El segundo método de Liapunov se basa en una generalización de este hecho: si el sistema tiene un estado de equilibrio asintóticamente estable, la energía almacenada en el sistema desplazada dentro del dominio de atracción se descompone conforme transcurre el tiempo, hasta que finalmente adopta su valor mínimo en el estado de equilibrio. Sin embargo, para los sistemas puramente matemáticos, no existe una forma simple de definir una "función de energía". Para superar esta dificultad, Liapunov introdujo la función de Liapunov, una función de energía ficticia. No obstante, esta idea es más general que la de la energía y tiene más posibilidades de aplicación. De hecho, cualquier función escalar que satisfaga la hipótesis de los teoremas de estabilidad de Liapunov (véanse los teoremas 13 - 1 y 13-2) sirve como las funciones de Liapunov. (Para los sistemas simples, podemos vislumbrar las funciones de Liapunov convenientes; pero,para un sistema complicado, resulta bastante difícil encontrar una función de Liapunov.)

Las funciones de Liapunov dependen de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y t. Las representamos mediante $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ o simplemente mediante $V(\mathbf{x}, t)$. Si las funciones de Liapunov no incluyen t explícitamente, las representamos mediante $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, o $V(x)$. En el segundo método de Liapunov, el comportamiento del signo de $V(\mathbf{x}, t)$ y el de su derivada con respecto al tiempo $\dot{V}(\mathbf{x},t) = dV(\mathbf{x}, t)/dt$ nos ofrece información con respecto a la estabilidad, la estabilidad asintótica, o la inestabilidad de un estado de equilibrio sin que nos obliguen a que obtengamos directamente la solución. (Esto se aplica tanto a los sistemas lineales como a los no lineales.)

Teorema principal de la estabilidad de Liapunov. Se puede demostrar que si una función escalar $V(x)$ en donde $\mathbf{x}$ es un vector de dimensión n, es definida positiva, los estados $\mathbf{x}$ que satisfacen

$$V(x) = c$$

en donde C es una constante positiva, se encuentran en una hipersuperficie cerrada en el espacio de estados de n dimensiones, al menos en la cercanía del origen. Si $V(x) \to \infty$ conforme $\|\mathbf{x}\| \to \infty$, entonces, las superficies cerradas se extienden sobre el espacio de estados completo. La hipersuperficie $V(x) = C_1$ se encuentra completamente dentro de la hipersuperficie $V(x) = C_2$ si $C_1 < C_2$.

Para un sistema determinado, si se encuentra una función escalar definida positiva $V(x)$ tal que su derivada con respecto al tiempo, tomada a lo largo de una trayectoria, sea siempre negativa, entonces, conforme se incrementa el tiempo, $V(x)$ adopta valores cada vez más pequeños de C. Conforme se incrementa el tiempo, $V(x)$ finalmente se reduce a cero y, por tanto, x también se reduce a cero. Esto implica la estabilidad asintótica del origen del espacio de estados. El teorema principal de la estabilidad de Liapunov, que es una generalización del hecho anterior, proporciona una condición suficiente para la estabilidad asintótica. Este teorema se plantea del modo siguiente:

Teorema 13-1. Suponga que un sistema se describe mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

en donde

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}, \qquad \text{para toda } t$$

Si existe una función escalar $V(\mathbf{x}, t)$ con primeras derivadas parciales continuas, que satisface las condiciones

1. $V(\mathbf{x}, t)$ es definida positiva
2. $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ es definida negativa

entonces el estado de equilibrio en el origen es uniforme y asintóticamente estable.

Si, además, $V(\mathbf{x}, t) \to \infty$ conforme $\|x\| \to \infty$, entonces el estado de equilibrio en el origen es uniforme y asintóticamente estable en general.

No ofreceremos aquí los detalles de la prueba de este teorema. (La comprobación se obtiene directamente de la definición de la estabilidad asintótica.Véanse los detalles en el problema A-13-6.).

EJEMPLO **13-3** Considere el sistema descrito mediante

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

Es evidente que el origen $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ es el ímico estado de equilibrio. Determine su estabilidad.

Si definimos una función escalar $V(x)$ mediante

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

que es definida positiva, entonces la derivada con respecto al tiempo de $V(x)$ a lo largo de cualquier trayectoria es

$$\mathbf{V(x)} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$$
$$= -2(x_1^2 + x_2^2)^2$$

que es definida negativa. Esto demuestra que $V(x)$ decrece continuamente alo largo de cualquier trayectoria; por tanto, $V(x)$ es una función de Liapunov. Dado que $V(x)$ se vuelve infinita con una desviación infinita a partir del estado de equilibrio, mediante el teorema 13 - 1, el estado de equilibrio en el origen del sistema es asintóticamente estable en general.

Observe que si suponemos que $V(x)$ toma valores constantes iguales a 0, $C_1, C_2, \ldots$ $(0 < C_1 < C_2 < \cdots)$, entonces $V(x) = 0$ corresponde al origen del plano del estado y $V(x) = C_1, V(x) = C_2, \ldots$ describen círculos que no se intersecan y que encierran el origen del plano de estados, como se aprecia en la figura 13-2. Observe también que dado que $V(x)$ es radialmente ilimitada, o $V(x) \to \infty$ conforme $\|\mathbf{x}\| \to \infty$, los círculos se extienden sobre todo el plano de estados.

Dado que el círculo $V(x) = C_k$ se encuentra completamente dentro del círculo $V(x) = C_{k+1}$, una trayectoria representativa cruza el límite de los contornos de V de afuera hacia adentro. Es decir, la interpretación geométrica de una función de Liapunov se plantea del modo siguiente: $V(x)$ es una medida de la distancia del estado x a partir del origen del espacio de estados. Si la distancia entre el origen y el estado x(t) instantáneo disminuye continuamente conforme t se incrementa [esto es, $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) < 0$], entonces $x(t) \to 0$.

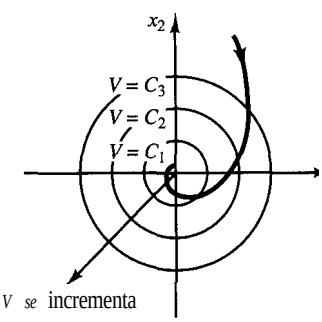


Figura 13-2
Contornos de V constantes y una trayectoria representativa.

Comentario. Aunque el teorema 13-1 es un teorema básico del segundo método, es, de alguna forma, restrictivo, porque $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ debe ser definida negativa. Sin embargo, si se impone sobre $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ la restricción adicional de que no se desvanezca en forma idéntica a lo largo de cualquier trayectoria, excepto en el origen: es posible sustituir el requerimiento de que $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ sea definida negativa planteando que $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ sea semidefinida negativa.

Teorema 13-2. Suponga un sistema que se describe mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

en donde

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}, \qquad \text{para toda } t \geq t_0$$

Si existe una función escalar $V(\mathbf{x}, t)$ que tenga primeras derivadas parciales continuas y satisfaga la condiciones

1. V (x, t) es definida positiva
2. $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ es semidefinida negativa
3. $\dot{V}(\boldsymbol{\phi}(t; \mathbf{x}_0, t_0), t)$ no se desvanece idénticamente en $t \geq$ topara cualquier t_0 y cualquier $\mathbf{x}_0 \neq 0$, en donde $\boldsymbol{\phi}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ representa la trayectoria o solución que empieza a partir de $\mathbf{x}_0$ en t_0

entonces el estado de equilibrio en el origen del sistema es uniforme y asintóticamente estable en general.

Comentarios. Observe que si $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ no es definida negativa, sino sólo semidefinida negativa, entonces, la trayectoria de un punto representativo se vuelve tangente a determinada superficie $V(\mathbf{x}, t) = C$. Sin embargo, dado que $\dot{V}(\phi(t; \mathbf{x}_0, t_0), t)$ no se desvanece idénticamente en $t \geq t_0$ para cualquier t_0 y cualquier $\mathbf{x}_0 \neq 0$, el punto representativo no puede permanecer en el punto tangente [el punto que corresponde a $V(\mathbf{x}, t) = 0$] y, por tanto, debe moverse hacia el origen.

Sin embargo, si existe una función escalar definida positiva $V(\mathbf{x}, t)$ tal que $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ sea idénticamente cero, entonces el sistema puede permanecer en un ciclo límite. En este caso, se dice que el estado de equilibrio en el origen es estable en el sentido de Liapunov.

Inestabilidad. Si un estado de equilibrio x = 0 de un sistema es inestable, entonces existe una función escalar $W(\mathbf{x}, t)$ que determina la inestabilidad del estado de equilibrio. A continuación presentaremos un teorema acerca de la estabilidad.

Teorema 13-3. Suponga que un sistema se describe mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

en donde

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}, \qquad \text{para toda } t \geq t_0$$

Si existe una función escalar $W(\mathbf{x}, t)$ que tiene primeras derivadas parciales continuas y satisface las condiciones

1. $W(\mathbf{x}, t)$ es definida positiva en cierta región respecto al origen
2. $\dot{W}$ (x, t) es definida positiva en la misma región

entonces el estado de equilibrio en el origen es inestable.

Estabilidad de los sistemas lineales contra la estabilidad de los sistemas no lineales. En un sistema lineal e invariante con el tiempo, si el estado de equilibrio es local y asintóticamente estable, entonces es asintóticamente estable en general. Sin embargo, en un sistema no lineal, un estado de equilibrio puede ser local y asintóticamente estable sin ser

asintóticamente estable en general. Por tanto, las implicaciones de la estabilidad asintótica del estado de equilibrio de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo y los de los sistemas no lineales son muy diferentes.

Si vamos a examinar la estabilidad asintótica de los estados de equilibrio de los sistemas no lineales, es completamente inadecuado un análisis de la estabilidad de los modelos linealizados de los sistemas no lineales. Debemos investigar los sistemas no lineales sin **linealización.** Existen varios métodos para este propósito basados en el segundo método de Liapunov. Entre ellos se cuentan el método de Krasovskii para probar las condiciones suficientes para una estabilidad asintótica de los sistemas no lineales, el método de gradiante de variable de Schultz-Gibson para generar funciones de Liapunov para sistemas no lineales, el método de Lur'e para el análisis de la estabilidad de ciertos sistemas de control no lineales, el método de Zubov para construir dominios de atracción y otros. A continuación, limitaremos nuestro análisis al método de Krasovskii.

Método de Krasovskii. El método de Krasovskii ofrece una condición suficiente para que el estado de equilibrio sea asintóticamente estable.

En un sistema no lineal puede haber más de un estado de equilibrio. Sin embargo, es posible transferir el estado de equilibrio considerado al origen del espacio de estados mediante una transformación adecuada de las coordenadas. Por tanto, supondremos que el estado de equilibrio que se considera está en el origen. Ahora presentaremos el teorema de Krasovskii.

Teorema 13-4. (Teorema de Krasovskii.) Considere el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

en donde x = vector de dimensión n (vector de estado)
f(x) = vector de dimensión n cuyos elementos son funciones no lineales de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Suponga que $\mathbf{f(O)} = 0$ y que $\mathbf{f(x)}$ es diferenciable con respecto a x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Defina la matriz jacobiana para el sistema del modo siguiente:

$$\mathbf{F(x)} = \left[\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Asimismo, defina

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^*(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

en donde $\mathbf{F(x)}$ es la matriz jacobiana y $\mathbf{F^*(x)}$ es la transpuesta conjugada de $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$. [Si f(x) es real, entonces $\mathbf{F(x)}$ es real y $\mathbf{F^*(x)}$ se escribe como $\mathbf{F'(x)}$. Es evidente que $\hat{\mathbf{F}}$ (x) es claramente hermitiana (simétrica si $\mathbf{F(x)}$ es real).] Si $\hat{\mathbf{F}}$ (x) es definida negativa, el estado de equilibrio x = 0 es asintóticamente estable. Una función de Liapunov para este sistema es

$$\mathbf{V(x)} = \mathbf{f}^*(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Además, si $\mathbf{f}^*(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \infty$ conforme $\|\mathbf{x}\| \to \infty$, entonces el estado de equilibrio es asintóticamente estable en general.

Comprobación. Dado que $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ es definida negativa, el determinante de $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ es diferente de cero en todas partes excepto en x = 0. Por tanto, no hay otro estado de equilibrio además de x = 0 en todo el espacio de estados, o $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq 0$ para $x \neq 0$. Dado que $\mathbf{f}(\mathbf{O}) = 0$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq 0$ para $x \neq 0$, y $V(x) = \mathbf{f}^*(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $V(x)$ es definida positiva.

Considerando que

$$\mathbf{i}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

$\dot{V}$ se obtiene del modo siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{f}}^*(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^*(\mathbf{x})\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \\ &= [\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})]^*\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^*(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{f}^*(\mathbf{x})[\mathbf{F}^*(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x})]\mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{f}^*(\mathbf{x})\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Dado que $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ es definida negativa, se deduce que $\dot{V}(\mathbf{x})$ es definida negativa. Por tanto, $V(x)$ es una función de Liapunov. Así, el origen es asintóticamente estable. Si $V(x) = \mathbf{f}^*(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$ tiende a infinito, conforme $\|\mathbf{x}\| \to \infty$, entonces mediante el teorema 13 - 1 el estado de equilibrio, es asintóticamente estable en general.

Observe que el teorema de Krasovskii difiere de los enfoques de linealización comunes. No está limitado a pequeñas salidas a partir del estado de equilibrio. Observe también que $V(x)$ y $\dot{V}(\mathbf{x})$se representan en términos de f(x) o $\dot{\mathbf{x}}$ y no en términos de x.

El teorema anterior para la estabilidad asintótica en general ofrece condiciones suficientes para los sistemas no lineales y condiciones necesarias y suficientes para los sistemas lineales. Un estado de equilibrio de un sistema no lineal puede ser estable incluso si no se satisfacen las condiciones especificadas en este teorema. Por tanto, al usar el teorema 13-4, tenga cuidado de no llegar a conclusiones erróneas con respecto a la estabilidad de un sistema no lineal determinado.

EJEMPLO 13–4 Considere el sistema de segundo orden con dos no linealidades:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + ax_2$$

Suponemos que $f_1(0) = f_2(0) = 0$ y que $f_1(x_1)$ y $f_2(x_2)$ son reales y diferenciables. Además, suponga que

$$[f_1(x_1) + f_2(x_2)]^2 + [x_1 + ax_2]^2 \to \infty, \qquad \text{conforme } \|\mathbf{x}\| \to \infty$$

Determine las condiciones suficientes para una estabilidad asintótica del estado de equilibro x = 0.

En este sistema, $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ se obtiene mediante

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1'(x_1) & f_2'(x_2) \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

en donde

$$f_1'(x_1) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \qquad \text{y} \qquad f_2'(x_2) = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

Así $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ se vuelve

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = F^*(x) + F(x)$$

$$= \begin{bmatrix} 2f_1'(x_1) & 1 + f_2'(x_2) \\ 1 + f_2'(x_2) & 2a \end{bmatrix}$$

Mediante el teorema de Krasovskii, si $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ es definida negativa, entonces el estado de equilibrio x = 0 del sistema considerado es asintóticamente estable en general. Por tanto, si

$$f_1'(x_1) < 0, \qquad \text{para toda } x_1 \neq 0$$

$$4af_1'(x_1) - [1 + f_2'(x_2)]^2 > 0, \qquad \text{para toda } x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0$$

entonces el estado de equilibrio x = 0 es asintóticamente estable en general. (Estas dos condiciones son suficientes para una estabilidad asintótica. Es evidente que son indebidamente restrictivas, debido a que las condiciones de estabilidad son completamente independientes de las formas reales de las funciones no lineales $f_1(x)$ y $f_2(x)$.)

13-3 ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD DE LIAPUNOV DE LOS SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES CON EL TIEMPO

Existen muchos enfoques para la investigación de la estabilidad asintótica de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo. Por ejemplo, para un sistema de tiempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

la condición necesaria y suficiente para la estabilidad asintótica del origen del sistema propone que todos los valores característicos de A tengan partes reales negativas, o que los ceros del polinomio característico

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

tengan partes reales negativas.

Resulta difícil, o imposible, encontrar los valores característicos del caso en el que algunos de los coeficientes del polinomio característico no son numéricos. De este modo, se aplica convenientemente el criterio de estabilidad de Routh. Existe una alternativa para este enfoque, que se basa en el segundo método de Liapunov. El enfoque de Liapunov es algebraico y no requiere factorizar el polinomio característico. Además, este enfoque se usa a fin de encontrar soluciones para ciertos problemas de control óptimo. El propósito de esta sección es presentar el enfoque de Liapunov para el análisis de la estabilidad de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo. (Las aplicaciones del enfoque de Liapunov para los sistemas de control óptimo se presentan en las secciones 13-4 y 13-5.)

Análisis de la estabilidad de Liapunov de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo. Considere el siguiente sistema lineal e invariante con el tiempo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{13-3}$$

en donde x es un vector de estado (vector de dimensión n) y A es una matriz de coeficientes constantes de $n \times n$. Suponemos que A es no singular. Entonces, el único estado de equi-

librio es el origen x = 0. La estabilidad del estado de equilibrio del sistema lineal variante con el tiempo se investiga fácilmente mediante el segundo método de Liapunov.

Para el sistema definido mediante la ecuación (13−3), seleccionamos una función de Liapunov posible como

$$\mathbf{V(x) = x^*Px}$$

en donde P es una matriz hermitiana definida positiva. (Si x es un vector real y A es una matriz real, entonces se elige que P sea una matriz simétrica real definida positiva.) La derivada con respecto al tiempo de $V(x)$ a lo largo de cualquier trayectoria es

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^*\mathbf{Px} + \mathbf{x}^*\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} \\ &= (\mathbf{Ax})^*\mathbf{Px} + \mathbf{x}^*\mathbf{PAx} \\ &= \mathbf{x}^*\mathbf{A}^*\mathbf{Px} + \mathbf{x}^*\mathbf{PAx} \\ &= \mathbf{x}^*(\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{PA})\mathbf{x}\end{aligned}$$

Dado que se eligió que $V(x)$ fuera definida positiva, requerimos, para una estabilidad asintótica, que $V(x)$ sea definida negativa. Por tanto, requerimos que

$$\text{ti}(x) = -\mathbf{x}^*\mathbf{Qx}$$

en donde

$$Q = \mathbf{-(A^*P + PA)} = \text{definida positiva}$$

Así, para la estabilidad asintótica del sistema de la ecuación (13−3), es suficiente que Q sea definida positiva. Para una prueba de la definidad positiva de una matriz de n x n, aplicamos el criterio de Sylvester, que plantea que una condición necesaria y suficiente para que la matriz sea definida positiva es que los determinantes de todos los menores principales sucesivos de la matriz sean positivos.

En lugar de primero especificar una matriz **P** definida positiva y examinar si Q es definida positiva, es conveniente primero especificar una matriz Q definida positiva y después examinar si **P,** determinada a partir de

$$\mathbf{A^*P + PA = -Q}$$

es definida positiva. Observe que el que **P** sea definida positiva es una condición necesaria y suficiente. Resumiremos lo que acabamos de plantear como un teorema.

Teorema 13-5. Considere el sistema descrito mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$$

en donde x es un vector de estado (vector de dimensión n) y **A** es una matriz de coeficientes constantes no singular de n X n. Una condición necesaria y suficiente para que el estado de equilibrio x = 0 sea asintóticamente estable en general, es que, dada cualquier matriz Q hermitiana (o simétrica real) definida positiva, exista una matriz **P** hermitiana (o simétrica real) definida positiva, tal que

$$\mathbf{A^*P + PA = -Q}$$

La función escalar $\mathbf{x^*Px}$ es una función de Liapunov para este sistema. [Observe que, en el sistema lineal considerado, si el estado de equilibrio (el origen) es asintóticamente estable, entonces es asintóticamente estable en general.]

Comentarios. Al aplicar este teorema, es conveniente señalar varias condiciones importantes.

1. Si el sistema sólo contiene un vector de estado real $\mathbf{x}$ y una matriz de estado real A, entonces la función de Liapunov $\mathbf{x}^*\mathbf{P}\mathbf{x}$ se vuelve $\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$ y la ecuación de Liapunov se convierte en

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

2. Si $\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^*\mathbf{Q}\mathbf{x}$ no se desvanece idénticamente a lo largo de cualquier trayectoria, entonces se selecciona que Q sea semidefinida positiva.

3. Si optamos por cualquier matriz arbitraria definida positiva como Q o una matriz semidefinida positiva como Q si $V(x)$ no se desvanece idénticamente a lo largo de cualquier trayectoria y despejamos la ecuación

$$\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

para determinar P, entonces la definidad positiva de P es una condición necesaria y suficiente para la estabilidad asintótica del estado de equilibrio x = 0.

Observe que $V(x)$ no se desvanece idénticamente a lo largo de cualquier trayectoria si una matriz Q semidefinida positiva satisface la siguiente condición de rango:

$$\text{rango} \begin{vmatrix} \mathbf{Q}^{1/2} \\ \mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{A} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{A}^{n-1} \end{vmatrix} = n$$

(Véase el problema A-13-5).

4. El resultado final no depende de una matriz Q específica elegida mientras sea definida positiva (o semidefinida positiva, como puede ocurrir).

5. Para determinar los elementos de la matriz **P,** igualamos las matrices $\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}$ y $-$ Q elemento por elemento. Esto produce las $n(n + 1)/2$ ecuaciones lineales para la determinación de los elementos de $p_{ij} = \bar{p}_{ji}$ de **P.** Si representamos los valores característicos de **A** mediante Xl, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$, cada uno repetido con la frecuencia de su multiplicidad como raíz de la ecuación característica y si para cada suma de dos raíces

$$\lambda_j + \lambda_k \neq 0$$

entonces los elementos de **P** se determinan en forma única. Observe que, si la matriz **A** representa un sistema estable, las sumas de $\lambda_j + \lambda_k$ son siempre diferentes de cero.

6. Al determinar si existe una matriz hermitiana definida positiva o una matriz simétrica real **P,** es conveniente elegir Q = **1,** en donde **1** es la matriz de identidad. Así, los elementos de **P** se determinan a partir de

$$\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{1}$$

y se prueba la definidad positiva de la matriz **P.**

EJEMPLO 13-5 Considere el sistema de segundo orden descrito mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Es evidente que el estado de equilibrio es el origen. Determine la estabilidad de este estado.

Supongamos una función de Liapunov tentativa

$$V(x) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$$

en donde P va a determinarse a partir de

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + PA = -1$$

Esta última ecuación se escribe como

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & 22 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Expandiendo esta ecuación de matriz, obtenemos tres ecuaciones simultáneas del modo siguiente:

$$-2p_{12} = -1$$

$$p_{11} - p_{12} - P22 = 0$$

$$2p_{12} - 2p_{22} = -1$$

Despejando p_{11}, p_{12} y p_{13}, obtenemos

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Para probar la definidad positiva de P, verificamos los determinantes de los menores principales sucesivos:

$$\frac{3}{2} > 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} > 0$$

Es evidente que P es definida positiva. Por tanto, el estado de equilibrio en el origen es asintóticamente estable en general y una función de Liapunov es

$$V(x) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} = \tfrac{1}{2}(3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2)$$

Y

$$V(x) = -(x_1^2 + x_2^2)$$

EJEMPLO 13-6 Determine el rango de estabilidad para la ganancia K del sistema de la figura 13-3.

La ecuación de estado del sistema es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -K & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix}u$$

Al determinar el rango de estabilidad para K, suponemos que la entrada u es cero. Así, esta úl-

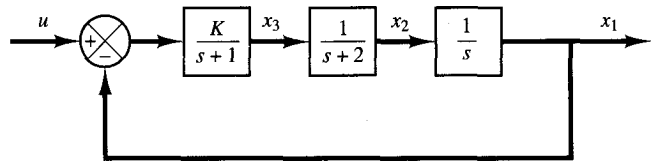


Figura 13-3
Sistema de control.

tima ecuación se escribe como

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{13-4}$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + x_3 \tag{13-5}$$

$$\dot{x}_3 = -Kx_1 - x_3 \tag{13-6}$$

A partir de las ecuaciones (13-4) a (13−6), encontramos que el origen es el estado de equilibrio. Seleccionamos la matriz Q simétrica real semidefinida positiva como

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13-7}$$

Esta elección de Q es permisible dado que $\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$ no puede ser igual a cero, excepto en el origen. Para verificar esto, considere que

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} = -x_3^2$$

El que $\dot{V}(\mathbf{x})$ sea idénticamente cero implica que x_3 es idénticamente cero. Si x_3 es idénticamente cero, entonces x_1 debe ser idénticamente cero, dado que, a partir de la ecuación (13−6), obtenemos

$$0 = -Kx_1 - 0$$

Si x_1 es idénticamente cero, entonces x_2 también debe ser idénticamente cero, dado que, a partir de la ecuación (13−4),

$$0 = x_2$$

Por tanto, $\dot{V}(\mathbf{x})$ es idénticamente cero sólo en el origen. Así, podemos usar la matriz Q definida mediante la ecuación (13 -7) para un análisis de estabilidad.

0 bien, verificamos el rango de matriz

$$\begin{bmatrix} Q^{1/2} \\ Q^{1/2}A \\ Q^{1/2}A^2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -K & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K & -K & 1 \end{vmatrix}$$

Es evidente que el rango es 3 para $K \neq 0$. Por tanto, seleccionamos esta Q para la ecuación de Liapunov. Ahora despejemos la ecuación de Liapunov.

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

que se vuelve a escribir como

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -K \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -K & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Despejando esta ecuación para los elementos de P, obtenemos

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{K^2 + 12K}{12 - 2K} & \frac{6K}{12 - 2K} & 0 \\ \frac{6K}{12 - 2K} & \frac{3K}{12 - 2K} & \frac{K}{12 - 2K} \\ 0 & \frac{K}{12 - 2K} & \frac{6}{12 - 2K} \end{bmatrix}$$

Para que P sea definida positiva, es necesario y suficiente que

$$12 - 2K > 0 \qquad \text{y} \qquad K > 0$$

o bien

$$0 < K < 6$$

Por tanto, para $0 < K < 6$, el sistema es estable en sentido convencional, es decir, el origen es asintóticamente estable en general.

13-4 SISTEMAS DE CONTROL CON MODELO DE REFERENCIA

Hasta aquí hemos presentado técnicas de diseño para los sistemas de control lineales e invariantes con el tiempo. Dado que todas las plantas físicas son en cierto grado no lineales, el sistema diseñado sólo se comportará satisfactoriamente durante un rango de operación limitado. Si se retira la suposición de linealidad en la ecuación de la planta las técnicas de diseño presentadas hasta aquí no son aplicables. De este modo, puede ser útil el enfoque del modelo de referencia para el diseño del sistema presentado en esta sección.

Sistemas de control con modelo de referencia. Un método útil para especificar el desempeño de un sistema se basa en un modelo que produzca la salida deseada para una entrada determinada. El modelo no necesita ser un sistema físico real. Puede ser sólo un modelo matemático simulado en una computadora. En un sistema de control con modelo de referencia, se comparan la salida del modelo y la de la planta, y la diferencia se usa para generar las señales de control.

Diseño de un controlador.* Supondremos que la planta se caracteriza mediante la ecuación de estado siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{13-8}$$

en donde $\mathbf{x}$ = vector de estado (vector de dimensión n)
u = vector de control (vector de dimensión r)
f = función evaluada con un vector

***Bibliografía M-7 y V-2.**

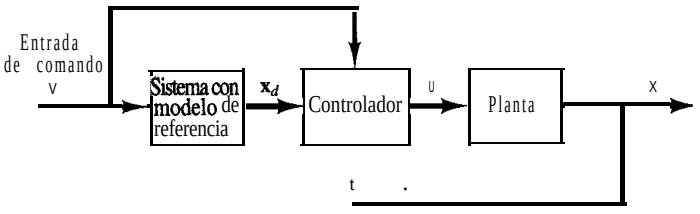


Figura 13-4
Sistema de control con modelo de referencia.

Se desea que el sistema de control siga estrechamente cierto sistema de modelo. Aquí nuestro problema de diseño es sintetizar un controlador que genere siempre una señal que fuerce el estado de la planta hacia el estado del modelo. La figura 13-4 es el diagrama de bloques que muestra la configuración del sistema.

Supondremos que el sistema con modelo de referencia es lineal y se describe mediante

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{A}\mathbf{x}_d + \mathrm{B}\mathrm{v} \tag{13-9}$$

en donde $\mathbf{x}_d$ = vector de estado del modelo (vector de dimensión n)
v = vector de entrada (vector de dimensión r)
A = matriz de coeficientes constantes de n X n
B = matriz de coeficientes constantes de n X r

Suponemos que los valores característicos de A tienen partes reales negativas para que el sistema con modelo de referencia tenga un estado de equilibrio asintóticamente estable.

Definamos el vector de error e mediante

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x} \tag{13-10}$$

En el problema actual, pretendemos reducir el vector de error a cero mediante un vector de control **u** conveniente. A partir de las ecuaciones (13-8) y (13−10), obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}_d + \mathbf{B}\mathrm{v} - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathrm{A}\mathrm{x} - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{B}\mathrm{v}\end{aligned} \tag{13-11}$$

La ecuación (13-11) es una ecuación diferencial para el vector de error.

Ahora diseñamos un controlador tal que en estado estable $\mathbf{x} = \mathbf{x}_d$ y $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_d$, o $\mathbf{e} = \dot{\mathbf{e}} = 0$. Por tanto, el origen e = 0 será un estado de equilibrio.

Un punto inicial conveniente en la síntesis del vector de control u es la construcción de una función de Liapunov para el sistema obtenido mediante la ecuación (13 -11).

Supongamos que la forma de la función de Liapunov es

$$V(e) = \mathbf{e}^*\mathbf{P}\mathbf{e}$$

en donde **P** es una matriz hermitiana o simétrica real definida positiva. Tomar la derivada de $V(e)$ con respecto al tiempo produce

$$\begin{aligned}\mathbf{ti}(\mathbf{e}) &= \dot{\mathbf{e}}^*\mathbf{P}\mathbf{e} + \mathbf{e}^*\mathbf{P}\dot{\mathbf{e}} \\ &= [\mathrm{e}^*\mathrm{A}^* + \mathbf{x}^*\mathbf{A}^* - \mathbf{f}^*(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{v}^*\mathbf{B}^*]\mathbf{P}\mathbf{e} \\ &\quad + \mathbf{e}^*\mathbf{P}[\mathbf{A}\mathbf{e} + \\ &= \mathrm{e}^*(\mathrm{A}^*\mathrm{P} + \mathrm{P}\mathrm{A})\mathrm{e} + 2M\end{aligned} \tag{13-12}$$

en donde

$$M = \mathrm{e}^*\mathrm{P}[\mathrm{A}\mathrm{x} - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{B}\mathbf{v}] = \text{cantidad escalar}$$

La función ***V(e)*** supuesta es una función de Liapunov si

1. **A*P** + **PA** = − Q es una matriz definida negativa.
2. El vector de control **u** se selecciona para hacer no positiva la cantidad escalar ***M.***

Así, considerando que $V(e) \to \infty$ conforme $\|e\| \to \infty$, vemos que el estado de equilibrio e = 0 es asintóticamente estable en general. Siempre puede cumplirse la condición 1 mediante una elección apropiada de **P,** dado que se supone que los valores característicos de **A** tienen partes reales negativas. El problema aquí es seleccionar un vector de control **u** apropiado para que ***M*** sea cero o negativa.

Ilustraremos la aplicación del enfoque actual para el diseño de un controlador no lineal mediante un ejemplo.

EJEMPLO 13-7 Considere una planta no lineal variante con el tiempo descrita mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a(t)x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

en donde $a(t)$ varía con el tiempo y b es una constante positiva. Suponiendo que la ecuación del modelo de referencia es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{d1} \\ \dot{x}_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{d1} \\ x_{d2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} \mathbf{v} \tag{13-13}$$

diseñe un controlador no lineal que produzca una operación estable del sistema.

Defina el vector de error mediante

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}$$

y una función de Liapunov mediante

$$V(e) = \mathbf{e}^*\mathbf{P}\mathbf{e}$$

en donde **P** es una matriz simétrica real definida positiva. Entonces, remitiéndonos a la ecuación (13−12), obtenemos $V(e)$ como

$$\dot{V}(\mathbf{e}) = \mathbf{e}^*(\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{e} + 2M$$

en donde

$$\mathbf{M} = \mathbf{e}^*\mathbf{P}[\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{B}\mathbf{v}]$$

Identificando las matrices **A** y **B** a partir de la ecuación (13-13) y eligiendo que la matriz Q sea

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix} = \text{definida positiva}$$

obtenemos

$$\dot{V}(\mathbf{e}) = -(q_{11}e_1^2 + q_{22}e_2^2) + 2M$$

en donde

$$M = [e_1 \ e_2] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a(t)x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 v \end{bmatrix} \right\}$$

$$= (e_1 p_{12} + e_2 p_{22})[-(\omega_n^2 - b)x_1 - 2\zeta\omega_n x_2 + a(t)x_2^2 + \omega_n^2 v - u]$$

Si seleccionamos u de modo que

$$u = -(\omega_n^2 - b)x_1 - 2\zeta\omega_n x_2 + \omega_n^2 v + a_m x_n^2 \text{signo}(e_1 p_{12} + e_2 p_{22}) \qquad (13\text{-}14)$$

en donde

$$a_m = \text{máx}\,|a(t)|$$

entonces

$$M = (e_1 p_{12} + e_2 p_{22})\,[a(t) - a_m\,\text{signo}(e_1 p_{12} + e_2 p_{22})]x_2^2$$

$$= \text{no positiva}$$

Con la función de control u obtenida mediante la ecuación (13−14), el estado de equilibrio e = 0 es asintóticamente estable en general. Por tanto, la ecuación (13 - 14) define una ley del control no lineal que producirá una operación asintóticamente estable. El diagrama de bloques para el sistema de control actual aparece en la figura 13-5.

Observe que la velocidad de convergencia de la respuesta transitoria depende de la matriz P, que a su vez depende de la matriz Q elegida al inicio del diseño.

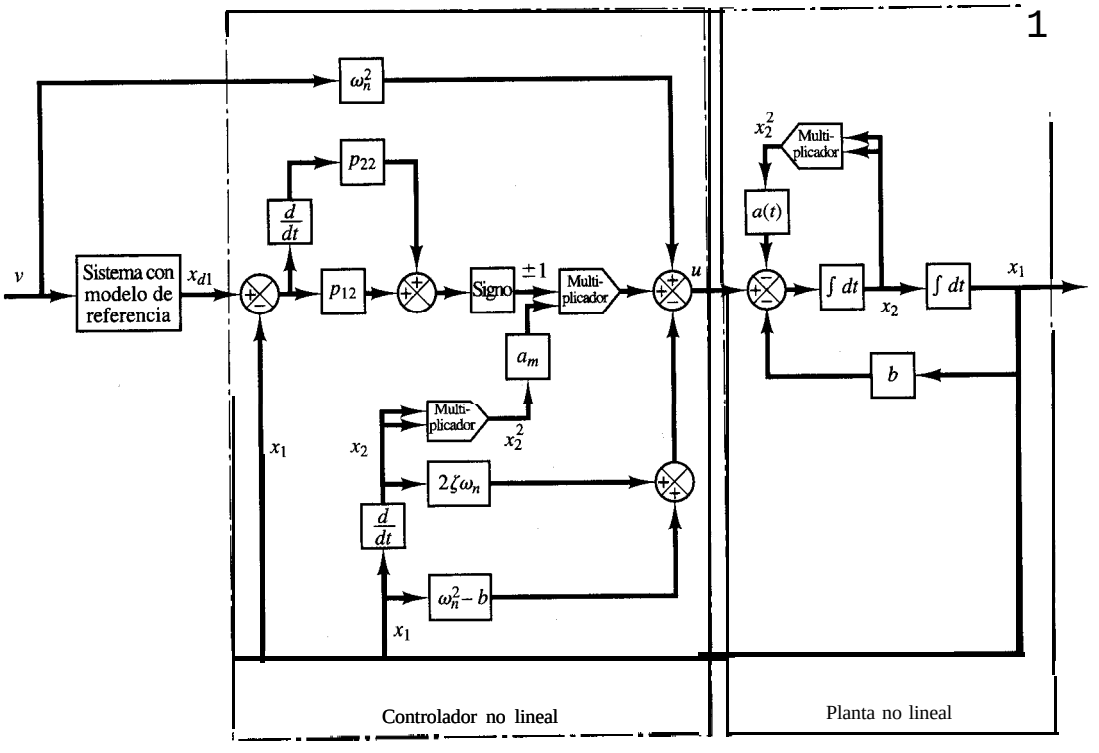


Figura 13-5
Control de referencia del modelo de una planta no lineal.

13-5 CONTROL ÓPTIMO CUADRÁTICO

En esta sección consideraremos el diseño de sistemas de control estables basados en los índices de desempeño cuadráticos. El sistema de control que consideraremos aquí se define mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \tag{13-15}$$

en donde x = vector de estado (vector de dimensión n)
u = vector de control (vector de dimensión r)
A = matriz de coeficientes constantes de n x n
B = matriz de coeficientes constantes de $n \times r$

Al diseñar sistemas de control, con frecuencia nos interesa seleccionar el vector de control $\mathbf{u}(t)$ tal que un índice de desempeño determinado se minimice. Se puede demostrar que un índice de desempeño cuadrático, en el que los lfmites de integración son 0 e ∞, de modo que

$$J = \int_0^\infty L(\mathbf{x}, \mathbf{u})dt$$

en donde $L(\mathbf{x}$, u) es una función cuadrática o una función hermitiana de x y u, producirá las leyes de control lineal; es decir

$$\mathrm{u(c)} = -\mathbf{Kx}(t)$$

en donde K es una matriz de $r \times n$, o

$$\begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \\ \\ u_r \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ k_{r1} & k_{r2} & \cdots & k_{rn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{vmatrix}$$

Por tanto, el diseño de los sistemas de control óptimo y los sistemas reguladores óptimos basados en tales índices de desempeño cuadráticos se reducen a la determinación de los elementos de la matriz K.

Una ventaja de usar el esquema de control óptimo cuadrático es que el sistema diseñado será estable, excepto en el caso en el que el sistema no es controlable. Al diseñar sistemas de control con base en la minimización de los índices de desempeño cuadrático& necesitamos resolver las ecuaciones de Riccati. MATLAB tiene un comando lqr que proporciona la solución a la ecuación de Riccati en tiempo continuo y determina la matriz de ganancias de realimentación óptima. En este capítulo diseñaremos sistemas de control mediante los índices de desempeño cuadráticos tanto en la forma analítica como mediante el calculo con MATLAB.

A continuación, consideraremos el problema de determinar el vector de control $\mathbf{u}(t)$ óptimo para el sistema descrito mediante la ecuación (13-15) y el índice de desempeño obtenido mediante

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^*\mathbf{Qx} + \mathbf{u}^*\mathbf{Ru})dt \tag{13-16}$$

en donde Q es una matriz hermitiana o simétrica real definida positiva (o semidefinida positiva), R es una matriz hermitiana o simétrica real definida positiva y u no está restringida. El sistema de control óptimo se basa en minimizar el índice de desempeño. Tal sistema es estable. Entre muchos enfoques diferentes para la solución de este tipo de problema, presentaremos aquí uno basado en el segundo método de Liapunov.

Observe que, en el análisis de los problemas de control óptimo cuadrático siguientes usamos los índices de desempeño cuadráticos complejos (los índices hermitianos de desempeño), en lugar de los índices de desempeño cuadráticos reales, dado que los primeros incluyen estos últimos como un caso especial. Para los sistemas con vectores reales y matrices reales, $\int_0^\infty (\mathbf{x}^*\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^*\mathbf{R}\mathbf{u})\, dt$ es igual a $\int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u})\, dt$.

Optimización de un sistema de control mediante el segundo método de Liapunov. Por lo general, la estabilidad de los sistemas de control se examina una vez que se han diseñado. Sin embargo, también es posible formular primero las condiciones de estabilidad y después diseñar el sistema dentro de las limitaciones así establecidas. Si se usa el segundo método de Liapunov con el fin de asentar la base para el diseño de un controlador óptimo, se confirma que el sistema va a funcionar; es decir, la salida del sistema se conduce en forma continua hacia su valor deseado. Por tanto, el sistema diseñado tiene una configuración con características de estabilidad inherentes. (Observe que si el sistema no es controlable entonces no se aplica el control óptimo cuadrático. Véase el ejemplo 13– 10.)

Para una clase amplia de los sistemas de control, se puede mostrar una relación directa entre las funciones de Liapunov y los índices cuadráticos de desempeño usados en las síntesis de los sistemas de control óptimo. Empezaremos el enfoque de Liapunov para la solución de los problemas de optimización considerando un caso simple, conocido como problema de optimización de parámetros.

El problema de optimización de parámetros resuelto mediante el segundo método de Liapunov. A continuación, analizaremos una relación directa entre las funciones de Liapunov y los índices cuadráticos de desempeño y resolveremos el problema de optimización de parámetros a partir de esta relación. Consideremos el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

en el que todos los valores característicos de A tienen partes reales negativas, o el origen x = 0 es asintóticamente estable. (Consideraremos que dicha matriz A es estable.) Suponemos que la matriz A contiene un parámetro (más) ajustable. Se quiere minimizar el índice de desempeño siguiente:

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^*\mathbf{Q}\mathbf{x}\, dt$$

en el que Q es una matriz hermitiana o simétrica real definida positiva (o semidefinida positiva). Por tanto, el problema se convierte en determinar los valores de los parámetros ajustables para minimizar el índice de desempeño.

Ahora mostraremos que una función de Liapunov se usa efectivamente en la solución de este problema. Supongamos que

$$\mathbf{x}^*\mathbf{Q}\mathbf{x} = -\frac{d}{dt}(\mathbf{x}^*\mathbf{P}\mathbf{x})$$

en donde P es una matriz hermitiana o simétrica real definida positiva. En este caso, obtenemos

$$\mathbf{x}^*\mathbf{Q}\mathbf{x} = -\dot{\mathbf{x}}^*\mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}^*\mathbf{A}^*\mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} = -\mathbf{x}^*(\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x}$$

Mediante el segundo método de Liapunov, sabemos que, para una Q determinada, existe **P,** si **A** es estable, tal que

$$\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q} \tag{13-17}$$

Por tanto, determinamos los elementos de P a partir de esta ecuación.

El índice de desempeño J se calcula como

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^*\mathbf{Q}\mathbf{x}\,dt = -\mathbf{x}^*\mathbf{P}\mathbf{x}\Big|_0^\infty = -\mathbf{x}^*(\infty)\mathbf{P}\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{x}^*(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0)$$

Dado que todos los valores característicos de A tienen partes reales negativas, tenemos que $\mathbf{x}(\infty) \to 0$. Por tanto, obtenemos

$$J = \mathbf{x}^*(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0) \tag{13-18}$$

Así, el índice de desempeño J se obtiene en términos de la condición inicial x(O) y P, que se relaciona con A y Q mediante la ecuación (13-17). Por ejemplo, si un parámetro del sistema se va a ajustar para minimizar el índice de desempeño J, entonces esto se consigue minimizando $\mathbf{x}^*(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0)$ con respecto al parámetro en cuestión. Dado que x(O) es la condición inicial determinada y Q también se proporciona, P es una función de los elementos de A. Por tanto, este proceso de minimización producirá el valor óptimo del parámetro ajustable.

Es importante considerar que el valor óptimo de este parámetro depende, en general, de la condición inicial x(O). Sin embargo, si x(O) sólo tiene un componente diferente de cero, por ejemplo, $x_1(0) \neq 0$ y las otras condiciones iniciales son cero, el valor óptimo del parámetro no depende del valor numérico de $x_1(0)$. (Véase el ejemplo siguiente.)

EJEMPLO 13-8 Considere el sistema de la figura 13-6. Determine el valor del factor de amortiguamiento relativo $\zeta > 0$ tal que, cuando el sistema está sujeto a un escalón unitario r(t) = l(t) el índice de desempeño siguiente se minimice:

$$J = \int_{0+}^\infty (e^2 + \mu\dot{e}^2)\,dt \qquad (\mu > 0)$$

en donde e es la señal de error y se obtiene a partir de e = r $-c$. Se supone que el sistema está inicialmente en reposo.

A partir de la figura 13-6, encontramos que

$$\frac{C(s)}{\mathrm{R}(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

o bien

$$\ddot{c} + 2\zeta\dot{c} + c = r$$

En términos de la señal de error e, obtenemos

$$\ddot{e} + 2\zeta\dot{e} + \mathrm{e} = \ddot{r} + 2\zeta\dot{r}$$

Dado que la entrada $r(t)$ es una entrada escalón unitario, tenemos que $\dot{r}(0+) = 0$, $\ddot{r}\ (0+) = 0$. Por tanto, para $t \geq 0+$, tenemos

$$\ddot{e} + 2\zeta\dot{e} + \mathrm{e} = 0, \qquad e(0+) = 1, \qquad \dot{e}(0+) = 0$$

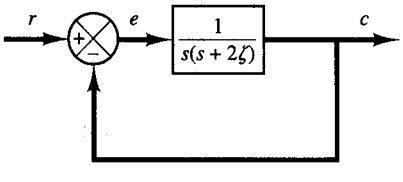


Figura 13-6
Sistema de control.

Ahora defina las variables de estado del modo siguiente:

$$x_1 = e$$

$$x_2 = \dot{e}$$

Así, la ecuación de estado se vuelve

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix}$$

El índice de desempeño J puede reescribirse como

$$J = \int_{0+}^{\infty} (e^2 + \mu\dot{e}^2)\, dt = \int_{0+}^{\infty} (x_1^2 + \mu x_2^2)\, dt$$

$$= \int_{0+}^{\infty} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} dt$$

$$= \int_{0+}^{\infty} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}\, dt$$

en donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Dado que A es una matriz estable, remitiéndonos a la ecuación (13− 18), el valor de J se obtiene mediante

$$J = \mathbf{x}^T(0+)\mathbf{P}\mathbf{x}(0+)$$

en donde **P** se determina a partir de

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q} \qquad \textbf{(13-19)}$$

La ecuación (13 − 19) puede reescribirse como

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

Esta ecuación produce las tres ecuaciones siguientes:

$$-2p_{12} = -1$$

$$p_{11} - 2\zeta p_{12} - p_{22} = 0$$

$$2p_{12} - 4\zeta p_{22} = -\mu$$

Resolviendo para las p_{ij} en estas tres ecuaciones, obtenemos

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta + \dfrac{1+\mu}{4\zeta} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1+\mu}{4\zeta} \end{bmatrix}$$

El índice de desempeño J se obtiene mediante

$$J = \mathbf{x}^T(0+)\mathbf{P}\mathbf{x}(0+)$$
$$= \left(\zeta + \frac{1+\mu}{4\zeta}\right)x_1^2(0+) + x_1(0+)x_2(0+) + \frac{1+\mu}{4\zeta}x_2^2(0+)$$

Sustituyendo las condiciones iniciales $x_1(0+) = 1, x_2(0+) = 0$ en esta última ecuación, obtenemos

$$J = \zeta + \frac{1+\mu}{4\zeta}$$

Para minimizar J con respecto a ζ establecemos $\partial J/\partial\zeta = 0$, o bien

$$\frac{\partial J}{\partial \zeta} = 1 - \frac{1+\mu}{4\zeta^2} = 0$$

Esto produce

$$\zeta = \frac{\sqrt{1+\mu}}{2}$$

Por tanto, el valor óptimo de ζ es $\sqrt{1+\mu}/2$. Por ejemplo, si $\mu = 1$, el valor óptimo de ζ es $\sqrt{2}/2$ 0 0.707.

Problemas de control óptimo cuadrático. Ahora consideraremos el problema de control óptimo que, dadas las condiciones del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathrm{Bu} \tag{13-20}$$

determina la matriz K del vector de control óptimo

$$\mathrm{u(c)} = \mathrm{-Kx(c)} \tag{13-21}$$

a fin de minimizar el índice de desempeño

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^*\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^*\mathbf{R}\mathbf{u})dt \tag{13-22}$$

en donde Q es una matriz hermitiana o simétrica real definida positiva (o semidefinida positiva) y R es una matriz hermitiana o simétrica real definida positiva. Observe que el segundo término del segundo miembro de la ecuación (13-22) considera el gasto de energía de las señales de control. Las matrices Q y R determinan la importancia relativa del error y del gasto de este sistema. En este problema, suponemos que el vector de control $\mathbf{u}(t)$ no está restringido.

Como se verá después, la ley de control lineal obtenida mediante la ecuación (13-21) es la ley del control óptimo. Por tanto, si se determinan los elementos desconocidos de la matriz K para minimizar el índice de desempeño, entonces u(t) = $-\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ es óptima para cualquier estado inicial x(O). El diagrama de bloques que muestra la configuración óptima aparece en la figura 13-7.

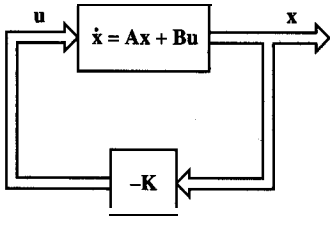


Figura 13-7
Sistema de control óptimo.

Ahora resolveremos el problema de estabilización. Sustituyendo la ecuación (13-21) dentro de la ecuación (13−20), obtenemos

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}$$

En las deducciones siguientes, suponemos que la matriz A − BK es estable, o que los valores característicos de A − BK tienen partes reales negativas.

Sustituir la ecuación (13-21) dentro de la ecuación (13-22) produce

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^*\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{x}^*\mathbf{K}^*\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{x})dt$$

$$= \int_0^\infty x^*(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^*\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x}dt$$

Siguiendo el análisis obtenido al resolver el problema de optimización de parámetros, establecemos

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^*\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x} = -\frac{d}{dt}(\mathbf{x}^*\mathbf{P}\mathbf{x})$$

en donde P es una matriz hermitiana o simétrica real definida positiva. Así, obtenemos

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^*\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x} = -\dot{\mathbf{x}}^*\mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}^*[(\mathbf{A} - \mathrm{BK})^*\mathrm{P} + \mathrm{P}(\mathrm{A} - \mathrm{BK})]\ \mathrm{x}$$

Comparando ambos miembros de esta última ecuación y considerando que la misma debe ser válida para cualquier x, requerimos que

$$(\mathrm{A} \quad \mathrm{BK})^*\mathrm{P} + \mathrm{P}(\mathrm{A} \quad \mathrm{BK}) = -(\mathrm{Q} + \mathrm{K}^*\mathrm{RK}) \qquad (13\text{-}23)$$

Mediante el segundo método de Liapunov, si A − BK es una matriz estable, existe una matriz P definida positiva que satisface la ecuación (13-23).

Por tanto, nuestro procedimiento se basa en determinar los elementos de P a partir de esta ecuación y ver si es definida positiva. (Observe que más de una matriz P puede satisfacer esta condición. Si el sistema es estable, siempre existe una matriz P definida positiva que satisface esta ecuación. Esto significa que, si despejamos la ecuación y encontramos una matriz P definida positiva, el sistema es estable. Otras matrices P que satisfacen esta ecuación no son definidas positivas y deben descartarse.)

El índice de desempeño J se calcula como

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^*(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^*\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x}\ dt = -\mathbf{x}^*\mathbf{P}\mathbf{x}\Big|_0^\infty = -\mathbf{x}^*(\infty)\mathbf{P}\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{x}^*(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0)$$

Dado que se supone que todos los valores característicos de A BK tienen partes reales negativas, tenemos que $\mathbf{x}(\infty) \to 0$. Por tanto, obtenemos

$$J = \mathbf{x}^*(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0) \qquad (13\text{-}24)$$

Así, el índice de desempeño J se obtiene en términos de la condición inicial x(O) y P.

Para obtener la solución al problema de control óptimo cuadrático, avanzamos del modo siguiente: dado que se ha supuesto que R es una matriz hermitiana o simétrica real definida positiva, escribimos

$$\mathrm{R} = \mathrm{T}^*\mathrm{T}$$

en donde T es una matriz no singular. Así, la ecuación (13 -23) se escribe como

$$(\mathrm{A}^* - \mathrm{K}^*\mathrm{B}^*)\mathrm{P} + \mathrm{P}(\mathrm{A} - \mathrm{BK}) + \mathrm{Q} + \mathrm{K}^*\mathrm{T}^*\mathrm{TK} = 0$$

que puede reescribirse como

$$\mathbf{A^*P + PA + [TK - (T^*)^{-1}B^*P]^*[TK - (T^*)^{-1}B^*P] - PBR^{-1}B^*P + Q = 0}$$

La minimización de J con respecto a $\mathbf{K}$ requiere de la minimización de

$$\mathbf{x^*[TK - (T^*)^{-1}B^*P]^*[TK - (T^*)^{-1}B^*P]\,x}$$

con respecto a $\mathbf{K}$. (Véase el problema A-13-8.) Dado que esta última expresión es no negativa, el mínimo ocurre cuando es cero, o cuando

$$\mathbf{TK = (T^*)^{-1}B^*P}$$

Por tanto,

$$\mathbf{K = T^{-1}(T^*)^{-1}B^*P = R^{-1}B^*P} \tag{13-25}$$

La ecuación (13-25) produce la matriz óptima $\mathbf{K}$. Así, la ley del control óptimo para el problema de control óptimo cuadrático es lineal cuando el índice de desempeño se obtiene mediante la ecuación (13-22) y se llega a ella mediante

$$\mathbf{u(t) = -Kx}(t) = -\mathbf{R^{-1}B^*Px}(t)$$

La matriz $\mathbf{P}$ de la ecuación (13-25) debe satisfacer la ecuación (13-23) o la ecuación reducida siguiente:

$$\mathbf{A^*P + PA - PBR^{-1}B^*P + Q = 0} \tag{13-26}$$

La ecuación (13 -26) se denomina ecuación matricial reducida de Riccati. Los pasos del diseño se plantean del modo siguiente:

1. Resuelva la ecuación (13−26), ecuación matricial reducida de Riccati, para la matriz $\mathbf{P}$. [Si existe una matriz $\mathbf{P}$ definida positiva (ciertos sistemas pueden no tener una matriz $\mathbf{P}$ definida positiva), el sistema es estable o la matriz $\mathbf{A - BK}$ es estable.]
2. Sustituya esta matriz $\mathbf{P}$ dentro de la ecuación (13−25). La matriz $\mathbf{K}$ resultante es la matriz óptima.

Un diseño basado en este enfoque se obtiene en el ejemplo 13-9. Observe que, si la matriz $\mathbf{A}$ -2 $\mathbf{BK}$ es estable, el método actual siempre produce el resultado correcto.

Existe un enfoque alternativo para la determinación de la matriz de ganancias de realimentación $\mathbf{K}$ óptima. Los pasos del diseño basados en el enfoque alternativo son los siguientes:

1. Determine la matriz $\mathbf{P}$ que satisfaga la ecuación (13-23) como una función de $\mathbf{K}$.
2. Sustituya la matriz $\mathbf{P}$ dentro de la ecuación (13-24). En este caso, el índice de desempeño se convierte en una función de $\mathbf{K}$.
3. Determine los elementos de $\mathbf{K}$ tales que el índice de desempeño J se minimice. La minimización de J con respecto a los elementos de k_{ij} de $\mathbf{K}$ se consigue estableciendo $\partial J/\partial k_{ij}$ igual a cero y despejando los valores óptimos de k_{ij}.

Para los detalles de este enfoque de diseño, véanse los problemas A-13-11 y A-13-12. Este enfoque no es conveniente cuando el número para los elementos k_{ij} no es pequeño.

Por último, observe que si el índice de desempeño se obtiene en términos del vector de salida, en lugar del vector de estado, es decir,

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{y}^*\mathbf{Q}\mathbf{y} + \mathbf{u}^*\mathbf{R}\mathbf{u})dt$$

entonces el índice se modifica mediante la ecuación de salida

$$y = cx$$

a

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^*\mathbf{C}^*\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{u}^*\mathbf{R}\mathbf{u})dt \tag{13-27}$$

y los pasos del diseño que se presentaron en esta sección se aplican para obtener la matriz K óptima.

EJEMPLO 13-9 Considere el sistema de la figura 13-8. Suponiendo que la señal de control es

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$$

determine la matriz de ganancias de realimentación óptima K tal que el índice de desempeño siguiente se minimice:

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + u^2)dt$$

en donde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \qquad (\mu \geq 0)$$

A partir de la figura 13-8, encontramos que la ecuación de estado para la planta es

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Demostraremos el uso de la ecuación matricial reducida de Riccati en el diseño del sistema de control óptimo. Despejemos la ecuación (13−26), que puede reescribirse como

$$A^*P + PA - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P} + Q = 0$$

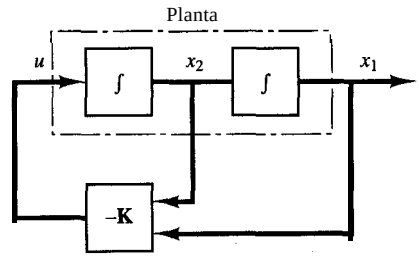


Figura 13-8
Sistema de control.

Considerando que la matriz A es real y que la matriz Q es simétrica real, la matriz P es una matriz simétrica real. Por tanto, esta última ecuación se escribe como

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}[1]\,[0 \quad 1]\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Esta ecuación se simplifica a

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ p_{11} & p_{12}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & p_{11}\\ 0 & p_{12}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}p_{12}^2 & p_{12}p_{22}\\ p_{12}p_{22} & p_{22}^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

a partir de la cual obtenemos las tres ecuaciones siguientes:

$$1 - p_{12}^2 = 0$$
$$p_{11} - p_{12}p_{22} = 0$$
$$\mu + 2p_{12} - p_{22}^2 = 0$$

Despejando estas tres ecuaciones simultáneas para p_{11}, p_{12} y p_{22}, para lo cual es necesario que P sea definida positiva, obtenemos

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{\mu+2} & 1\\ 1 & \sqrt{\mu+2}\end{bmatrix}$$

Remitiéndonos a la ecuación (13 −25), la matriz de ganancias de realimentación óptima K se obtiene como

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P}$$
$$= [1]\,[0 \quad 1]\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{12}\end{bmatrix}\ \text{pu}]$$

$$= [p_{12} \quad \mathbf{P221}$$
$$= [1 \quad \sqrt{\mu+2}]$$

Así, la señal de control óptimo es

$$u = -Kx = -x_1 - \sqrt{\mu+2}\,x_2 \tag{13-28}$$

Observe que la ley de control **obtenida** mediante la ecuación (13-28) produce un resultado óptimo para cualquier estado inicial bajo el índice de desempeño determinado. La figura 13-9 es el diagrama de bloques para este sistema.

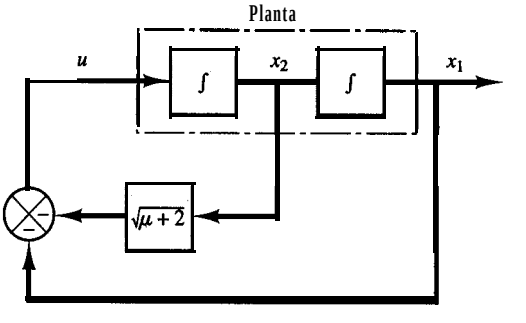


Figura 13-9
Control óptimo de la planta que aparece en la figura 13-8.

13-6 SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO CUADRÁTICO CON MATLAB

En MATLAB, el comando

```
lqr(A,B,Q,R)
```

resuelve el problema del regulador lineal cuadrático en tiempo continuo y la ecuación de Riccsti asociada. Este comando calcula la matriz de ganancias de realimentación óptima $\mathbf{K}$ tal que la ley de control de realimentación

$$u = - K x$$

minimice el índice de desempeño

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}'\mathbf{R}\mathbf{u})dt$$

sujeto a la ecuación de restricción

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

Otro comando

```
[K,P,E] = lqr(A,B,Q,R)
```

también devuelve la matriz $\mathbf{P}$, única solución definida positiva para la ecuación matricial de Riccati asociada:

$$\mathbf{0=PA+A*P-PBRB*P+Q}$$

Si la matriz $\mathbf{A - BK}$ es estable, siempre existe una solución $\mathbf{P}$ definida positiva. Los polos en lazo cerrado o los valores característicos de $\mathbf{A - BK}$ también se obtienen mediante este comando.

Es importante señalar que para cierta matriz de sistemas, $\mathbf{A - BK}$ no puede hacerse estable, independientemente de la $\mathbf{K}$ que se elija. En este caso, no existe una matriz $\mathbf{P}$ definida positiva para la ecuación matricial de Riccati. Entonces, los comandos

```
K = lqr(A,B,Q,R)
[K,P,E] = lqr(A,B,Q,R)
```

no producen la solución. Véase el programa MATLAB 13-1.

EJEMPLO 13-10 Considere el sistema definido mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Demuestre que el sistema no se estabiliza mediante el esquema de control de realimentación del estado

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

sin importar cuál matriz K se seleccione. (Observe que el estado de este sistema es no controlable.) Defina

$$\mathbf{K} = [k_1 \; k_2]$$

Así

$$\mathbf{A}-\mathbf{BK} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2]$$

$$= \begin{bmatrix} -1 - k_1 & 1 - k_2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la ecuación característica se vuelve

$$|s\mathbf{I} - \mathrm{A} + \mathbf{BK}| = \begin{matrix} s + 1 + k_1 & -1 + k_2 \\ 0 & s - 2 \end{matrix}$$

$$= (s + 1 + k_1)(s - 2) = 0$$

Los polos en lazo cerrado se ubican en

$$s = -1 - k_1, \qquad s = 2$$

Dado que el polo en $s = 2$ está en el semiplano derecho del plano s, el sistema es inestable con cualquier matriz K que se seleccione. Por tanto, las técnicas para el control óptimo cuadrático no se aplican en este sistema.

Supongamos que las matrices Q y R del índice de desempeño cuadrático se obtienen mediante

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{R} = [1]$$

y que escribimos el programa MATLAB 13 – 1. La solución MATLAB resultante es

```
K = [NaN NaN]
```

(NaN significa 'no es un número'.) Cuando no existe la solución para un problema de control óptimo cuadrático, MATLAB nos dice que la matriz K está formada por NaN.

Programa MATLAB 13–1

```
% --------- Diseño de un sistema regulador óptimo cuadrático ---------

% ***** Determinación de la matriz de ganancias de realimentación
% K para un control óptimo cuadrático *****

% ***** Introduzca la matriz de estado A y la matriz de control B *****

A = [-1   1;0   2];
B = [1;0];

% ***** Introduzca las matrices Q y R del índice de
% desempeño cuadrático *****

Q = [1   0;0   1];
R = [1];
```

```
% ***** Para obtener una matriz de ganancias de realimentación
% óptima K introduzca el comando siguiente *****

K = lqr(A,B,Q,R)

Warning: Matrix is singular to working precision.

K =

      NaN    NaN

% ***** Si introducimos el comando [K,P,E] = lqr(A,B,Q,R), en tal caso *****

[K,P,E] = lqr(A,B,Q,R)

Warning: Matrix is singular to working precision.

K =

  NaN    NaN

P =

  -Inf   -Inf
  -Inf   -Inf

E =

  - 2.0000
  - 1.4142
```

EJEMPLO 13-11 Considere el sistema descrito mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El índice de desempeño J se obtiene mediante

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + u'Ru)dt$$

en donde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = [1]$$

Suponga que se usa el control u siguiente.

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

Determine la matriz de ganancias de realimentación óptima K.

La matriz de ganancias de realimentación óptima K se obtiene resolviendo la ecuación de Riccati siguiente para una matriz P definida positiva.

$$A'P + PA - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P} + Q = 0$$

El resultado es

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sustituir esta matriz P en la ecuación siguiente produce la matriz K óptima:

$$K = R^{-1}B'P$$

$$= [1]\ [0\ \ 1] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [1\ \ 1]$$

Por tanto, la señal de control óptimo se obtiene mediante

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -x_1 - x_2$$

El programa MATLAB 13-2 también produce la solución para este problema.

Programa MATLAB 13-2

```
% ---------- Diseño de un sistema regulador óptimo cuadrático ----------

% ***** Determinación de una matriz de ganancias de realimentación
% K para un control óptimo cuadrático *****

% ***** Introduzca la matriz de estado A y la matriz de control B *****

A = [0  1.0  -1];
B = [0;1];

% ***** Introduzca las matrices Q y R del índice
% de desempeño cuadrático *****

Q = [1  0;0  1];
R = [1];

% ***** La matriz de ganancias de realimentación óptima K (si existe
% la matriz K) se obtiene introduciendo el comando siguiente *****

K = lqr(A,B,Q,R)

K =

    1.0000    1.0000
```

WEMPLO 13-12 Considere el sistema obtenido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -35 & -27 & -9 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El índice de desempeño J se obtiene mediante

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + u'Ru)dt$$

en donde

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = [1]$$

Obtenga la matriz de solución P definida positiva de la ecuación de Riccati, la matriz de ganancias de realimentación óptima K y los valores característicos de la matriz A-BK.

El programa MATLAB 13-3 resolverá este problema.

Programa MATLAB 13-3

```
% ------- Diseño de un sistema regulador óptimo cuadrático -------

%***** Determinación de una matriz de ganancias de realimentación
% K para el control óptimo cuadrático *****

***** Introduzca la matriz de estado A y la matriz de control B *****
A = [0   1   0;0   0   1;-35   -27   -9];
B = [0;0;1];

% ***** Introduzca las matrices Q y R del índice
% de desempeño cuadrático *****

Q = [1   0   0;0   1   0;0   0   1];
R = [1];

% ***** La matriz de ganancias de realimentación óptima K, la solución
% de la ecuación de Riccati y los polos en lazo cerrado (es decir,
% los valores característicos de A-BK) se obtienen introduciendo
% el comando siguiente *****

[K,P,E] = lqr(A,B,Q,R)
```

```
K =

    0.0143    0.1107    0.0676

P =

    4.2625    2.4957    0.0143
    2.4957    2.8150    0.1107
    0.0143    0.1107    0.0676

E =
  - 5.0958
  - 1.9859 + 1.7110i
  - 1.9859 - 1.7110i
```

EJEMPLO 13-13 Considere el mismo sistema analizado en el ejemplo 12-7. El sistema se define mediante las siguientes ecuaciones en el espacio de estados:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = cx + Du$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C=[1 \quad 0 \quad 0], \quad D = [0]$$

Suponga que la seiíal de control u se obtiene mediante

$$u = k_1(r - x_1) - (k_2x_2 + k_3x_3) = k_1r - (k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3)$$

como se aprecia en la figura 13 - 10. Al determinar una ley de control óptimo, suponemos que la entrada es cero, o $r = 0$.

Determinemos la matriz de ganancias de realimentación del estado K, en donde

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

tal que el índice de desempeño siguiente se minimice:

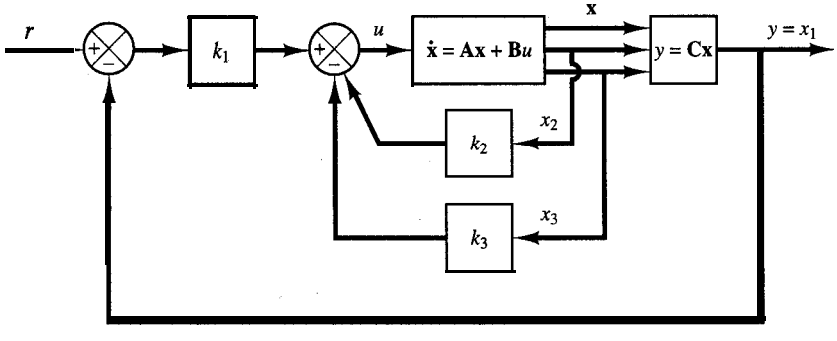


Figura 13-10
Sistema de control.

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + u'Ru)dt$$

en donde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} \end{bmatrix}, \qquad R = 1, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}$$

Para obtener una respuesta rápida, q_{11} debe ser suficientemente grande comparada con q_{22}, q_{33} y R. En este problema seleccionamos

$$q_{11} = 100, \qquad q_{22} = q_{33} = 1, \qquad R = 0.01$$

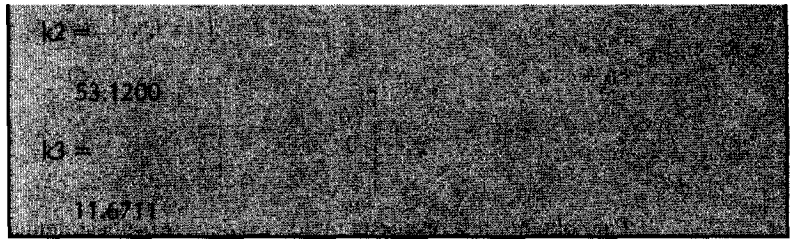
Para resolver este problema con MATLAB, usamos el comando

```
K = lqr(A,B,Q,R)
```

El programa MATLAB 13-4 produce la solución para este problema.

Programa MATLAB 13–4

```
% -------- Diseño de un sistema de control óptimo cuadrático ---------

% ***** Determinaremos la matriz de ganancias de realimentación
% óptima K que minimice el índice de desempeño J *****

% *****Introduzca la matriz de estado A y la matriz de control B *****

A = [0   1   0;0   0   1;0   -2   -3];
B = [0;0;1];

% ***** Introduzca las matrices Q y R del índice
% de desempeño cuadrático J *****

Q=[100   0   0;0   1   0;0   0   1];
R=[0.01];

% *****Para obtener la matriz de ganancias de realimentación
% de estado K, introduzca el comando siguiente *****

K = lqr(A,B,Q,R)

K =

   100.0000    53.1200    11.6711

k1 =K(1),k2 = K(2),k3 = K(3)

k1 =

   100.0000
```



A continuación investigaremos la característica de respuesta escalón del sistema diseñado a partir de la matriz K determinada de tal modo. La ecuación de estado para el sistema diseñado es

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(-\mathbf{K}\mathbf{x} + k_1 r) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}k_1 r\end{aligned}$$

y la ecuación de salida es

$$y = cx = [1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

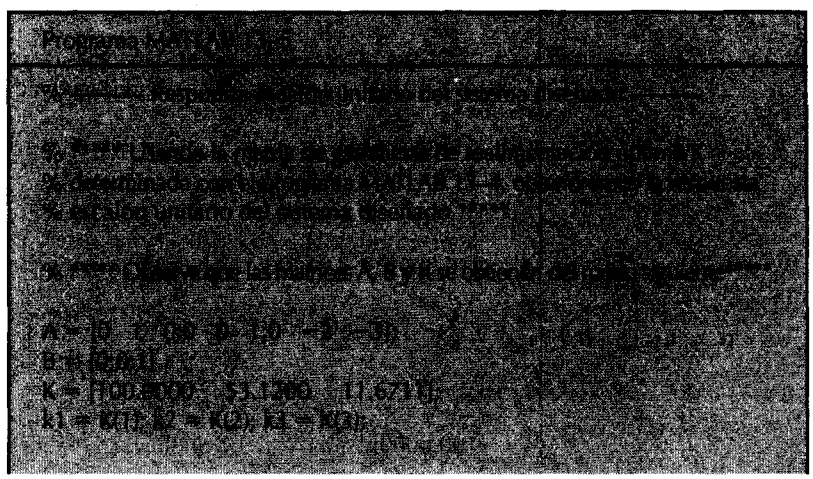
Para obtener la respuesta escalón unitario, use el comando siguiente:

$$[y,x,t] = \text{step}(AA,BB,CC,DD)$$

en donde

$$AA = A - BK, \qquad BB = \mathbf{B}k_1, \qquad CC = c, \qquad DD = D$$

El programa MATLAB 13-5 produce la respuesta escalón unitario del sistema diseñado. La figura 13-11 muestra la salida y contra el tiempo *t*. La figura 13-12 muestra en un diagrama las curvas de respuesta x_1, x_2 y x_3 contra *t*.



```
% ***** La ecuación de estado para el sistema diseñado es
% xpunto = (A - BK)x + Bk*r y la ecuación de salida es
% y = Cx + Du, en donde las matrices C y B se obtienen mediante *****

C = [1   0   0];
D = [0];

% ***** Defina la matriz de estado, la matriz de control, la matriz
% de salida y la matriz de transmisión directa de los sistemas
% diseñados, como AA, BB, CC, y DD *****

AA = A - B*K;
BB = B*kr;
CC = C;
DD = D;

% ***** Para obtener la curva de respuesta escalón unitario
% para los primeros 6 segundos, introduzca el comando siguiente *****

t = 0:0.01:6;
[y,x,t] = step(AA,BB,CC,DD,1,t);

% ***** Para graficar la curva de respuesta escalón unitario y (= x1)
% contra t, introduzca el comando siguiente *****

plot(t,y)
grid
title('Respuesta escalón unitario del sistema de control óptimo cuadrático')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salida y = x1')

% ***** Para graficar las curvas x1, x2, x3 contra t en un
% diagrama, introduzca el comando siguiente *****

plot(t,x)
grid
title('Curvas de respuesta x1, x2, x3, contra t')
xlabel('t Seg')
ylabel('x1,x2,x3')
text(2.6,1.35,'x1')
text(1.2,1.5,'x2')
text(0.6,3.5,'x3')
```

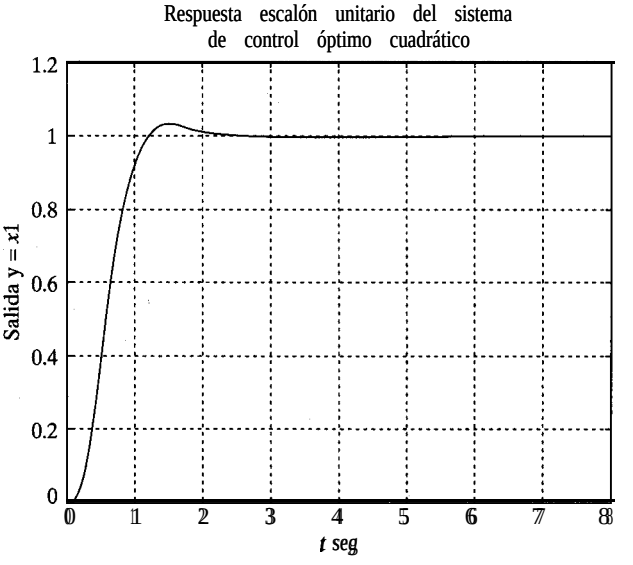


Figura 13 -11
Curva de respuesta escalón unitario de un sistema de control óptimo cuadrático.

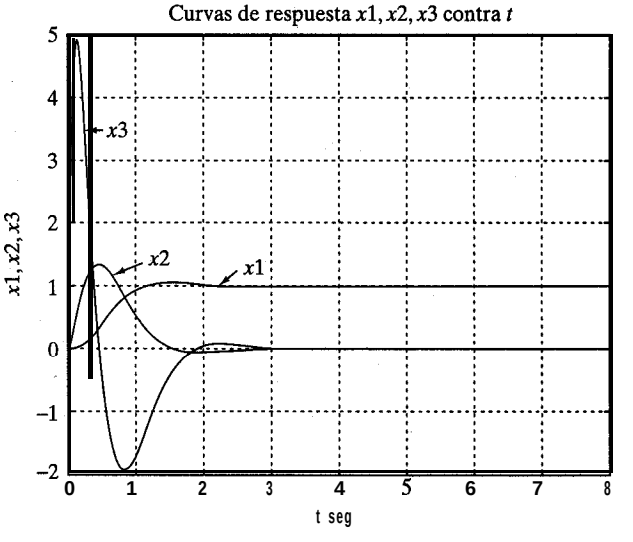


Figura 13–12
Curvas de respuesta x_1, x_2 y x_3 contra t.

Comentarios finales

1. Dado cualquier estado inicial $\boldsymbol{x}(t_0)$, el problema. de control óptimo es encontrar un vector de control permisible u(t) que transfiera el estado a la región deseada en el espacio de estados y para el cual el índice de desempeño se minimice. Para la existencia de un vector de control óptimo u(t), el sistema debe ser de estado completamente controlable.

2. El sistema que minimiza (o maximiza, según el caso) el índice de desempeño seleccionado es, por definición, óptimo. Aunque en muchas aplicaciones prácticas el controlador puede no tener nada que ver con una condición "óptima", lo importante es que el diseño basado en el índice de desempeño cuadrático produzca un sistema de control estable.

3. La característica de una ley de control óptimo basada en un índice de desempeño cuadrático es que se trata de una función lineal de las variables de estado, lo cual implica

que necesitamos realimentar todas las variables de estado. Esto requiere que todas estas variables estén disponibles para la realimentación. Si no lo están será necesario emplear un observador de estado para estimar las variables de estado no medibles y usar valores estimados a fin de generar señales de control óptimo.

4. Cuando el sistema de control óptimo se diseña en el dominio del tiempo, es conveniente investigar las características de la respuesta en frecuencia para compensar los efectos del ruido. Las características de la respuesta en frecuencia del sistema deben ser tales que el sistema se atenúe significativamente en el rango de frecuencias en el que se esperan ruido y resonancia de los componentes. (Para compensar los efectos del ruido, en algunos casos debemos modificar la configuración óptima y aceptar un desempeño menor que óptimo o modificar el índice de desempeño.)

5. Si el límite superior de integración en el índice de desempeño J obtenido mediante la ecuación (13-22) es finito, se demuestra que el vector de control óptimo es todavía una función lineal de las variables de estado, pero con coeficientes de variación en el tiempo. (Por tanto, la determinación del vector de control óptimo implica la de las matrices óptimas variantes con el tiempo.)

EJEMPLO DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

A-13-1. Considere el sistema descrito mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Determine la estabilidad del estado de equilibrio, x = 0.

Solución. En lugar de seleccionar Q = 1, demostremos el uso de una matriz semidefinida positiva Q para despejar la ecuación de Liapunov.

$$\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathrm{PA} = -\mathrm{Q} \tag{13-29}$$

Por ejemplo, seleccionemos

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En este caso el rango de

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{1/2} \\ \mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es 2. Por tanto, debemos usar esta matriz Q y resolver la ecuación (13−29), que puede reescribirse como

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que puede simplificarse a

$$\begin{bmatrix} -2p_{12} & p_{11} - 2p_{12} - p_{22} \\ p_{11} - 2p_{12} - p_{22} & 2p_{12} - 4p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con lo cual obtenemos

$$p_{11} = 5, \qquad p_{12} = 2, \qquad p_{22} = 1$$

o bien

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz P es definida positiva. Por tanto, el estado de equilibrio, x = 0, es asintóticamente estable.

A-13-2. Determine la estabilidad del estado de equilibrio del sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 - j \\ -1 + j & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Solución. En este problema, tanto el vector de estado como la matriz de estado son complejos. Al determinar la estabilidad del estado de equilibrio, origen de este sistema, despejamos la ecuación de Liapunov **A*P** + **PA** = − Q para **P,** que es una matriz hermitiana:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ \bar{p}_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

Seleccionemos Q = **I.** Así,

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & -j \\ -1 + j & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ \bar{p}_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ \bar{p}_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -j \\ -1 + j & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a partir de lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} 4p_{11} + (1 - j)p_{12} + (1 - j)\bar{p}_{12} &= 1 \\ (1 - j)p_{11} + 5\bar{p}_{12} + (1 - j)p_{22} &= 0 \\ (1 - j)p_{11} + 5p_{12} + (1 - j)p_{22} &= 0 \\ (1 - j)p_{12} + (1 - j)\bar{p}_{12} + 6p_{22} &= 1 \end{aligned}$$

Observe **que, como** p_{11} y p_{22} son reales, la segunda y la tercera de las ecuaciones anteriores son equivalentes. Son conjugadas entre sí. Despejando estas ecuaciones para las p_{ij}, obtenemos

$$p_{11} = \frac{3}{8}, \qquad p_{12} = -\frac{1}{8}(1 + j), \qquad p_{22} = \frac{1}{4}$$

o bien

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} - j\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} + j\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Aplicando el criterio de Sylvester para la definidad positiva de la matriz **P,**

$$\frac{3}{8} > 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} - j\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} + j\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{16} > 0$$

encontramos que P es definida positiva. Por tanto, concluimos que el origen del sistema es asintóticamente estable.

A-13-3. Considere el sistema de segundo orden

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

en donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad (a_{ij} = \text{real})$$

Encuentre la matriz simétrica real P que satisfaga

$$\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{I}$$

Luego encuentre la condición de que **P** es definida positiva. (Observe que el hecho de que **P** sea definida positiva implica que el origen $\mathbf{x} = 0$ es asintóticamente estable en general.)

Solución. La ecuación

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

produce las tres ecuaciones simultáneas siguientes:

$$2(a_{11}p_{11} + a_{21}p_{12}) = -1$$

$$a_{11}p_{12} + a_{21}p_{22} + a_{12}p_{11} + a_{22}p_{12} = 0$$

$$2(a_{12}p_{12} + a_{22}p_{22}) = -1$$

Resolviendo para las p_{ij}, obtenemos

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2(a_{11} + a_{22})|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix} -(|\mathbf{A}| + a_{21}^2 + a_{22}^2) & a_{12}a_{22} + a_{21}a_{11} \\ a_{12}a_{22} + a_{21}a_{11} & -(|\mathbf{A}| + a_{11}^2 + a_{12}^2) \end{bmatrix}$$

P es definida positiva si

$$P_{11} = -\frac{|\mathbf{A}| + a_{21}^2 + a_{22}^2}{2(a_{11} + a_{22})|\mathbf{A}|} > 0$$

$$|\mathbf{P}| = \frac{(a_{11} + a_{22})^2 + (a_{12} - a_{21})^2}{4(a_{11} + a_{22})^2\,|\mathbf{A}|} > 0$$

a partir de lo cual obtenemos

$$|\mathbf{A}| > 0, \qquad a_{11} + a_{22} < 0$$

como las condiciones de que P es definida positiva.

A-13-4. Considere el movimiento de un vehículo espacial con respecto a los ejes principales de inercia. Las ecuaciones de Euler son

$$A\dot{\omega}_x - (B - C)\omega_y\omega_z = T_x$$

$$B\dot{\omega}_y - (C - A)\omega_z\omega_x = T_y$$

$$C\dot{\omega}_y - (A - B)\omega_x\omega_y = T_z$$

en donde *A, B* y C representan los momentos de inercia con respecto a los ejes principales; ω_x, ω_y y ω_z denotan las velocidades angulares con respecto a los ejes principales; y T_x, T_y y T_z son los pares de control.

Suponga que el vehículo espacial da vueltas en órbita. Se desea detener el desarreglo aplicando pares de control, que se supone que son

$$T_x = k_1 A\omega_x$$

$$T_y = k_2 B\omega_y$$

$$T_z = k_3 C\omega_z$$

Determine las condiciones suficientes para una operación asintóticamente estable del sistema.

Solución. Seleccionemos las variables de estado como

$$x_1 = \omega_x, \qquad x_2 = \omega_y, \qquad x_3 = \omega_z$$

Entonces las ecuaciones del sistema se convierten en

$$\dot{x}_1 - \left(\frac{B}{A} - \frac{C}{A}\right)x_2 x_3 = k_1 x_1$$

$$\dot{x}_2 - \left(\frac{C}{B} - \frac{A}{B}\right)x_3 x_1 = k_2 x_2$$

$$\dot{x}_3 - \left(\frac{A}{C} - \frac{B}{C}\right)x_1 x_2 = k_3 x_3$$

o bien

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1 & \frac{B}{A}x_3 & -\frac{C}{A}x_2 \\ -\frac{A}{B}x_3 & k_2 & \frac{C}{B}x_1 \\ \frac{A}{C}x_2 & -\frac{B}{C}x_1 & k_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$

El estado de equilibrio es el origen, o x = 0. Si seleccionamos

$$V(x) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^2 & 0 & 0 \\ 0 & B^2 & 0 \\ 0 & 0 & C^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= A^2x_1^2 + B^2x_2^2 + C^2x_3^2$$

= definida positiva

entonces la derivada con respecto al tiempo de $V(x)$ es

$$Q(x) = \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}$$

$$= \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} k_1 & -\frac{A}{B}x_3 & \frac{A}{C}x_2 \\ \frac{B}{A}x_3 & k_2 & -\frac{B}{C}x_1 \\ -\frac{C}{A}x_2 & \frac{C}{B}x_1 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^2 & 0 & 0 \\ 0 & B^2 & 0 \\ 0 & 0 & C^2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$+ \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} A^2 & 0 & 0 \\ 0 & B^2 & 0 \\ 0 & 0 & C^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & \frac{B}{A}x_3 & -\frac{C}{A}x_2 \\ -\frac{A}{B}x_3 & k_2 & \frac{C}{B}x_1 \\ \frac{A}{C}x_2 & -\frac{B}{C}x_1 & k_3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$= x^T \begin{bmatrix} 2k_1A^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2k_2B^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2k_3C^2 \end{bmatrix} 1\, x = -\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$$

Para una estabilidad asintótica, la condición suficiente es que Q sea definida positiva. Por tanto, requerimos que

$$k_1 < 0, \qquad k_2 < 0, \qquad k_3 < 0$$

Si las k_i son negativas, entonces, considerando que $V(x) \to \infty$ conforme $||\mathbf{x}|| \to \infty$, vemos que el estado de equilibrio es asintóticamente estable en general.

A-13-5. Considere el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

en el que x es un vector de estado (vector de dimensión *n)* y A es una matriz de coeficientes constantes de *n X* n. Suponga que el origen, x = 0, es el único estado de equilibrio. Una función de Liapunov posible para el sistema es

$$\mathbf{V(x)} = \mathbf{x}^*\mathbf{P}\mathbf{x}$$

La derivada con respecto al tiempo de $V(x)$ a lo largo de cualquier trayectoria es

$$\mathbf{ti(x)} = \mathbf{x}^*(\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x} = -\mathbf{x}^*\mathbf{Q}\mathbf{x}$$

en donde

$$\mathbf{Q} = -(\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})$$

Dada cualquier matriz Q hermitiana definida positiva (o simétrica real), si esta última ecuación se resuelve para la matriz **P** y se encuentra que es definida positiva, entonces el origen del sistema es asintóticamente estable. Si $V(x) = -\mathbf{x}^*\mathbf{Q}\mathbf{x}$ no se desvanece idénticamente a lo largo de cualquier trayectoria, entonces se selecciona Q como semidefinida positiva.

Demuestre que una condición necesaria y suficiente de que $\dot{V}(\mathbf{x})$ no se desvanezca idénticamente a lo largo de cualquier trayectoria [lo cual significa que $V(x) = 0$ sólo en x = 0] es que el rango de la matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{1/2} \\ \mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

sea *n.*

Solución. Suponga que, para cierta matriz Q semidefinida positiva, **P** resulta ser definida positiva. Dado que $V(x)$ se escribe como

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^*\mathbf{Q}\mathbf{x} = -\mathbf{x}^*\mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{x}$$

$\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ significa que

$$\mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{13-30}$$

Diferenciar la ecuación (13-30) con respecto a t produce

$$\mathbf{Q}^{1/2}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Si diferenciamos esta última ecuación una vez más, obtenemos

$$\mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Repitiendo este proceso de diferenciación, llegamos a

$$\mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{A}^{3}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Combinando las ecuaciones anteriores, obtenemos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{1/2} \\ \mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{A} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Una condición necesaria y suficiente de que x = 0 sea la solución de esta última ecuación es que

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{1/2} \\ \mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{A} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} = n \tag{13-31}$$

Por tanto, la ecuación (13-31) si se satisface, entonces $\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^*\mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{x}$ se vuelve cero sólo en x = 0. En otras palabras, $\dot{V}(\mathbf{x})$ no se desvanece idénticamente a lo largo de cualquier trayectoria, excepto en x = 0.

A-13-6. Considere el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

Supongaque

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0} \qquad \text{para toda } t$$

Suponga también que existe una función escalar $V(\mathbf{x}, t)$ que tiene primeras derivadas parciales continuas. Si $V(\mathbf{x}, t)$ satisface las condiciones

1. $V(\mathbf{x}, t)$ es definida positiva. Es decir, $V(\mathbf{0}, t) = 0$ y $V(\mathbf{x}, t) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|) > 0$ para toda $\mathbf{x} \neq 0$ y toda t, en donde α es una función escalar no decreciente continua tal que $\alpha(0) = 0$.
2. La derivada total $\dot{V}$ es negativa para toda $\mathbf{x} \neq 0$ y toda t, o $\dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq -\gamma(\|\mathbf{x}\|) < 0$ para toda $\mathbf{x} \neq 0$ y toda t, en donde γ es una función escalar no decreciente continua tal que $\gamma(0) = 0$.
3. Existe una función escalar no decreciente continua β tal que $\beta(0) = 0$ y, para toda t, $V(\mathbf{x}, t) \leq \beta(\|\mathbf{x}\|)$.
4. $\alpha(\|\mathbf{x}\|)$ tiende a infinito conforme $\|\mathbf{x}\|$ se incrementa indefinidamente o

$$\alpha(\|\mathbf{x}\|) \to \infty \qquad \text{conforme } \|\mathbf{x}\| \to \infty$$

de modo que el origen del sistema, x = 0, es uniforme y asintóticamente estable en general. (Éste es el teorema de la estabilidad principal de Liapunov.)

Compruebe este teorema.

Solución. Para comprobar la estabilidad uniforme y asintótica en general, necesitamos demostrar lo siguiente. (Nota: "uniforme" significa "independiente del tiempo".)

1. El origen es uniformemente estable.
2. Todas las soluciones son uniformemente limitadas.
3. Todas las soluciones convergen con el origen cuando $t \to \infty$ uniformemente en t_0 y $\|\mathbf{x}\| \leq 6$, en donde δ está fija pero es arbitrariamente grande. Es decir, dados dos valores reales $6 > 0$ y $\mu > 0$, existe un número real $T(\mu,\delta)$ tal que

$$\|\mathbf{x}_0\| \leq \delta$$

implica que

$$\|\boldsymbol{\phi}(t; \mathbf{x}_0, t_0)\| \leq \mu, \qquad \text{para toda } t \geq t_0 + T(\mu, \delta)$$

en donde $\boldsymbol{\phi}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ es la solución a la ecuación diferencial proporcionada.

Dado que β es continua y $\beta(0) = 0$, tomamos una $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $\beta(\delta) < \alpha(\epsilon)$ para cualquier $\epsilon > 0$. La figura 13–13 muestra las curvas $\alpha(\|\mathbf{x}\|), \beta(\|\mathbf{x}\|)$ y $V(x, t)$. Considerando que

$$V(\boldsymbol{\phi}(t; \mathbf{x}_0, t_0), t) - V(\mathbf{x}_0, t_0) = \int_{t_0}^{t} \dot{V}(\boldsymbol{\phi}(\tau; \mathbf{x}_0, t_0), \tau) d\tau < 0, \qquad t > t_0$$

si $\|\mathbf{x}_0\| \leq \delta$, y t_0 es arbitraria, tenemos que

$$\alpha(\epsilon) > \beta(\delta) \geq V(\mathbf{x}_0, t_0) \geq V(\boldsymbol{\phi}(t; \mathbf{x}_0, t_0), t) \geq \alpha(\|\boldsymbol{\phi}(t; \mathbf{x}_0, t_0)\|)$$

para toda $t \geq t_0$. Dado que α es no decreciente y positiva, esto implica que

$$\|\boldsymbol{\phi}(t; \mathbf{x}_0, t_0)\| < \epsilon, \qquad \text{para } t \geq t_0, \|\mathbf{x}_0\| \leq \delta$$

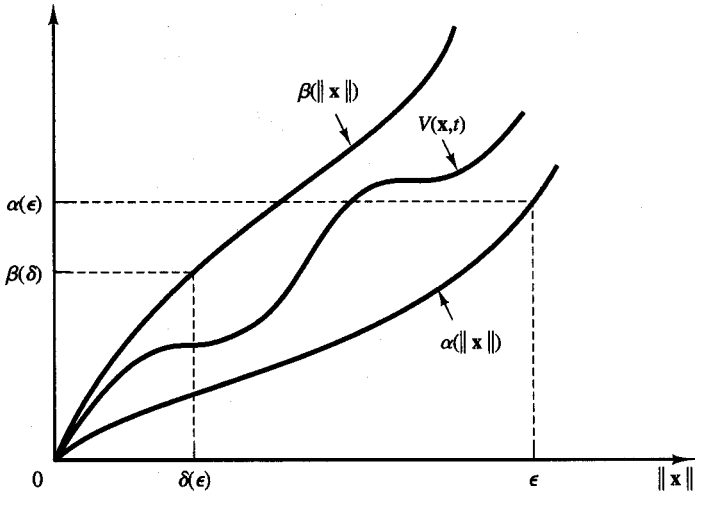


Figura 13–13
Curvas $\alpha(\|\mathbf{x}\|)$, $\beta(\|\mathbf{x}\|)$, y $V(\mathbf{x}, t)$.

Por tanto, hemos demostrado que, para cada número real $\epsilon > 0$, existe un número real $\delta > 0$ tal que $\|\mathbf{x}_0\| \leq \delta$ implica que $\|\boldsymbol{\phi}(t; \mathbf{x}_0, t_0)\| \leq \epsilon$ para toda $t \geq t_0$. Por tanto, hemos comprobado la estabilidad uniforme.

A continuación demostraremos que $\|\boldsymbol{\phi}(t; \mathbf{x}_0, t_0)\| \to 0$ cuando $t \to \infty$ uniformemente en t_0 y $\|\mathbf{x}_0\| \leq \delta$. Tomemos cualquier $0 < \mu < \|\mathbf{x}_0\|$ y encontremos un $\nu(\mu) > 0$ tal que $\beta(\nu) > \alpha(\mu)$. Representemos mediante $\epsilon'(\mu, \delta) > 0$ el mínimo de la función no decreciente continua $\gamma(\|\mathbf{x}\|)$ en el conjunto compacto $\nu(\mu) \leq \|\mathbf{x}\| \leq \epsilon(\delta)$. Definamos

$$T(\mu, \delta) = \frac{\beta(\delta)}{\epsilon'(\mu, \delta)} > 0$$

Suponga que $\|\boldsymbol{\phi}(t; \mathbf{x}_0, t_0)\| > \nu$ durante el intervalo de tiempo $t_0 \leq t_1 = t_0 + T$. En este caso, tenemos que

$$0 < \alpha(\nu) \leq V(\boldsymbol{\phi}(t_1; \mathbf{x}_0, t_0), t_1) \leq V(\mathbf{x}_0, t_0) - (t_1 - t_0)\epsilon' \leq \beta(\delta) - TE' = 0$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, para algunas t en el intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$, tal como una t_2 arbitraria, tenemos que

$$\|\mathbf{x}_2\| = \|\boldsymbol{\phi}(t_2; \mathbf{x}_0, t_0)\| = \nu$$

Así,

$$\alpha(\|\boldsymbol{\phi}(t; \mathbf{x}_2, t_2)\|) < V(\boldsymbol{\phi}(t; \mathbf{x}_2, t_2), t) \leq V(\mathbf{x}_2, t_2) \leq \beta(\nu) < \alpha(\mu)$$

para toda $t \geq t_2$. Por tanto,

$$\|\boldsymbol{\phi}(t; \mathbf{x}_0, t_0)\| < \mu$$

para toda $t \geq t_0 + T(\mu, 6) \geq t_2$, lo cual demuestra la estabilidad asintótica uniforme. Dado que $\alpha(\|x\|) \to \infty$ conforme $\|x\| \to \infty$, existe una constante $\epsilon(\delta)$ para una δ arbitrariamente grande, tal que $\beta(\delta) < \alpha(\epsilon)$. Además, dado que $\epsilon(\delta)$ no depende de t_0, la solución $\boldsymbol{\phi}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ es uniformemente limitada. Por tanto, hemos demostrado una estabilidad asintótica uniforme en general.

A-W-7. Considere el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

en donde x es un vector de estado (vector de dimensión n) y A es una matriz de coeficientes constantes de $n \times n$. Suponemos que A es no singular. Demuestre que si el estado de equilibrio x = 0 del sistema es asintóticamente estable (es decir, si A es una matriz estable) entonces existe una matriz P hermitiana definida positiva tal que

$$\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

en donde Q es una matriz hermitiana definida positiva.

Solución. La ecuación diferencial matricial

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^*\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}, \qquad \mathbf{X}(0) = \mathbf{Q} \tag{13-32}$$

tiene la solución

$$\mathbf{X} = e^{\mathbf{A}^* t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}$$

Integrando ambos miembros de la ecuación (13-32) a partir de $t = 0$ para $t = \infty$, obtenemos

$$\mathbf{X}(\infty) - \mathbf{X}(0) = \mathbf{A}^*\left(\int_0^\infty \mathbf{X}\,dt\right) + \left(\int_0^\infty \mathbf{X}\,dt\right)\mathbf{A}$$

Considerando que $\mathbf{A}$ es una matriz estable y, por tanto, $\mathbf{X}(\infty) = 0$, obtenemos

$$-\mathbf{X}(0) = -\mathbf{Q} = \mathbf{A}^*\left(\int_0^\infty \mathbf{X}\,dt\right) + \left(\int_0^\infty \mathbf{X}\,dt\right)\mathbf{A}$$

Hagamos que

$$P = \int_0^\infty \mathbf{X}\, dt = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^* t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}\, dt$$

Observe que los elementos de $e^{\mathbf{A}t}$ son sumas finitas de términos como $e^{\lambda_i t}$, $te^{\lambda_i t}$ . . . , t^{m_i-1} e $^{\lambda_i t}$, en donde los λ_i son los valores característicos de A y m_i es la multiplicidad de λ_i. Dado que λ_i posee partes reales negativas,

$$\int_0^\infty e^{\mathbf{A}^* t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}dt$$

existe. Observe que

$$\mathrm{p}^* = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^* t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}\, dt = \mathbf{P}$$

Por tanto, P es hermitiana (o simétrica si P es una **matriz** real). Así, hemos demostrado que, para una matriz A estable y para una matriz Q hermitiana definida positiva existe una matriz P hermitiana tal que $\mathbf{A}^*\mathbf{P}$ + PA = − Q. Ahora necesitamos demostrar que P es definida positiva. Considere la forma hermitiana siguiente:

$$\mathbf{x}^*\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathrm{x}^* \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^* t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}\, dt\, \mathbf{x}$$

$$= \int_0^\infty (e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x})^*\mathbf{Q}(e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x})\, dt > 0, \qquad \text{parax} \neq 0$$

$$= 0, \qquad \text{parax=O}$$

Por tanto, P es definida positiva. Esto concluye la prueba.

A-13-8. Demuestre que la ecuación diferencial matricial siguiente

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

en donde x es un vector de dimensión n y A es una matriz de coeficientes constantes de n X n obtenida mediante

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -b_n & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_{n-1} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -b_3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_2 & -b_1 \end{vmatrix}$$

es equivalente a la ecuación diferencial escalar siguiente:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x = 0$$

en donde $a_1, \ldots, a_n$ son cantidades reales, siempre y cuando las a y las b se relacionen mediante

$$b_1 = \Delta_1, \qquad b_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \qquad b_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_1\Delta_2}, \quad \ldots, \quad b_i = \frac{\Delta_{i-3}\Delta_i}{\Delta_{i-2}\Delta_{i-1}} \tag{13-33}$$

$$(i = 4, 5, \ldots, n)$$

en donde A, $\Delta_2, \ldots, \Delta_n$ son determinantes de Hunvitz.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ a_{2i-1} & a_{2i-2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_i \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(a_s se sustituye con cero si $s > n$)

y $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$ son cantidades diferentes de cero y además siempre y cuando $x = x_1$.

Solución. Consideraremos el caso en el que $n = 3$. Por tanto, necesitamos demostrar que

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

en donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -b_3 & 0 & 1 \\ 0 & -b_2 & -b_1 \end{bmatrix}$$

es equivalente a

$$\frac{d^3x_1}{dt^3} + a_1\frac{d^2x_1}{dt^2} + a_2\frac{dx_1}{dx} + a_3x_1 = 0$$

en donde a_1, a_2 y a_3, que son cantidades reales, se relacionan con b_1, b_2 y b_3 mediante la ecuación (13-33). Dado que

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -b_3 & 0 & 1 \\ 0 & -b_2 & -b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -b_3x_1 + x_3 \\ -b_2x_2 - b_1x_3 \end{bmatrix}$$

obtenemos

$$\dddot{x}_1 + b_1\ddot{x}_1 + (b_2 + b_3)\dot{x}_1 + b_1b_3x_1 = 0$$

Dado que las b son

$$b_1 = \Delta_1, \qquad b_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \qquad b_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_1\Delta_2}$$

en donde

$$\Delta_1 = a_1, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 - a_3^2$$

o bien

$$b_1 = a_1, \qquad b_2 = \frac{a_1a_2 - a_3}{a_1}, \qquad b_3 = \frac{a_3}{a_1}$$

en donde suponemos que $\Delta_1\Delta_2 = a_1(a_1a_2 - a_3) \neq 0$, mediante la sustitución de estos valores de las b en la ecuación diferencial escalar de tercer orden precedente, obtenemos

$$\dddot{x}_1 + a_1\ddot{x}_1 + a_2\dot{x}_1 + a_3x_1 = 0$$

El desarrollo presentado se puede extender a cualquier entero positivo n.

A-13-9. Considere el sistema lineal e invariante con el tiempo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -b_n & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_{n-1} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -b_3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_2 & -b_1 \end{vmatrix}$$

en donde $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son cantidades reales. Demuestre que el origen del sistema es asintóticamente estable si y sólo si

$$b_1 > 0, \qquad b_2 > 0, \qquad \ldots, \qquad b_n > 0$$

Solución. Considere la función escalar $V = \mathbf{x}^T\mathbf{Px}$ como una posible función de Liapunov, en donde

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} b_1b_2\cdots b_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1b_2\cdots b_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_1b_2b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1b_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_1 \end{bmatrix}$$

Mediante un cálculo simple, obtenemos

$$V = \mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{PA})\mathbf{x} = -2b_1^2x_n^2$$

que es semidefinida negativa. Examinando la matriz **A,** encontramos que V no puede ser idénticamente cero a menos que xi = 0 ($i = 1, 2, \ldots, n$). Por tanto, la condición necesaria y suficiente para la estabilidad asintótica del origen es que $\mathbf{x}^T\mathbf{Px}$ sea definida positiva. Esto significa que todos los elementos de la diagonal principal de **P** deben ser positivos; así, $b_i > 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Esto completa la demostración.

Observe que, si elegimos las b de acuerdo con la ecuación (13-33) (véase el problema **A-13-8),** entonces la ecuación diferencial matricial de dimensión $\dot{\mathbf{x}}$ = Ax considerada aquí se vuelve equivalente a la ecuación diferencial escalar siguiente:

$$\frac{d^nx}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_nx = 0 \qquad (13\text{–}34)$$

En este problema hemos demostrado que, para una estabilidad asintótica del origen del sistema, las b deben ser positivas, cosa que mediante la ecuación (13−33), es equivalente a decir que Δ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) debe ser positiva. Dado que la estabilidad del origen del sistema es equivalente a la

estabilidad de la ecuación diferencial escalar obtenida mediante la ecuación (13−34), hemos demostrado el criterio de estabilidad de Hurwitz. Dado que el criterio de estabilidad de Hurwitz y el criterio de estabilidad de Routh son equivalentes (véase el problema A-5-10), también hemos comprobado el criterio de estabilidad de Routh.

A-13-10. Considere el sistema escalar siguiente:

$$\dot{x} = ax + bu \tag{13-35}$$

en el que $a < 0$ y el índice de desempeño se obtiene mediante

$$J = \int_0^\infty (qx^2 + ru^2)\, dt \tag{13-36}$$

en donde $q > 0$ y $r > 0$. La ley del control óptimo que minimizará el índice de desempeño J se obtiene mediante

$$u = -Kx \tag{13-37}$$

Sustituir la ecuación (13-37) dentro de la ecuación (13-35) produce

$$\dot{x} = (a - bK)x$$

Asimismo, sustituir la ecuación (13-37) dentro de la ecuación (13-36) produce

$$J = \int_0^\infty (q + rK^2)x^2\, dt$$

Usando el enfoque de Liapunov, establecemos

$$(q + rK^2)x^2 = \frac{d}{dt}(px^2)$$

o bien

$$(q + rK^2)x^2 = -2px\dot{x} = -2p(a - bK)x^2$$

lo cual se simplifica a

$$[q + rK^2 + 2p(a - bK)]x^2 = 0$$

Esta última ecuación debe ser cierta para cualquier x(t). Por tanto, requerimos que

$$q + rK^2 + 2p(a - bK) = 0 \tag{13-38}$$

Observe que, mediante el segundo método de Liapunov, sabemos que, para una $q + rK^2$ determinada, existe una p tal que

$$(a - bK)p + p(a - bK) = -q - rK^2$$

que es igual a la ecuación (13-38). Por tanto, existe una p que satisface la ecuación (13-38).

Demuestre que la ley de control óptimo se obtiene mediante

$$u = -Kx = -\frac{pb}{r}x$$

y p puede determinarse como una raíz positiva de la ecuación siguiente:

$$q + 2ap - \frac{p^2b^2}{r} = 0 \tag{13-39}$$

Solución. Para un sistema estable, tenemos que $x(\infty) = 0$. Por tanto, el índice de desempeño se evalúa del modo siguiente:

$$J = \int_0^\infty (q + rK^2)x^2\, dt = -\int_0^\infty \frac{d}{dt}(px^2)\, dt$$
$$= -[px^2(\infty) - px^2(0)] = px^2(0)$$

Para minimizar el valor de J [para una x(O) determinada] con respecto a K, establecemos

$$\frac{\partial p}{\partial K} = 0 \tag{13-40}$$

en donde, remitiéndonos a la ecuación (13 −38),

$$p = -\frac{q + rK^2}{2(a - bK)} \tag{13-41}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial p}{\partial K} = -\frac{2rK(a - bK) - (q + rK^2)(-b)}{2(a - bK)^2} = 0$$

lo cual produce

$$2rK(a - bK) + b(q + rK^2) = 0$$

Así, tenemos que

$$\frac{q + rK^2}{2(a - bK)} = \frac{rK}{b} \tag{13-42}$$

A partir de las ecuaciones (13-41) y (13−42), obtenemos

$$p = \frac{rK}{b}$$

o bien

$$K = \frac{pb}{r} \tag{13-43}$$

Sustituyendo la ecuación (13-43) dentro de la ecuación (13−38), obtenemos

$$q + 2pa - \frac{p^2b^2}{r} = 0 \tag{13-44}$$

que es la ecuación (13-39). El valor de p se determina como una raíz positiva de la ecuación cuadrática obtenida mediante la ecuación (13-44).

Se pueden obtener los mismos resultados en una forma distinta. Primero considere que la ecuación (13 -38) se modifica del modo siguiente:

$$q + 2pa + \left(\sqrt{r}K - \frac{pb}{\sqrt{r}}\right)^2 - \frac{p^2b^2}{r} = 0 \tag{13-45}$$

A continuación, considerando esta última ecuación como una función de K, el mínimo del primer miembro de esta última ecuación con respecto a K se presenta cuando

$$\sqrt{r}K - \frac{pb}{\sqrt{r}} = 0$$

o bien

$$K = \frac{pb}{r} \tag{13-46}$$

que es la ecuación (13-43). Por tanto, la minimización de J con respecto a K es igual a la minimización del primer miembro de la ecuación (13-38) con respecto a K. Sustituyendo la ecuación (13-46) dentro de la ecuación (13−45), obtenemos

$$q + 2pa - \frac{p^2b^2}{r} = 0$$

que es la ecuación (13 -39).

A-13-11. Considere el sistema de control de la figura 13-8. La ecuación para la planta es

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \qquad (13\text{-}47)$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Suponiendo la ley de control lineal

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -k_1 x_1 - k_2 x_2 \qquad (13\text{-}48)$$

determine las constantes k_1 y k_2 de modo que el índice de desempeño siguiente se minimice:

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{x} + u^2)\, dt$$

Solución. Sustituyendo la ecuación (13−48) dentro de la ecuación (13−47), obtenemos

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Si suponemos que k_1 y k_2 son constantes positivas, entonces A − BK se vuelve una matriz estable y $\mathbf{x}(\infty) = 0$. Por tanto, el índice de desempeño puede escribirse

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{K}^T\mathbf{K}\mathbf{x})\, dt \\ &= \int_0^\infty \mathbf{x}^T(\mathbf{I} + \mathbf{K}^T\mathbf{K})\mathbf{x}\, dt \\ &= \mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0) \end{aligned}$$

en donde P se determina a partir de la ecuación (13-23):

$$(A - BK)^*P + P(A - BK) = -(Q + K^*RK) = -(\mathbf{I} + K^*K)$$

en donde hemos sústituido Q = 1 y $\mathbf{R} = \mathbf{I}_1 = 1$. Para este sistema, dado que la matriz P es simétrica real, esta última ecuación se puede reescribir como

$$\begin{bmatrix} 0 & -k_1 \\ 1 & -k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1^2 & k_1k_2 \\ k_1k_2 & k_2^2 \end{bmatrix}$$

Esta ecuación matricial produce las tres ecuaciones siguientes en función de las p_{ij}:

$$\begin{aligned} -2k_1p_{12} &= -1 - k_1^2 \\ p_{11} - k_2p_{12} - k_1p_{22} &= -k_1k_2 \\ 2p_{12} - 2k_2p_{22} &= -1 - k_2^2 \end{aligned}$$

Resolviendo estas tres ecuaciones para las p_{ij}, obtenemos

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2}\right) + \frac{k_1}{2k_2}\left(\frac{1}{k_1} + k_1\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_1} + k_1\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_1} + k_1\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_2} + k_2\right) + \frac{1}{2k_2}\left(\frac{1}{k_1} + k_1\right) \end{bmatrix}$$

Ahora,

$$J = \mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0)$$
$$= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2}\right) + \frac{k_1}{2k_2}\left(\frac{1}{k_1} + k_1\right)\right]x_1^2(0) + \left(\frac{1}{k_1} + k_1\right)x_1(0)x_2(0)$$
$$+ \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_2} + k_2\right) + \frac{1}{2k_2}\left(\frac{1}{k_1} + k_1\right)\right]x_2^2(0)$$

Para minimizar J, establecemos $\partial J/\partial k_1 = 0$ y $\partial J/\partial k_2 = 0$, o

$$\frac{\partial J}{\partial k_1} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{-k_1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2}\right) + \frac{-1}{2k_2}\left(\frac{-1}{k_1^2} + 1\right)\right]x_1^2(0) + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{k_1^2} + 1\right) - \frac{1}{2k_2^2}\left(\frac{1}{k_1} + k_1\right)\right]x_2^2(0) = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial k_2} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_1} - \frac{k_1}{k_2^2}\right) + \frac{-k_1}{2k_2^2}\left(\frac{1}{k_1} + k_1\right)\right]x_1^2(0) + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{k_2^2} + 1\right) - \frac{1}{2k_2^2}\left(\frac{1}{k_1} + k_1\right)\right]x_2^2(0) = 0$$

Para cualesquiera condiciones iniciales determinadas $x_1(0)$ y $x_2(0)$, el valor de J se vuelve mínimo cuando

$$k_1 = 1, \qquad k_2 = \sqrt{3}$$

Observe que k_1 y k_2 son constantes positivas como supusimos en la solución. Por tanto, para la ley del control óptimo,

$$K = [k_1 \quad k_2] = [1 \quad \sqrt{3}]$$

El diagrama de bloques de este sistema de control óptimo se vuelve igual al de la figura 13-9 si se sustituye $\mu = 1$ en la función de transferencia que contiene μ.

A-13-12. Considere el sistema de control descrito mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{13-49}$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Suponiendo la ley de control lineal

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -k_1x_1 \quad k_2x_2 \tag{13-50}$$

determine las constantes k_1 y k_2 para que el índice de desempeño siguiente se minimice:

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^T\mathbf{x}\, dt$$

Considere sólo el caso en el que la condición inicial es

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$$

Seleccione la frecuencia natural no amortiguada igual a 2 rad/seg.

Solución. Sustituyendo la ecuación (13-50) dentro de la ecuación (13−49), obtenemos

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[-k_1x_1 - k_2x_2]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{13-51}$$

Por tanto,

$$\mathbf{A - BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

La eliminación de x_2 de la ecuación (13-51) produce

$$\ddot{x}_1 + k_2\dot{x}_1 + k_1 x_1 = 0$$

Dado que se especifica que la frecuencia natural no amortiguada sea igual a 2 rad/seg, obtenemos

$$k_1 = 4$$

Así,

$$\mathbf{A - BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A - BK}$ es una matriz estable si $k_2 > 0$. Ahora nuestro problema es determinar el valor de k_2 de modo que el índice de desempeño

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^T\mathbf{x}\, dt = \mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}(0)\mathbf{x}(0)$$

se minimice, en donde la matriz P se determina a partir de la ecuación (13-23) y se puede reescribir como

$$\mathbf{(A - BK)^*P + P(A - BK) = -(Q + K^*RK)}$$

Dado que en este sistema Q = $\mathbf{I}$ y $\mathbf{R}$ = 0, esta última ecuación se simplifica a

$$\mathbf{(A - BK)^*P + P(A - BK) = -I} \tag{13-52}$$

Dado que el sistema sólo contiene vectores y matrices reales, $\mathbf{P}$ se convierte en una matriz real simétrica. En este caso, la ecuación (13-52) se escribe como

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo para la matriz $\mathbf{P}$, obtenemos

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2k_2} + \frac{k_2}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8k_2} \end{bmatrix}$$

Por tanto, el índice de desempeño es

$$\begin{aligned} J &= \mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}\mathbf{x}^{(0)} \\ &= [c \quad 0] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} = p_{11}c^2 \\ &= \left(\frac{5}{2k_2} + \frac{k_2}{8}\right)c^2 \end{aligned} \tag{13-53}$$

Para minimizar J, diferenciamos J con respecto a k_2 y establecemos $\partial J/\partial k_2$ igual a cero del modo siguiente:

$$\frac{\partial J}{\partial k_2} = \left(\frac{-5}{2k_2^2} + \frac{1}{8}\right)c^2 = 0$$

Por tanto,

$$k_2 = \sqrt{20}$$

Con este valor de k_2, tenemos que $\partial^2 J/\partial k_2^2 > 0$. Así, el valor mínimo de J se obtiene sustituyendo $k_2 = \sqrt{20}$ dentro de la ecuación (13−53), o

$$J_{\text{mín}} = \frac{\sqrt{5}}{2}c^2$$

El sistema diseñado tiene la ley de control

$$u = -4x_1 - \sqrt{20}x_2$$

Además es óptimo porque produce un valor mínimo para el índice de desempeño J bajo la condición inicial supuesta.

A-13-13. Considere el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

que puede ser lineal o no lineal. Se quiere determinar la ley de control óptimo u = g(x) tal que el índice de desempeño

$$J = \int_0^\infty L(\mathbf{x}, \mathbf{u})\, dt$$

se minimice, en donde u es no restringida.

Si el origen del sistema descrito mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x}))$$

es asintóticamente estable y, por tanto, existe una función de Liapunov $V(x)$ tal que $\dot{V}(\mathbf{x})$ sea definida negativa, demuestre que una condición suficiente para que un vector de control $\mathbf{u}_1$ sea óptimo es que $H(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, en donde

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{dV}{dt} + L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{13-54}$$

sea mínima con $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$, o

$$\min_{\mathbf{u}} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \min_{\mathbf{u}}\left[\frac{dV}{dt} + L(\mathbf{x}, \mathbf{u})\right]$$

$$= \left.\frac{dV}{dt}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_1} + L(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1) \tag{13-55}$$

Y

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_1} = -L(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1) \tag{13-56}$$

Solución. Integremos ambos miembros de la ecuación (13-56). Entonces

$$V(\mathbf{x}(\infty)) - V(\mathbf{x}(0)) = -\int_0^\infty L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_1(t))\, dt \tag{13-57}$$

Dado que el origen del sistema es asintóticamente estable, x(m) = 0 y $V(\mathbf{x}(\infty)) = 0$. Por tanto, la ecuación (13-57) se vuelve

$$V(\mathbf{x}(0)) = \int_0^\infty L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_1(t))\, dt \tag{13-58}$$

Para demostrar que $\mathbf{u}_1(t)$ es óptima, suponga que $\mathbf{u}_1(t)$ no es óptima y que el vector de control $\mathbf{u}_2(t)$ producirá un valor más pequeño de J. En este caso,

$$\int_0^\infty L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_2(t))\, dt < \int_0^\infty L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_1(t))\, dt$$

Observe que, a partir de la ecuación (13−55), el valor mínimo de $H(\mathbf{x}, \mathrm{u})$ ocurre en $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$. Observe también que, a partir de la ecuación (13−56), este valor mínimo es igual a cero. Por tanto,

$$H(\mathbf{x}, \mathrm{u}) \geq 0$$

para todas las u. Así,

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}_2) = \frac{dV}{dt}_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_2} + L(\mathbf{x}, \mathbf{u}_2) \geq 0$$

Integrando ambos miembros de esta desigualdad de 0 a ∞, obtenemos

$$V(\mathbf{x}(\infty)) - V(\mathbf{x}(0)) \geq -\int_0^\infty L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_2(t))\, dt$$

Dado que $V(\mathbf{x}(\infty)) = 0$, tenemos que

$$V(\mathbf{x}(0)) \leq \int_0^\infty L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_2(t))\, dt \tag{13-59}$$

Por tanto, a partir de las ecuaciones (13-58) y (13−59), obtenemos

$$\int_0^\infty L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_1(t))\, dt \leq \int_0^\infty L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_2(t))\, dt$$

Ésta es una contradicción. Por tanto, $\mathbf{u}_1(t)$ es el vector de control óptimo.

A-13-14. Considere el mismo sistema del péndulo invertido analizado en la sección 12-8. El sistema aparece en la figura 13-14, en donde $M = 2$ kg, $m = 0.1$ kg y $l = 0.5$ m. El diagrama de bloques para el sistema aparece en la figura 13-15. Las ecuaciones del sistema se obtienen mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathrm{cx}$$
$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + k_I\xi$$
$$\dot{\xi} = r - y = r - \mathbf{C}\mathbf{x}$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{C=[O\ \ 0\ \ 1\ \ 0]}$$

Remitiéndonos a la ecuación (12− 126), la ecuación de error para el sistema se obtiene mediante

$$\dot{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{e} + \hat{\mathbf{B}}u_e$$

en donde

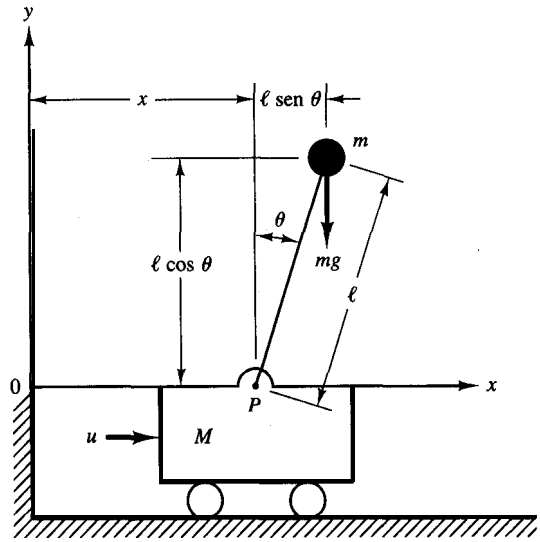


Figura 13–14
Sistema de control del péndulo invertido.

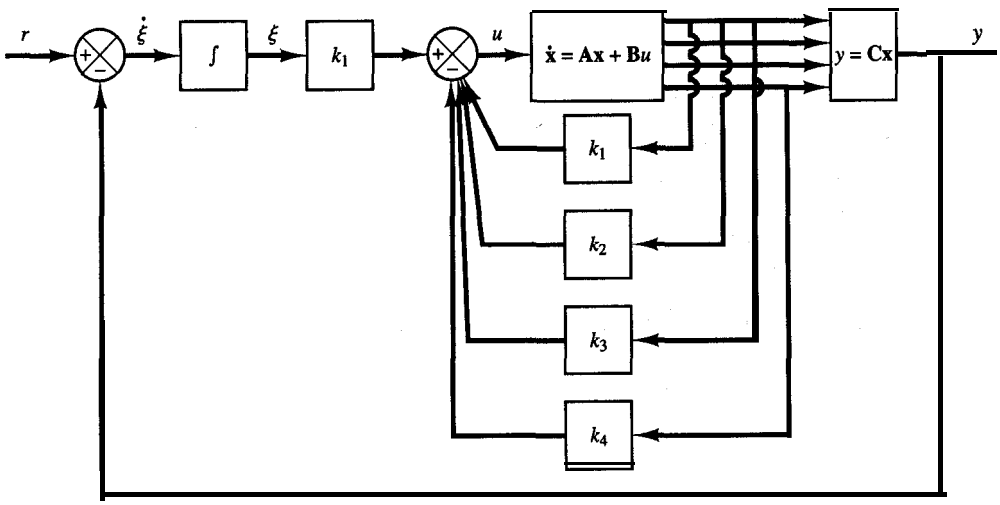


Figura 13–15
Sistema de control del péndulo invertido. (Un sistema de seguimiento de tipo 1 cuando la planta no tiene integrador.)

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y la señal de control se obtiene mediante la ecuación (12-115):

$$u_e = -\hat{\mathbf{K}}\mathbf{e}$$

en donde

$$\hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \quad -k_I] = [k, \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad -k_I]$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e \\ \xi_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty) \\ \xi(t) - \xi(\infty) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

Usando MATLAB, determine la matriz de ganancias de realimentación del estado $\hat{\mathbf{K}}$ tal que el índice de desempeño J siguiente se minimice:

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{e}^*\mathbf{Q}\mathbf{e} + u^*Ru)\, dt$$

en donde

$$Q = \begin{vmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 010 & & 0 & & 0 \\ O & O & 1 & 0 & 0 \\ 00 & & 0 & & 10 \\ 00 & 0 & & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad R = 0.01$$

Solución. El programa MATLAB 13-6 determina $\hat{\mathbf{K}}$.

Programa MATLAB 13-6

```
% --------- Diseño de un sistema de control óptimo cuadrático ---------

%***** Determinaremos la matriz de ganancias de realimentación
% óptima Ksombrero que minimice el índice de desempeño J *****

% ***** Introduzca las matrices A, B, C y D del sistema *****

A = [0   1   0   0;20.601   0   0   0;0   0   0   1; -0.4905   0   0   0];
B = [0;-1;0;0.5];
C = [0   0   1   0];
D = [0];

% ***** Introduzca la matriz de estado Asombrero y la matriz de control Bsombrero *****

Ahat = [A   zeros(4,1); -C   0];
Bhat = [B;0];

% ***** Introduzca las matrices Q y R del índice de desempeño cuadrático J *****

Q = [100  0  0  0  0;0  1  0  0  0;0  0  1  0  0;0  0  0  1  0;0  0  0  0  1];

R = [0.01];
```

```
% *** Para obtener la matriz de ganancias de realimentación
% del estado óptimo Ksombrero, introduzca el comando siguiente *****

Khat = lqr(Ahat,Bhat,Q,R)

Khat =

 -188.0799   -37.0738   -26.6767   -30.5824    10.0000

k1 = Khat(1),k2 = Khat(2), k3 = Khat(3), k4 = Khat(4), ki = - Khat(5)

k1 =

   -188.0799

k2 =

   -37.0738

k3 =

   -26.6767

k4 =

   -30.5824

ki =

   -10.0000
```

Respuesta escalón unitario. Una vez determinada la matriz de ganancias de realimentación $\mathbf{K}$ y la constante de ganancia integral k_I, podemos determinar la respuesta escalón unitario del sistema diseñado. La ecuación del sistema es

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{13-60}$$

Dado que

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + k_I \xi$$

La ecuación (13−60) se escribe del modo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}k_I \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{13-61}$$

El programa MATLAB 13−7 produce la respuesta escalón unitario del sistema obtenido mediante la ecuación (13−61). Las curvas resultantes se presentan en la figura 13−16. Se muestra la curva de respuesta θ [$= x_1(t)$] contra t, $\dot{\theta}$ [$= x_2(t)$] contra t, y [$= x_3(t)$] contra t, $\dot{y}$ [$= x_4(t)$] contra t, y ξ [$= x_5(t)$] contra t, en donde la entrada $r(t)$, para el carro es una función escalón unitario [$r(t) = 1$m]. Se establece que todas las condiciones iniciales sean cero. Al graficar las curvas de respuesta, usamos

un comando subplot. La figura 13 – 17 es una versión ampliada de la posición del carro y [= $x_3(t)$] contra t. El carro se mueve hacia atrás una cantidad muy pequeña durante los primeros 0.6 seg aproximadamente. (Observe que la velocidad del carro es negativa durante los primero 0.6 seg.) Esto se debe al hecho de que el sistema del péndulo invertido del carro es un sistema de fase no mínima.

Programa MATLAB 13–7

```
% ---------- Respuesta escalón unitario del sistema diseñado ----------
%**** Usando la matriz de ganancias de realimentación del sistema
% K(número = [K – k]) determinada en el programa MATLAB 13–6, obtendremos
% la respuesta escalón unitario del sistema diseñado ****

% ***** Introduzca las matrices A, B, C y D del sistema *****

A = [0  1  0  0;20.601  0  0  0;0  0  0  1;–0.4905  0  0  0];
B = [0;–1;0;0.5];
C = [0  0  1  0];
D = [0];

% ***** Introduzca la matriz K, ki, la matriz de realimentación de la matriz de control
% BB, la matriz de salida CC y la matriz de transmisión directa DD *****

K = [–188.0799  –37.0736  –26.4702  –70.6584];
ki = –10.0000
AA = [A–B*K  B*ki; –C  0];
BB = [0;0;0;0];
CC = [C  0];
DD = D;

% ***** Para obtener la curva de respuesta escalón unitario *****
% introduzca el comando siguiente *****

t = 0:0.01:10;
y(:,1) = step(AA,BB,CC,DD,1,t);

% ***** Para obtener la curva de respuesta escalón unitario *****
% de la variable de estado, introduzca el comando siguiente *****

subplot(2,2,1); y1 = [1  0  0  0]*x'; plot(t,y1)
grid
title('Respuesta escalón unitario del carro y (m)')
xlabel('t (seg)')
subplot(2,2,2); y2 = [0  1  0  0]*x'; plot(t,y2)
grid
title('Respuesta escalón unitario de velocidad del carro y (m/seg)')
xlabel('t (seg)')
subplot(2,2,3); y3 = [0  0  1  0]*x'; plot(t,y3)
grid
title('Respuesta escalón unitario del ángulo de fase y (rad)')
xlabel('t (seg)')
subplot(2,2,4); y4 = [0  0  0  1]*x'; plot(t,y4)
grid
```

```
title('y punto de la velocidad del carro (m/seg) contra t (seg)')
subplots(3,2,5); x5 = [0  0  0  0  1]*x'; plot(t,x5)
grid
title('Salida del integrador contra t (seg)')
```

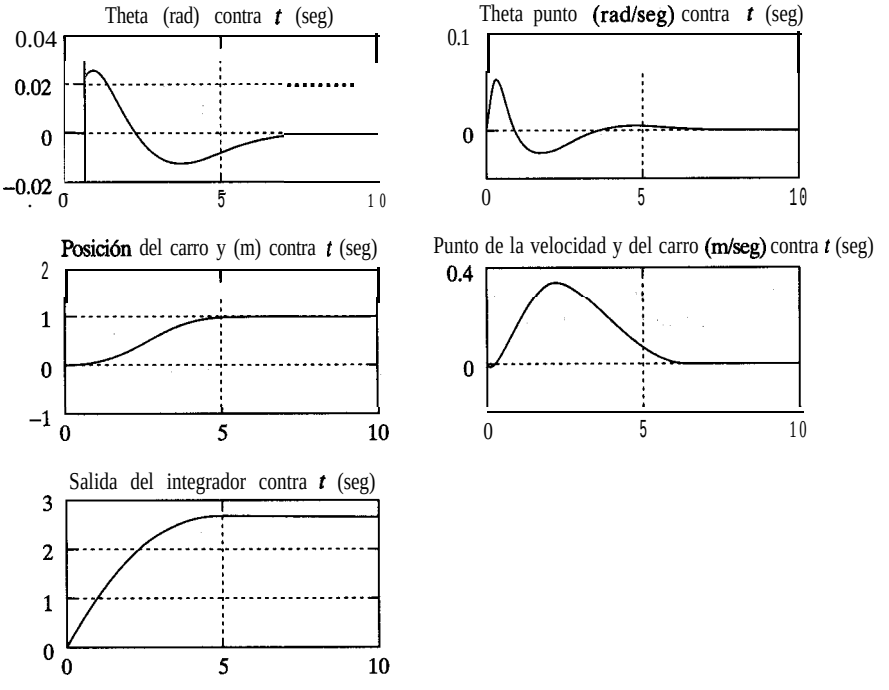
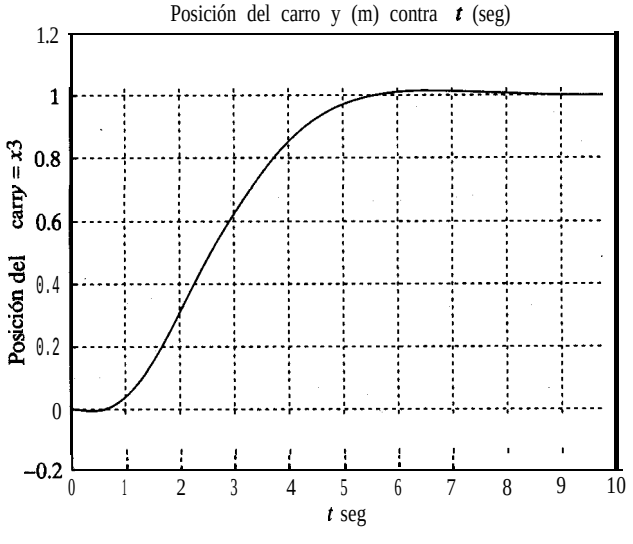


Figura **13–16**
Curvas de respuesta escalón unitario para el sistema diseñado.



Figural3-17
Posición del carro contra *t*.

PROBLEMAS

B-13-1. Determine si la forma cuadrática siguiente es definida positiva.

$$Q = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_2x_3 - 2x_1x_3$$

B-13-2. Determine si la forma cuadrática siguiente es definida negativa.

$$Q = -x_1^2 - 3x_2^2 - 11x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 2x_1x_3$$

B-13-3. Determine la estabilidad del origen del sistema siguiente:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

Considere las funciones cuadráticas siguientes como una función de Liapunov posible:

$$v = x_1^2 + x_2^2$$

B-W-4. Escriba algunas funciones de Liapunov para el sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Determine la estabilidad del origen del sistema.

B-13-5. Determine la estabilidad del estado de equilibrio del sistema siguiente:

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 + 2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - 4x_2 - 1$$

B-13-6. Determine la estabilidad del estado de equilibrio del sistema siguiente:

$$\dot{x}_1 = x_1 + 3x_2$$
$$\dot{x}_2 = -3x_1 - 2x_2 - 3x3$$
$$\dot{x}_3 = x_1$$

B-13-7. Determine la estabilidad del origen del sistema siguiente:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -6x_1 - 5x_2$$

B-13-8. Considere una matriz hermitiana **P** y el polinomio característico

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{P}| = s^n - b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \ldots + (-)^n b_n$$

Demuestre que una condición necesaria y suficiente par que **P** sea definida positiva es que todas las b_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) sean positivas.

B-13-9. Considere el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

Demuestre que si el vector de control u se obtiene mediante

$$\mathbf{u} = -\mathbf{B}^*\mathbf{Px}$$

en donde la matriz **P** es una matriz hermitiana definida positiva que satisface la condición

$$\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{PA} = -\mathbf{1}$$

entonces el origen del sistema es asintóticamente estable en general.

B-13-10. Considere el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -a \end{bmatrix}$$

a = parámetro ajustable > 0

Determine el valor del parámetro a para minimizar el índice de desempeño siguiente:

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^T\mathbf{x}\, dt$$

Suponga que el estado inicial $\mathbf{x}(0)$ se obtiene mediante

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

B-13-11. Considere el sistema de la figura 13-18. Determine los valores de las ganancias de K de modo que el factor de amortiguamiento relativo ζ del sistema en lazo cerrado

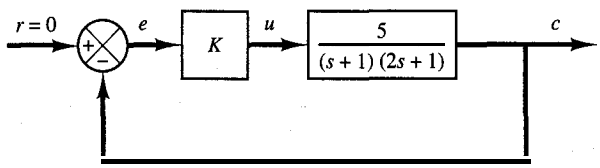


Figura 13–18
Sistema de control.

sea igual a 0.5. A continuación determine también la frecuencia natural no amortiguada ω_n del sistema en lazo cerrado. Suponiendo que e(O) = 1 y $\dot{e}(0) = 0$, calcule

$$\int_0^\infty e^2(t)\,dt$$

B-13-12. Determine la señal de control óptimo u para el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tal que el índice de desempeño siguiente se minimice:

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{x} + u^2)\,dt$$

B-13-13. Considere el sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

Se quiere encontrar la señal de control óptimo u tal que el índice de desempeño

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + u^2)\,dt, \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se minimice.

Remitiéndonos a la condición suficiente para el vector de control óptimo presentado en el problema A-13-13, determine la señal de control óptimo u(t).

B-13-14. Considere el sistema del péndulo invertido de la figura 12-2. (Véase la sección 12-4. El diagrama de bloques del sistema aparece en la figura 12-2.) Se desea diseñar un sistema de control que mantenga el péndulo invertido en una posición vertical ante la presencia de perturbaciones en términos del ángulo θ y/o una velocidad angular $\dot{\theta}$. Se requiere que el sistema de control regrese el carro a su posición de referencia al final de cada proceso de control. (No hay una entrada de referencia para el carro.)

La ecuación en el espacio de estados para el sistema se obtiene mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

Usaremos el esquema de control mediante la realimentación del estado

$$u = -K x$$

Usando MATLAB, determine la matriz de ganancias de realimentación del estado $\mathbf{K} = [k_1\ k_2\ k_3\ k_4]$ tal que el índice de desempeño J siguiente se minimice:

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^*\mathbf{Q}\mathbf{x} + u^*Ru)\,dt$$

en donde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = 1$$

A continuación obtenga la respuesta del sistema a la condición inicial siguiente:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Grafique las curvas de respuesta θ contra t, $\dot{\theta}$ contra t, x contra t y $\dot{x}$ contra t.

Antecedentes necesarios para el uso efectivo de MATLAB*

A-l INTRODUCCIÓN

Este apéndice aborda los antecedentes necesarios para el uso efectivo de MATLAB en la solución de problemas de ingeniería de control. MATLAB (MATrix LABoratory; laboratorio de matrices) es un sistema basado en matrices para realizar cálculos matemáticos y de ingeniería. Se puede considerar un tipo de lenguaje diseñado sólo para efectuar manipulación de matrices. Todas las variables que maneja MATLAB son matrices, es decir, sólo tiene un tipo de datos, una matriz, o un arreglo rectangular de números. MATLAB posee un extenso conjunto de rutinas para obtener resultados gráficos.

Comandos de MATLAB y funciones matriciales que suelen usarse para analizar y diseñar sistemas de control. El usuario puede solicitar la gran cantidad de funciones predefinidas de MATLAB que permiten despejar muchos tipos distintos de problemas de control.

La tabla A-l lista tales comandos y funciones matriciales.

Entrada y salida de MATLAB. En la mayor parte de los sistemas, una vez instalado MATLAB, para llamarlo, ejecute el comando MATLAB. Para salir de él, ejecute el comando exit o quit.

*Se recomienda la lectura de este apéndice a los lectores que todavía no conocen MATLAB, antes de escribir programas para MATLAB.

Tabla A-1 Comandos y funciones matriciales de MATLAB

Comandos y funciones matriciales de uso frecuente para resolver problemas de ingeniería de control	Explicación de lo que hacen los comandos y del significado de las funciones matriciales o enunciados
abs	Valor absoluto, magnitud compleja
angle	Ángulo de fase
ans	Respuesta cuando no se asigna una expresión
atan	Arcotangente
axis	Escalamiento de un eje en forma manual
bode	Diagrama de las trazas de Bode
clear	Borrar el área de trabajo
clg	Borrar las gráficas de la pantalla
computer	Tipo de computadora
conj	Compleja conjugada
conv	Convolución, multiplicación
corrcoef	Coeficientes de correlación
cos	Coseno
cosh	Coseno hiperbólico
cov	Covarianza
deconv	Deconvolución, división
det	Determinante
diag	Matriz diagonal
eig	Valores y vectores característicos
exit	Terminar sesión
exP	Base e exponencial
expm	Exponencial de una matriz
eye	Matriz identidad
filter	Implementación directa de un filtro
format long	Punto fijo en escala de 15 dígitos (Ejemplo: 1.33333333333333)
format long e	Punto flotante de quince dígitos (Ejemplo: 1.33333333333333e + 000)
format short	Punto fijo en escala de 5 dígitos (Ejemplo: 1.3333)
format short e	Punto flotante de cinco dígitos (Ejemplo: 1.3333e + 000)
freqs	Respuesta en frecuencia de la transformada de Laplace (tiempo continuo
freqz	Respuesta en frecuencia de la transformada z (tiempo discreto)
grid	Dibujar líneas de retícula
hold	Mantener la gráfica actual en la pantalla
i	$\sqrt{-1}$
imag	Parte imaginaria
inf	Infinito (∞)
inv	Inverso

Tabla A-l (Continuación)

Comandos y funciones matriciales de uso frecuente para resolver problemas de ingeniería de control	Explicación de lo que hacen los comandos y del significado de las funciones matriciales o enunciados
j	$\sqrt{-1}$
length linspace log loglog logm logspace log10 lqe lqr	Longitud de vector Vectores linealmente espaciados Logaritmo natural Gráfica logarítmica x-y Logaritmo de una matriz Vectores logarítmicamente espaciados Logaritmo en base 10 Diseño de estimador lineal cuadrático Diseño de regulador lineal cuadrático
max mean median min	Valor máximo Valor medio Valor mediano Valor mínimo
NaN nyquist	No es un número Respuesta en frecuencia mediante la traza de Nyquist
ones	Constante
pi plot polar poly polyfit polyval polyvalm prod	Pi (n) Gráfica lineal x-y Gráfica polar Polinomio característico Ajuste de curva a un polinomio Evaluación de un polinomio Evaluación del polinomio de una matriz Producto de elementos
quit	Terminar sesión
rand rank real rem residue rlocus roots	Generar números y matrices aleatorios Determinar el rango de una matriz Parte real Residuo o módulo Expansión en fracciones parciales Gráfica del lugar geométrico de las raíces Raíces de un polinomio
semilogx semilogy sign sin sinh size sqrt	Gráfica semilogarítmica x-y (logaritmo del eje x) Gráfica semilogarftmica x-y (logaritmo del eje y) Punción signo Seno Seno hiperbólico Dimensiones de renglón y columna Raíz cuadrada

Tabla A-l (Continuación)

sqrtm std step sum	Raíz cuadrada de una matriz Desviación estándar Graficar la respuesta escalón unitario Suma de elementos
tan tanh text title trace	Tangente Tangente hiperbólica Texto arbitrariamente colocado Título de la gráfica Traza de una matriz
who	Lista de todas las variables que están actualmente en la memoria
xlabel	Leyenda del eje *x*
ylabel	Leyenda del eje y
zeros	Cero

Cómo se usa MATLAB. Por lo general, MATLAB se usa en un modo controlado por comandos. Cuando se introducen comandos de una sola línea, MATLAB los procesa de inmediato y despliega los resultados. MATLAB también es capaz de ejecutar secuencias de comandos que se almacenan en archivos.

Los comandos escritos pueden accesarse después usando la tecla de flecha hacia arriba. Es posible desplazarse por algunos de los comandos más recientes y repetir una línea de comandos específica.

Variables en MATLAB. Una característica conveniente de MATLAB es que no es necesario establecer las dimensiones de las variables antes de usarlas. En MATLAB, las variables se generan automáticamente una vez que se usan. (Es posible alterar las dimensiones de las variables después, si es necesario.) Tales variables permanecen en la memoria hasta que se introduce el comando exit o quit.

Para obtener una lista de las variables en el área de trabajo, simplemente escriba el comando who. A continuación aparecerán en la pantalla todas las variables que están actualmente en el área de trabajo.

El comando clear borrará todas las variables no permanentes del kea de trabajo. Si se quiere borrar sólo una variable, por ejemplo 'x', del área de trabajo, introduzca el comando clear x.

Una línea de programa que empieza con '%'. En este libro, muchos programas de MATLAB se escriben con comentarios y notas que explican cada uno de los pasos adoptados en el programa. Las líneas de los programas de MATLAB que empiezan con '%' son comentarios o notas. La notación '%' es similar a 'REM' en BASIC. Las líneas que empiezan con % se usan para almacenar los comentarios o notas del programador, expresiones que no se ejecutan. Es decir, todo lo que está después de % en una línea de un programa MATLAB se ignora. Si se requiere de notas o comentarios en más de una línea de un programa, cada línea debe empezar con %.

Uso del operador punto y coma. El punto y coma se usa para suprimir la impresión. Si el último carácter de un enunciado es un punto y coma, la impresión se suprime; el comando se ejecuta, pero el resultado no se despliega. Ésta es una característica útil, dado que

tal vez usted no necesite imprimir los resultados intermedios. Asimismo, al introducir una matriz, se usa un punto y coma para indicar el fin de una fila, excepto en la última.

Uso del operador dos puntos. El operador dos puntos tiene una función importante en MATLAB. Se usa para crear vectores, para suscribir matrices y para especificar iteraciones *for*. Por ejemplo, **j:k** es igual a [j j + 1 ' ' ' k], A(:,j) es la j-ésima columna de A, y A(i,:) es el i-ésimo renglón de A.

Introducción de un enunciado largo que no cabe en una línea. Por lo general, un enunciado termina con una retorno de carro o la tecla Enter. Si el enunciado que se introduce es demasiado largo para una línea, se usa una elipsis, formada por tres o más puntos (. . .), seguida por un retorno de carro. Esto indica que el enunciado continúa en la línea siguiente. Un ejemplo es

```
x = 1.234 + 2.345 + 3.456 + 4.567 + 5.678 + 6.789...
    + 7.890 + 8.901 - 9.012;
```

Observe que los espacios en blanco a los lados de los signos =, + y - son opcionales. Con frecuencia se incluyen para mejorar la legibilidad.

Introducción de varios enunciados en una línea. Es posible colocar varios enunciados en una línea si se separan con comas o puntos y comas. Entre los ejemplos están

```
plot(x,y,'o'), text(1,20,'System 1'), text(1,15,'System 2')
```

y

```
plot(x,y,'o'); text(1,20,'System 1'); text(1,15,'System 2')
```

Selección de un formato de salida. Todos los cálculos que realiza MATLAB se ejecutan en doble precisión. Sin embargo, la salida desplegada puede tener un punto fijo con cuatro lugares decimales. Por ejemplo, para el vector

```
x = [1/3 0.00002]
```

MATLAB exhibe la salida siguiente:

```
x =
    0.3333    0.0000
```

Si cuando menos un elemento de una matriz no es un entero exacto, hay cuatro formatos de salida posibles. La salida desplegada se controla usando los comandos siguientes:

```
format short
format long
format short e
format long e
```

Una vez invocado, el formato elegido permanece en vigor hasta que se modifica.

Para el análisis de sistemas de control, por lo general se usan formatos cortos y largos. Cuando se invoca MATLAB y no se introduce un comando de formato, el programa muestra los resultados numéricos en formato corto. Si todos los elementos de una matriz o vector son enteros exactos, el formato corto y el formato largo producirán el mismo resultado.

Cómo guardar variables cuando se sale de MATLAB. Cuando se escribe 'exit' o 'quit', MATLAB pierde todas las variables. Si se introduce el comando save antes de salir, es posible conservar todas las variables en un archivo en disco llamado matlab.mat. Cuando se vuelve a entrar a MATLAB, el comando load restablecerá el área de trabajo a su estado anterior.

A-2 GRAFICACIÓN DE CURVAS DE RESPUESTA

MATLAB posee un extenso conjunto de rutinas para obtener salida gráfica. El comando plot crea gráficas lineales x-y. (Gráficas logarítmicas y polares se crean incluyendo, en lugar de plot las palabras loglog, semilogx, semilogy, o polar.) Todos estos comandos se usan en la misma forma: sólo afectan la forma en que se despliegan los datos y la forma en que se establece el eje de la escala.

Gráfica x-y. Si los vectores x y y son de la misma longitud, el comando

```
plot(x,y)
```

grafica los valores de y contra los valores de x.

Graficación de curvas múltiples. Para graficar curvas múltiples en un solo diagrama, use el comando plot con argumentos múltiples.

```
plot(X1, Y1, X2, Y2, . . . , Xn, Yn)
```

Las variables X1 , Y 1, X2, Y2, son pares de vectores Cada par x-y se grafica generando curvas múltiples en la gráfica. Los argumentos múltiples tienen la ventaja de que permiten desplegar en la misma grafica vectores de diferentes longitudes Cada par usa un tipo de línea distinta.

La graficación de más de una curva en un solo diagrama también se realiza usando el comando hold. El comando hold congela la gráfica actual y no permite borrar ni modificar la escala. Por tanto, las curvas siguientes se trazan sobre la curva original. La gráfica actual se libera introduciendo otra vez el comando hold.

Adición de líneas de retícula, títulos de gráfica, leyendas para el eje *x* y leyendas para el eje *y*. Una vez que una gráfica está en la pantalla, es posible dibujar las líneas de retícula, inclinar la gráfica, y escribir leyendas para los ejes *x* y y. Los comandos de MATLAB para la cuadrícula, el título, la leyenda del eje *x* y la leyenda del eje y son

```
grid  (grid lines)
title (graph title)
xlabel (x-axis label)
ylabel (y-axis label)
```

Observe que, una vez devuelto el comando de despliegue, aparecen en la gráfica las líneas de retícula, el título de la gráfica y las leyendas de los ejes x y y introduciendo sucesivamente los comandos.

Escritura de texto en la pantalla de la gráfica. Para escribir un texto que empiece en el punto (X,Y) en la pantalla de la gráfica, use el comando

```
text(X,Y,'text')
```

Por ejemplo, el enunciado

```
text(3,0.45,'sen t')
```

escribirá sen ten una línea horizontal empezando en el punto (3,0.45). Asimismo, los enunciados

```
plot(x1 ,yl ,x2,y2), text(x1,y1,'1'), text(x2,y2,'2')
```

marcan dos curvas para que se distingan con facilidad.

Tipo de gráfica

```
plot(X,Y,'x')
```

dibuja una gráfica de puntos usando símbolos con marcas X, en tanto que

```
plot(X1,Y1,':',X2,Y2, '+')
```

usa una línea punteada para la primera curva y el símbolo más (+) para la segunda. Los tipos de líneas y puntos disponibles son los siguientes:

Tipos de líneas	Tipos de puntos
continua	punto .
de guiones --	signo más +
de puntos	asterisco *
de guión y punto -•	círculos 0
	marcas de x x

Color. Los enunciados

```
plot(X,Y,'r')
plot(X,Y, '+ g')
```

indican el uso de una línea roja en la primera gráfica y las marcas del signo más en verde en la segunda. Los colores disponibles son

red	(rojo)	r
green	(verde)	g
blue	(azul)	b
white	(blanco)	w
invisible		i

Algoritmos para graficación automática. En MATLAB, la escala de una gráfica se determina automáticamente. Permanece como la gráfica actual hasta que se traza otra, en cuyo caso la anterior se borra y la escala de los ejes cambia automáticamente. Los algoritmos para graficación automática de curvas de respuesta transitoria, lugares geométricos de las raíces, trazas de Bode, trazas de Nyquist y similares, están diseñados para funcionar con un amplio rango de sistemas, pero no siempre son perfectos. Por tanto, en ciertas situaciones resulta conveniente invalidar la característica de determinación automática de la escala de los ejes del comando plot y seleccionar manualmente los límites de graficación.

Determinación manual de la escala de los ejes. Si quiere graficar una curva en una región especificada mediante

```
v = [x-min x-max y-min y-max]
```

introduzca el comando axis(v). Este comando, en el cual v es un vector de cuatro elementos, establece la escala de los ejes en los límites prescritos. Para gráficas logarítmicas, los elementos de v son $\log_{10}$ de los mínimos y máximos.

Ejecutar axis(v) congela la escala del eje actual para las gráficas subsecuentes. Escribir axis otra vez reanuda la determinación automática de la escala.

El comando axis('square') establece que la región de la gráfica sea cuadrada. Con una razón de aspecto cuadrada, una línea con una inclinación de 1 está a 45" verdaderos, y no inclinada por la forma irregular de la pantalla axis('normal') regresa la razón de aspecto a su posición normal.

A-3 CÁLCULO DE FUNCIONES MATRICIALES

En esta sección analizaremos el cálculo de las normas, los valores característicos, los vectores característicos, los valores característicos generalizados, los vectores característicos generalizados y los polinomios, entre otros.

Normas. La norma de una matriz es un escalar que produce una medida del tamaño de la matriz. Por lo general se usan varias definiciones diferentes. Una de ellas es

norm(A) = valor singular más grande de A

Asimismo, existen varias definiciones para la norma de un vector. Una que se emplea con frecuencia para la norma de un vector x es

```
norm(x) = sum(abs(x).^2)^0.5
```

Véase el ejemplo siguiente.

```
x = [2   3   6];
norm(x)
ans =

    7
```

Valores y vectores característicos. Si A es una matriz de $n \times n$, entonces los n números λ que satisfacen

$$Ax = \lambda x$$

son los valores característicos de A. Se obtienen usando el comando

```
eig(A)
```

que devuelve los valores característicos en un vector columna.

Si A es real y simétrica, los valores característicos serán reales. Pero si A no es simétrica, los valores característicos serán, con frecuencia, números complejos

Por ejemplo, con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

el comando

```
eig(A)
```

produce

```
ans =
        0 + 1 .0000i
      0 - 1 .ooooi
```

Las funciones de MATLAB pueden tener argumentos de salida única o múltiple. Por ejemplo, como se vio antes, eig(A) produce un vector columna formado por los valores característicos de A, en tanto que un enunciado de asignación doble

```
[X,D] = eig(A)
```

produce valores y vectores característicos. Los elementos de la matriz diagonal D son los valores característicos, y las columnas de X son los vectores característicos correspondientes, tales que

$$A X = X D$$

Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

el enunciado

```
[X,D] = eig(A)
```

produce el resultado siguiente:

```
[X,D] = eig(A)

X =

   -0.5774    0.2182   -0.1048
    0.5774   -0.4364    0.3145
   -0.5774    0.8729   -0.9435


D =

   -1.0000         0         0
         0   -2.0000         0
         0         0   -3.0000
```

Se escalan los vectores característicos para que la norma de cada uno sea 1.

Si los valores característicos de una matriz son distintos, los vectores característicos son siempre independientes y la matriz del vector característico X diagonalizará la matriz A original si se aplica como una matriz de transformación de similaridad. Sin embargo, si una matriz tiene valores característicos repetidos, no es diagonalizable a menos que tenga un conjunto completo (independiente) de vectores característicos. Si los vectores característicos no son independientes, se dice que la matriz original está defectuosa. Incluso si una matriz está defectuosa, la solución obtenida a partir de eig satisface la relación AX = XD.

Valores y vectores característicos generalizados. Si A y B son matrices cuadradas, entonces el comando

```
eig(A,B)
```

devuelve un vector que contiene los valores característicos generalizados que resuelven la ecuación

$$Ax = \lambda Bx$$

en donde λ es un escalar. Los valores de λ que satisfacen la ecuación son los valores característicos generalizados, y los valores correspondientes de **x** son los vectores característicos generalizados.

Para obtener vectores característicos, use el comando de asignación doble del modo siguiente:

```
[X,D] = eig(A,B)
```

Esto produce una matriz diagonal D de los valores característicos generalizados y una matriz X cuadrada cuyas columnas son los vectores característicos correspondientes, de modo que

$$AX = BXD$$

Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces `eig(A,B)` produce

```
eig(A,B)

ans =

   0.3129 - 2.5087i
   0.3129 + 2.5087i
  -0.6258 - 0.0000i
```

Y `[X,D] = eig(A,B)` produce

```
[X,D] = eig(A,B)

X =

   0.7309 + 0.0144i   -0.6720 + 0.2880i   -0.2390 + 0.5893i
  -0.0178 - 0.2503i   -0.0776 - 0.2387i    0.2459 - 0.6062i
  -0.6336 - 0.0336i    0.5745 - 0.2693i   -0.1539 + 0.3794i


D =

   0.3129 - 2.5087i         0                        0
         0                  0.3129 + 2.5087i         0
         0                  0                       -0.6258 - 0.0000i
```

La escala de los vectores característicos se determina de modo que la norma de cada uno sea 1.

Ecuación característica. Las raíces de la ecuación características son iguales a los valores característicos de la matriz A. La ecuación característica de la matriz A se calcula con

```
p = poly(A)
```

Por ejemplo, si se obtiene una matriz A mediante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

entonces el comando poly(A) producirá

```
p = poly(A)

p =

    1.0000    6.0000   11.0000    6.0000
```

Ésta es la representación en MATLAB del polinomio

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0$$

Las raíces de la ecuación característica $p = 0$ se obtienen introduciendo el comando r = roots(p):

```
r = roots(p)

r =

   -3.0000
   -2.0000
   -1.0000
```

Las raíces de la ecuación característica se vuelven a integrar en el polinomio original con el comando q = poly(r).

```
q = poly(r)

q =

    1.0000    6.0000   11.0000    6.0000
```

Producto de polinomios. Considere

$$a(s) = s^2 - 20.6$$

$$b(s) = s^2 + 19.6s + 151.2$$

El producto de los polinomios es la convolución de los coeficientes. El producto de los polinomios a(s) y b(s) se puede obtener introduciendo el comando c = conv(a,b).

```
a = [ l  0  - 20.61;  b = [1 19.6  151.21;
c = conv(a,b)

c =

  1 .0e + 003*

    0.0010      0.0196      0.1306      - 0.4038      - 3.1147
```

Ésta es la **representación** en MATLAB del polinomio

$$c(s) = s^4 + 19.6s^3 + 130.6s^2 - 403.8s - 3114.7$$

Deconvolución (división de polinomios). Para dividir entre $a(s)$ el polinomio $c(s)$ recién obtenido, use el comando de deconvolución [q,r] = deconv(c,a)

```
[q,r] = deconv(c,a)

q =

   1 .0000      19.6000      151.2000


r=

   0       0       0       0       0
```

Cálculo del valor de polinomios. Si p es un vector cuyos elementos son los coeficientes de un polinomio en potencias descendentes, entonces pol ival(p,s) es el valor del polinomio evaluado en s. Por ejemplo, para calcular el valor del polinomio

$$p(s) = 3s^2 + 2s + 1$$

en $s = 5$, introduzca el comando

```
p = [3  2  ll;
polyval(p,5)
```

Así, obtenemos

```
ans =
    86
```

El comando polyvalm(p,A) calcula el valor del polinomiop en un sentido matricial. Considere la matriz J siguiente:

$$J = \begin{bmatrix} -2 + j2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -2 - j2\sqrt{3} & -10 \end{bmatrix}$$

El comando poly(J) produce el polinomio característico para **J**.

```
p = poly(J)

p =

    1.0000      14.0000      56.0000     160.0000
```

Ésta es la expresión de MATLAB para el polinomio característico para J.

$$\text{poly}(\mathbf{J}) = \phi(\mathbf{J}) = \mathbf{J}^3 + 14\mathbf{J}^2 + 56\mathbf{J} + 1601$$

en donde **I** es la matriz identidad. Para la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

el comando polyvalm(poly(J),A) calcula el valor de la $\phi(\mathbf{A})$ siguiente:

$$\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 + 14\mathbf{A}^2 + 56\mathbf{A} + 160\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 154 & 45 & 8 \\ -48 & 66 & -3 \\ 18 & -15 & 84 \end{bmatrix}$$

Véase la salida de MATLAB siguiente.

```
polyvalm(poly(J),A)

ans =

   154.0000      45.0000       8.0000
   -48.0000      66.0000      -3.0000
    18.0000     -15.0000      84.0000
```

Obtención de los cuadrados de las entradas de un vector ***x***. Para un vector x, x.^2 produce el vector del cuadrado de cada elemento. Por ejemplo, para

$$x = [1 \quad 2 \quad 3]$$

x.^2 se obtiene como aparece en la salida de MATLAB siguiente.

```
x = [1 2 31;
x.^2

ans =

     14          9
```

Asimismo, para el vector y,

$$\mathbf{y} = [2 + 5j \quad 3 + 4j \quad 1 - j]$$

y.^2 se obtiene así:

```
y = [2+5*i   3+4*i   1-i];
y.^2

ans =

  -21 .oooo + 20.0000i   -7.0000 + 24.0000i          0 - 2.0000i
```

Obtención de los cuadrados de una matriz A. Para una matriz A, A.^2 produce la matriz formada por el cuadrado de todos sus elementos. Por ejemplo, para las matrices A y B, en las que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1+j & 2-2j \\ 3+4j & 5-j \end{bmatrix}$$

A.^2 y B.^2 se obtienen del modo siguiente:

```
A = [1 2;3 4];
A.^2

ans =

     1     4
     9    16

B = [1+i    2-2*i;3+4*i    5-i];
B.^2

ans =

          0 + 2.0000i          0 - 8.0000i
  -7.0000 + 24.0000i    24.0000 - 1 O.OOOOi
```

Valores absolutos. abs(A) produce'la matriz formada por el valor absoluto de todos los elementos de A. Si A es compleja, abs(A) devuelve el módulo complejo (la magnitud):

```
abs(A) = sqrt(real(A).^2 + imag(A).^2)
```

angle(A) devuelve los ángulos de fase, en radianes, de los elementos de la matriz compleja A. Los ángulos se encuentran entre $-\pi$ y π. **Véase** el ejemplo siguiente.

```
A = [2 +2*i    1+3*i;4+5*i    6-i];
abs(A)

ans =

       2.8284       3.1623
```

```
      6.403 1          6.0828

angle(A)

ans =

      0.7854          1.2490
      0.8961        - 0.1651
```

Magnitud y ángulo de fase de un número complejo. La magnitud y el ángulo de fase de un número complejo $z = x + iy = re^{i\theta}$ se obtienen mediante

```
r = abs(z)
theta = angle(z)
```

y el enunciado

```
z = r*exp(i*theta)
```

los devuelve al número complejo z original.

Exponencial de una matriz. El comando expm(A) es el exponencial de una matriz de una matriz A de n X n. Es decir,

$$\text{expm(A)} = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

Observe que una función trascendente se interpreta como la función de una matriz si se agrega una "m" al nombre de la función, como expm(A) o sqrtm(A).

Matrices de utilidad. En MATLAB, las funciones

```
ones(n)
ones(m,n)
ones(A)
zeros
```

generan matrices especiales. Es decir, ones(n) produce una matriz de n X n de unos. ones(m,n) produce una matriz de m X n de unos. Asimismo, zeros(n) produce una matriz de n X n de ceros, en tanto que zeros(m,n) produce una matriz de m X n de ceros. zeros(A) produce una matriz de ceros del mismo tamaño de A, excepto cuando A es un escalar.

Matriz identidad. Con frecuencia necesitamos introducir una matriz identidad 1 en los programas de MATLAB. Un enunciado eye(n) produce una matriz identidad de n X n. Es decir,

```
eye(5)

ans =
```

```
     1     0     0     0     0
     0     1     0     0     0
     0     0     1     0     0
     0     0     0     1     0
     0     0     0     0     1
```

Matriz diagonal. Si x es un vector, un enunciado diag(x) produce una matriz diagonal con x en la diagonal principal. Por ejemplo, para un vector

x = [ones(1,n)]

diag([ones(1 ,n)]) produce una matriz identidad de n x n del modo siguiente:

```
diag([ones(1,5)])

ans =

     1     0     0     0     0
     0     1     0     0     0
     0     0     1     0     0
     0     0     0     1     0
     0     0     0     0     1
```

Si A es una matriz cuadrada, entonces diag(A) es un vector formado por la diagonal de A, y diag(diag(A)) es una matriz diagonal en la que los elementos de diag(A) aparecen en la línea diagonal. Véase la salida de **MATLAB** siguiente.

```
A = [1 2 3;4 5 6;7 8 91;
diag(A)

ans =

     1
     5
     9

diag(diag(A))

ans =

     1     0     0
     0     5     0
     0     0     9
```

Observe que diag(1:5) produce

```
diag(1:5)

ans =

     1     0     0     0     0
     0     2     0     0     0
     0     0     3     0     0
     0     0     0     4     0
     0     0     0     0     5
```

Asimismo, diag(0:4) genera

```
diag(0:4)

ans =

     0     0     0     0     0
     0     1     0     0     0
     0     0     2     0     0
     0     0     0     3     0
     0     0     0     0     4
```

Por tanto, diag(1:5) – diag(0:4) es una matriz identidad.

Es importante señalar que diag(0,n) es muy diferente de diag(0:n). Esta última es una matriz de $(n + 1) \times (n + 1)$ formada sólo con elementos cero. Véase la salida de MATLAB siguiente.

```
diag(0,4)

ans =

     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0
```

A-4 MODELOS MATEMÁTICOS DE SISTEMAS LINEALES

MATLAB tiene comandos útiles para transformar un modelo matemático de un sistema lineal en otro modelo. A continuación se listan tales transformaciones lineales de un sistema, las cuales son útiles para resolver problemas de ingeniería de control.

Función de transferencia al espacio de estados. El comando

```
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den)
```

convierte el sistema en la forma de una función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{num}}{\text{den}} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D$$

a la forma en el espacio de estados:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{c}\mathbf{x} + Du$$

Del espacio de estados a función de transferencia. Si el sistema tiene una entrada y una salida, el comando

```
[num,den] = ss2tf(A,B,C,D)
```

produce la función de transferencia $Y(s)/U(s)$.

Si el sistema contiene más de una entrada, use el comando siguiente:

```
[num,den] = ss2tf(A,B,C,D,iu)
```

Este comando convierte el sistema en el espacio de estados

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

a la función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U_i(s)} = \text{i-ésimo eldmento de } [\ \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]$$

Observe que el escalar 'iu' es un índice dentro de las entradas del sistema y especifica cuál entrada se va a usar para la respuesta.

Por ejemplo, considere el sistema siguiente, que tiene dos entradas, u_1 y u_2.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$Y = [1\ 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + [0\ 0]\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

Para este sistema se obtienen dos funciones de transferencia. Una relaciona la salida y con la entrada u_1 y la otra relaciona la salida y con la entrada u_2. (Al considerar la entrada u_1 suponemos que la entrada u_2 es cero y viceversa.) Véase la salida de MATLAB siguiente.

```
A = [0   l;-2   -31;
B = [1 0;0 ll;
c = [1 01;
D = [0 01;

[num,den] = ss2tf(A,B,C,D,1)

num =
```

```
        0    1    3

den =

        1    3    2

[num,den] = ss2tf(A,B,C,D,2)

num =

        0    0    1

den =

        1    3    2
```

A partir de la salida de MATLAB, tenemos que

$$\frac{Y(s)}{U_1(s)} = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

y

$$\frac{Y(s)}{U_2(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

Expansión en fracciones parciales de la función de transferencia. Considere la función de transferencia

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{b(1)s^n + b(2)s^{n-1} + \cdots + \text{b(n)}}{a(1)s^n + a(2)s^{n-1} + \cdots + \text{a(n)}}$$

en donde $a(1) \neq 0$, pero algunas de las $a(i)$ y $b(j)$ pueden ser cero.

Los vectores de renglón num y den especifican los coeficientes del numerador y el denominador de la función de transferencia. Es decir,

$$\text{num} = [\text{b(l)} \quad \text{b(2)} \quad \cdots \quad \text{b(n)}]$$

$$\text{den} = [\text{u(l)} \quad a(2) \quad \cdots \quad \text{u(n)}]$$

El comando

```
[r,p,k] = residue(num,den)
```

encuentra los residuos, los polos y los términos directos de una expansión en fracciones parciales del cociente de dos polinomios $B(s)$ y $A(s)$. La expansión en fracciones parciales de $B(s)/A(s)$ se obtiene mediante

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{r(1)}{s - \text{p(l)}} + \frac{r(2)}{s - \text{p(2)}} + \cdots + \frac{r(n)}{s - p(n)} + k(s)$$

Corno ejemplo, considere la siguiente función de transferencia:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Para esta función,

```
num = [2   5   3   6]
den = [1   6   11  61
```

El comando

```
[r,p,k] = residue(num,den)
```

produce el resultado siguiente:

```
[r,p,k] = residue(num,den)

r =

  - 6.0000
  - 4.0000
    3.0000


p =

  - 3.0000
  - 2.0000
  - 1.0000


k =

    2
```

Observe que los residuos se regresan en el vector columna r, las ubicaciones de polos en el vector columna p, y el término directo en el vector renglón k. Ésta es la representación de MATLAB de la siguiente expansión en fracciones parciales de $B(s)/A(s)$:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$
$$= \frac{-6}{s + 3} + \frac{-4}{s + 2} + \frac{3}{s + 1} + 2$$

El comando

```
[num,den] = residue(r,p,k)
```

en donde r, p y k se obtienen como en la salida anterior de MATLAB, convierte la expansión en fracciones parciales nuevamente en un cociente de polinomios $B(s)/A(s)$ del modo siguiente:

```
[num,den] = residue(r,p,k)

num =

    2.0000    5.0000    3.0000    6.0000


den =

    1.0000    6.0000   11.0000    6.0000
```

Conversión de tiempo continuo a tiempo discreto. El comando

$$[G,H] = c2d(A,B,Ts)$$

en **donde** Ts es el periodo de muestreo en segundos, convierte el modelo en el espacio de estados en tiempo continuo a tiempo discreto, suponiendo un retén de orden cero en las entradas. Es decir, con. este comando,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

se convierte en

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Gx}(k) + \mathbf{Hu}(k)$$

Por ejemplo, considere el siguiente sistema en tiempo continuo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

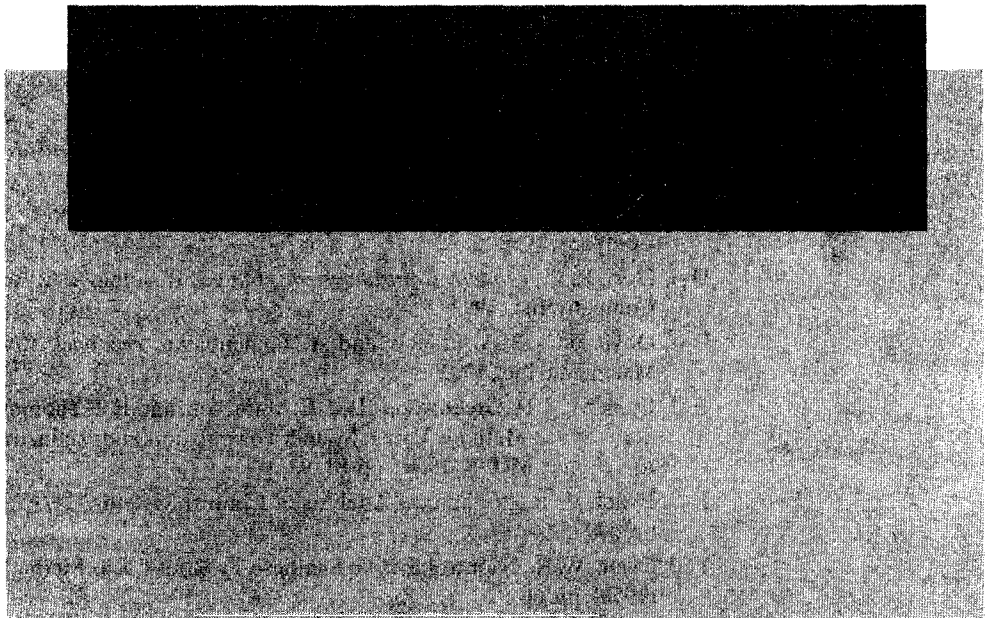
Se puede obtener un sistema equivalente en tiempo discreto usando el comando [G,H] = c2d(A,B,Ts). Se supone que el periodo de muestreo Ts es deQ.05 seg. Véase la salida de MATLAB siguiente.

```
A = [0 1;-25 -4];
B = [0;1];
format long
[G,H] = c2d(A,B,0.05)

G =

   0.97088325381929   0.04484704238264
  -1.12117605956599   0.79149508428874


H =

   0.00116466984723
   0.04484704238264
```

La ecuación equivalente en el espacio de estados en tiempo discreto se obtiene mediante

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9709 & 0.04485 \\ -1.1212 & 0.7915 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.001165 \\ 0.04485 \end{bmatrix} u(k)$$

Resumen. El material que se presentó en este apéndice constituye un requisito previo para MATLAB. Dado que todos los cálculos y gráficas de este libro se efectúan con MATLAB, el lector debe manejar con fluidez el material de este apéndice.



A-l. Ackermann, J. E., "Der Entwulf Linearer Regelungs Systeme im Zustandstraum," *Regelungs-technik und Prozessdatenverarbeitung,* 7(1972), pp. 297–300.

A-2 Anderson, B. D. O., and J. B. Moore, ***Linear Optima1 Control.*** Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1971.

A-3 Athans, M., and P. L. Falb, ***Optima1 Control: An Zntroduction to the Theory and Zts Applications. New*** York McGraw-Hill Book Company, 1965.

B-l Barnet, S., "Matrices, Polynomials, and Linear Time-invariant Systems," ***ZEEE Trans. Automatic Control,*** **AC-18** (1973), pp. 1-10.

B-2 Bayliss, L. E., ***Living Control Systems.*** London: English Universities Press Limited, 1966.

B-3 Bellman, R., ***Zntroduction to Matrix Analysis.*** New York: McGraw-Hill Book Company, 1960.

B-4 Bode, H. W., ***Network Analysis and Feedback Design.*** New York: Van Nostrand Reinhold, 1945.

B-5 Brogan, W. L., ***Modern Control Theory.*** Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1985.

B-6 Butman, S., and R. Sivan (Sussman), "On Cancellations, Controllability and Observability," ***ZEEE Trans. Automatic Control,*** **AC-9** (1964), pp. 317-8.

C-1 Campbell, D. P., ***Process Dynamics.*** New York: John Wiley & Sons, Inc., 1958.

C-2 Cannon, R., ***Dynamics of Physical Systems.*** New York: McGraw-Hill Book Company, 1967.

C-3 Chang, F! M., and S. Jayasuriya, "An Evaluation of Severa1 Controller Synthesis Methodologies Using a Rotating Flexible Beam as a Test Bed, "***ASME J. Dynamic Systems, Measurement, and Control,*** 117 (1995), pp. 360-73.

C-4 Cheng, D. K., ***Analysis*** of ***Linear Systems.*** Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1959.

C-5 Churchill, R. ***V., Operational Mathematics,*** 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1972.

C-6 Coddington, E. A., and N. Levinson, ***Theory of Ordinary Differential Equations. New*** York: McGraw-Hill Book Company, 1955.

C-7 Craig, J. J., ***Zntroduction to Robotics, Mechanics and Control.*** Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1986.

C-8 Cunningham, W. J., ***Zntroduction to Nonlinear Analysis. New*** York: McGraw-Hill Book Company, 1958.

D-l Dorf, R. ***C., Modern Control systems,*** 6th ed. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1992.

D-2 Doyle, J.C., B. A. Francis, and A. Tannenbaum, ***Feedback Control Theory. New*** York: Macmillan, Inc., 1992.

E-l Enns, M., J. R. Greenwood III, J. E. Matheson, and F. T. Thompson, "Practica1 Aspects of State-Space Methods Part 1: System Formulation and Reduction," ***ZEEE*** Trans. ***Military Electronics,*** MIL-8 (1964), pp. 81-93.

E-2 Evans, W. R., "Graphical Analysis of Control Systems," ***AZEE Trans. Part II, 67*** (1948), pp. 547-51.

E-3 Evans, W. R., "Control System Synthesis by Root Locus Method," ***AZEE Trans. Part II, 69*** (1950), pp. 66-9.

E–4 Evans, W. R., "The Use of Zeros and Poles for Frequency Response or Transient Response," ***ASME Trans., 76*** (1954), pp. 1135-44.

F-1 Franklin, G. F., J. D. Powell, and A. Emami-Naeini, ***Feedback Control of Dynamic Systems.*** Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1986.

F-2 Friedland, B., ***Control System Design.*** New York: McGraw-Hill Book Company, 1986.

F-3 Fu, K. S., R. C. Gonzalez, and ***C. S. G. Lee, Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence.*** New York: McGraw-Hill Book Company, 1987.

G-1 Gantmacher, F. R., ***Theory of Matrices,*** Vols. 1 and II. New York: Chelsea Publishing Company, Inc., 1959.

G-2 Gardner, M. F., and J. L. Bames, ***Transients in Linear Systems.*** New York: John Wiley & Sons, Inc., 1942.

G-3 Gibson, J. E., ***Nonlinear Automatic Control.*** New York: McGraw-Hill Book Company, 1963.

G-4 Gilbert, E. G., "Controllability and Observability in Multivariable Control Systems," ***J.SIAM Control,*** ser. A, 1 (1963), pp. 128-51.

G-5 Graham, D., and R. C. Lathrop, "The Synthesis of Optimum Response: Criteria and Standard Forms," ***AZEE Trans. Part ZZ, 72*** (1953), pp. 273-88.

H-1 Hahn, W., ***Theory and Application of Liapunov's Direct Method.*** Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1963.

H-2 Halmos, P. R., ***Finite Dimensional Vector Spaces.*** New York: Van Nostrand Reinhold, 1958.

H-3 Higdon, D. T., and R. H. Cannon, Jr., "On the Control of Unstable Multiple-output Mechanical Systems," ***ASME Paper no. 63-WA-148,*** 1963.

I-1 Irwin, J. D., ***Basic Engineering Circui' Analysis. New*** York: Macmillan, Inc., 1984.

J-l Jayasuriya, S., "Frequency Domain Design for Robust Performance Under Parametric, Unstructured, or Mixed Uncertainties," ***ASME J. Dynamic Systems, Measurement, and*** Control, 115 (1993), np. 439-51.

K-l Kailath, T., ***Linear Systems.*** Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1980.

K-2 Kalman, R. E., "Contributions to the Theory of Optima1 Control," ***Bol. Soc. Mat. Mex., 5*** (1960), pp. 102-19.

K-3 Kalman, R. E., "On the General Theory of Control Systems," *Proc. First Intern. Cong. ZFAC,* Moscow, 1960; ***Automatic and Remote Control.*** London: Butterworths & Company Limited, 1961, pp. 481-92.

K-4 Kalman, R. E., "Canonical Structure of Linear Dynamical Systems," *Proc. Natl. Acad. Sci., USA, 48* (1962), pp. 596–600.

K-5 Kalman, R. E., "When Is a Linear Control System Optimal?" *ASME J. Basic Engineering,* ser. D, 86 (1964), pp. 51-60.

K-6 Kalman, R. E., and J. E. Bertram, "Control System Analysis and Design via the Second Method of Lyapunov: 1 Continuous-Time Systems," *ASME J. Basic Engineering,* ser. D, 82 (1960), pp. 371-93.

K-7 Kalman, R. E., Y. C. Ho, and K. S. Narendra, "Controllability of Linear Dynamic Systems," in *Contributions to Differential Equations,* Vol. 1. New York: Wiley-Interscience Publishers, Inc., 1962.

K–8 Kochenburger, R. J., "A Frequency Response Method for Analyzing and Synthesizing Contactor Servomechanisms," *AZEE Trans., 69* (1950), pp. 270-83.

K-9 Kreindler, E., and P. E. Sarachick, "On the Concepts of Controllability and Observability of Linear Systems," *ZEEE Trans. Automatic Control,* **AC-9** (1964), pp. 129-36.

K–10 Kuo, B. C., *Automatic Control Systems,* 6th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1991.

L-l LaSalle, J. P., and S. Lefschetz, ***Stability of Liapunov's Direct Method with Applications.*** New York: Academic Press, Inc., 1961.

L-2 Luenberger, D. G., "Observing the State of a Linear System," *IEEE Trans. Military Electr.,* MIL-8 (1964), pp. 74-80.

L-3 Lur'e, A. I., and E. N. Rozenvasser, "On Methods of Constructing Liapunov Functions in the Theory of Nonlinear Control Systems," *Proc. First Zntern. Cong. ZFAC,* Moscow, *1960, Automatic and Remote Control.* London: Butterworths & Company Limited, 1961, pp. 928-33.

M-l MathWorks, Inc., ***MATLAB User's Guide.*** Natick, Mass.: MathWorks, Inc., 1990.

M-2 MathWorks, Inc., ***The Student Edition of MATLAB,*** version 3.5. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1992.

M-3 MathWorks, Inc., ***The Student Edition of MATLAB,*** version 4.0. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1995.

M-3 Melbourne, W. G., "Three Dimensional Optimum Thrust Trajectories for Power-Limited Propulsion Systems," *ARS J.,* **31** (1961), pp. 1723-8.

M-4 Melbourne, W. G., and C. G. Sauer, Jr., "Optimum Interplanetary Rendezvous with Power-Limited Vehicles," *AIAA J.,* **1** (1963), pp. 54-60.

M-6 Minorsky, ***N., Nonlinear Oscillations. New*** York: Van Nostrand Reinhold, 1962.

M-7 Monopoli, R. V., "Controller Design for Nonlinear and Time-Varying Plants," ***NASA CR-***152, Jan., 1965.

N-1 Noble, B., and J. Daniel, *Applied Linear Algebra,* 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1977.

N-2 Nyquist, H., "Regeneration Theory," *Bell System Tech. J.,* 11 (1932), pp. 126–47.

O-1 Ogata, K., *State Space Analysis of Control Systems,* Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1967.

0-2 Ogata, K., ***System Dynamics,*** 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1992.

0-3 Ogata, K., ***Discrete-time Control Systems,*** 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, **199.5.**

O–4 Ogata, K., *Solving Control Engineering Problems with MATLAB.* Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1994.

0-5 Ogata, K., ***Designing Linear Control Systems with MATLAB.*** Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1994.

P-1 Phillips, C. L., and R. D. Harbor, ***Feedback Control Systems.*** Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1988.

P-2 Pontryagin, L. S.,V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko, ***The Mathematical Theory of Optima1 Processes.*** New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.

R-1 Rekasius, Z. V., "A General Performance Index for Analytical Design of Control Systems," ***IRE Trans. Automatic Control,*** **AC-6** (1961), pp. 217-22.

S-1 Schultz, D. G., and J. E. Gibson, "The Variable Gradient Method for Generating Liapunov Functions," ***AZEE Trans.*** Part II, **81** (1962), pp. 203-09.

S-2 Schultz, W. C., and V. C. Rideout, "Control System Performance Measures: Past, Present, and Future," ***IRE Trans. Automatic Control,*** **AC-6** (1961), pp. 22-35.

S-3 Smith, R. J., ***Electronics: Circuits and Devices,*** 2d ed. New York John Wiley & Sons, Inc., 1980.

S–4 Staats, P. F., "A Survey of Adaptive Control Topics" ***Plan B paper,*** Dept. of Mech. Eng., University of Minnesota, March 1966.

S–5 Strang, ***G., Linear Algebra and Zts Applications.*** New York: Academic Press, Inc., 1976.

T-1 Truxal, J. ***G., Automatic Feedback Systems Synthesis.*** New York: McGraw-Hill Book Company, 1955.

V-l Valkenburg, M. E., ***Network Analysis.*** Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1974.

V-2 Van Landingham, H. F., and W. A. Blackwell, "Controller Design for Nonlinear and Time-Varying Plants," ***Educational Monograph,*** College of Engineering, Oklahoma State University, 1967.

W-1 Wadel, L. B., "Describing Function as Power Series," ***IRE Trans. Automatic Control,*** **AC-7** (1962), p. 50.

W-2 Waltz, M. D., and K. S., Fu, "A Learning Control System," ***Proc. Joint Automatic Control Conference, 1964,*** pp. 1-5.

W-3 Wilcox, R. B., "Analysis and Synthesis of Dynamics Performance of Industrial Organizations-The Application of Feedback Control Techniques to Organizational Systems," ***ZRE Trans. Automatic Control,*** **AC-7** (1962), pp. 55-67.

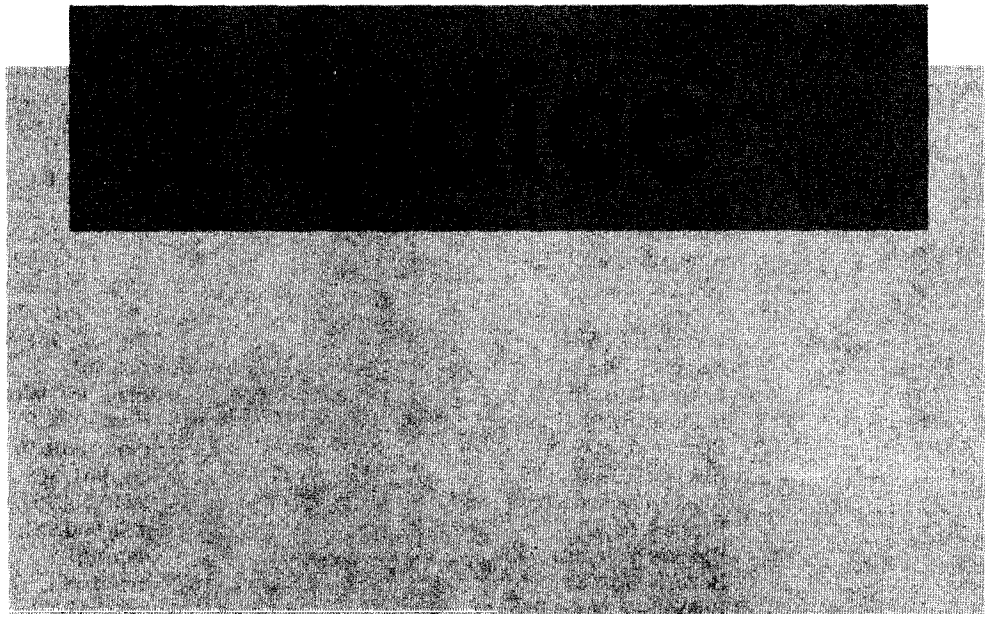
W–4 Willems, J.C., and S. K. Mitter, "Controllability, Observability, Pole Allocation, and State Reconstruction," ***IEEE Trans. Automatic Control,*** **AC-16** (1971), pp. 582-95.

W-5 Wojcik, C. K., "Analytical Representation of the Root Locus," ***ASME J. Basic Engineering,*** ser. D, 86 (1964), pp. 37-43.

W-6 Wonham, W. M., "On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems," ***IEEE Trans. Automatic Control,*** **AC-12** (1967), pp. 660–65.

Z-l Ziegler, J. G., and N. B. Nichols, "Optimum Settings for Automatic Controllers," ***ASME Trans. 64*** (1942), pp. 759-68.

Z–2 Ziegler, J. G., and N. B. Nichols, "Process Lags in Automatic Control Circuits," ***ASME Trans. 65*** (1943), pp. 433-44.



A

Abscisa de convergencia, 17-18
Acción de control de dos posiciones, 2 13
Acción de control de encendido y apagado, 2 13
Acción de ***control*** derivativa, 225
  principio básico para obtener, 250-252, 261-262
Acción de control integral, 215-219
  principio básico para obtener, 252-254, 260-26 1
Acción de control proporcional, 215
Acción de control proporcional-derivativo, 216,261
Acción de control proporcional-derivativo neumático, 25 1-252
Acción de control proporcional-integral, 216,260
Acción de control proporcional-integral neumático, 252-254
Acción de control proporcional-integral-derivativo, 217-218
Acción de control proporcional-integral-derivativo neumático, 254-255
Acciones básicas de control, 212-218
  de dos posiciones, 213-215
  de encendido y apagado, 213-215
  integrales, 215-216
  proporcionales, 215
  proporcionales-derivativos, 216-217
  proporcionales-integrales, 216-217
  proporcionales-integrales-derivativos, 217-218
Acciones de control, 212-218
Ackermann, J. E., 983
Actuador, 212
Adelanto de fase, 273,413
Ajuste de ganancia, 564-567
Aleta, 242
  válvula, 3 14
Amortiguador, **83, 259-260**
Amplificador de tobera-aleta, 242-243
Amplificador de tobera-aleta neumático, 242-244
Amplificador diferencial, 263
Amplificador inversor, 263-264
Amplificador no inversor, 264
Amplificador operacional (op amp), 263
Análisis de estabilidad, 532-542
  en el plano complejo, 231-232
Análisis de estabilidad de Liapunov:
  de sistemas lineales e invariantes con el tiempo, 907-912
Análisis de estabilidad de Nyquist, 532-542
Análisis de estabilidad relativa:
  mediante mapeos conformes, 543-544
  mediante trazas de Nyquist modificadas, 540-542
Ancho de banda, 555-563
Anderson, B. D. O., 983

Ángulo:
de llegada, 334
de salida, 327,334
Ángulo de adelanto de fase máximo, 612-613
Asíntotas:
trazas de Bode, 477
lugar geométrico de las raíces, 322
Atenuación, 146
Athans, M., 983
Atraso de fase, 273,473

B

Bames, J. L., 984
Bamet, S., 983
Bayliss, L. E., 983
Bellman, R., 983
Bertram, J. E., 985
Blackwell, W. A., 986
Bloque funcional, 63
Bloques, 63
Bloques de Jordan, 740
Bode, H. W., 983
Boltyanskii, V. G., 986
Brecha diferencial, 214
Brogan, W. L., 983
Butman, S., 983

C

Campbell, D. P., 983
Cannon, R., 983
Cannon, R. H., Jr., 984
Capacitancia:
de sistemas neumáticos, 239-240
de sistemas térmicos, 98
de tanques de agua, 94
Capacitancia térmica, 98
Carta de Nichols, 560-563
Cero, 16
de orden *n*, 16
Chang, P. M., 983
Cheng, D. K., 983
Churchill, R. V., 984
Circuitos con amplificador operacional, 306-308
para el compensador de atraso o adelanto, 266
tabla de, 270
Círculos M, 557-558
Círculos N, 558-560
Clasificación de sistemas de control, 275, 390-391
Coddington, E. A., 984
Coeficiente de fricción viscosa equivalente, 145-146, 191-193
Coeficiente de válvula, 105
Comandos de MATLAB:
[A,B,C,D,]=tf2ss(num,den), 759,977
abs, 961,974
angle, 974
axis, 961,967
axis, ('normal'), 967
axis, ('square'), 967
bode, 961
bode, (A,B,C,D), 502
bode, (A,B,C,D,iu), 502
bode, (num,den), 493
bode, (num,den,w), 495
clear, 961,963
conv, 961,971
deconv, 961,972
det, 961
diag, 961,976
diag, (O,n), 977
diag, (O:n), 977
eig, 961,968
eig(A,B), 969,970
exit, 960-961, 965
exp, 961
expm, 961,975
eye, 961
eye(n), 975
filter, 961
format long, 961,964
format long e, 961,964
format short, 961,964
format short e, 961,964
[G,H] = c2d(A,B,Ts), 185,981
grid, 961,965
hold, 185, 961, 965
imag, 961
impulse(A,B,C,D), 166
impulse(num,den), 166
inv, 961
K = lqr(A,B,Q,R), 925,931
[K,P,E] = lqr(A,B,Q,R), 925
linspace, 962
logspace, 962
logspace(d1,d2), 493
logspace(d1,d2,n), 493
lqr, 962
lqr(A,B,Q,R), 925
magdB = 20*log10(mag), 493,578
[mag,phase,w] = bode(A,B,C,D,iu,w), 578
[mag,phase,w] = bode(num,den,w), 492,495
NaN, 962
[num,den] = residue(r,p,k), 42-980
[num,den] = sst2tf(A,B,C,D), 720,978
[num,den] = ss2tf(A,B,D,D,iu), 719,978
[NUM,den] = ss2tf(A,B,C,D,iu), 721
nyquist, 962
nyquist(A,B,C,D), 517
nyquist(A,B,C,D,iu), 518

nyquist(A,B,C,D,iu,w), 518
nyquist(num,den), 513
nyquist(num,den,w), 513
ones, 962
ones(A), 975
ones(m,n), 975
ones(n), 975
pi, 962
plot, 962,965
plot(x,y), 965
polar, 962
poly, 798, 962, 970-971
polyval, 962,972
polyvalm, 801, 962, 972
quit, 960, 962, 965
r = abs(z), 975
[r,K] = rlocus(A,B,C,D), 339
[r,K] = rlocus(A,B,C,D,K), 339
[r,K] = rlocus(num,den), 339
[r,K] = rlocus(num,den,K), 339
[r,p,K] = residue(num,den), 41-43, 979-980
ran k, 962
[re,im,w] = nyquist(num,den,w), 513, 593
rem, 962
residue, 962
rlocus, 962
rlocus(A,B,C,D,K), 339
rlocus(num,den), 338
rlocus(num,den,K), 339
roots, 962,971
save, 965
semilog, 496
semilogx, 962
semilogy, 962
size, 962
sqrt, 962
sqrtm, 963
step, 963
step(A,B,C,D), 161
step(num,den), 161
step(num,den,t), 161
sum, 963
text, 165, 963, 966
theta = angle(z), 975
title, 963,965
who, 963
[X,D] = eig(A), 968-969
[X,D] = eig (A,B), 969
xlabel, 963-965
[y,x,t] = impulse(A,B,C,D), 167
[y,t,x] = impulse(A,B,C,D,iu), 167
[y,x,t] = impulse(A,B,C,D,iu,t,), 167
[y,x,t] = impulse(num,den), 166
[y,x,t] = impulse(num,den,t), 166
[y,x,t] = impulse(A,B,C,D,iu), 161
[y,x,t] = impulse(num,den,t), 161
ylabel, 963,965
z = r*exp(i*theta), 975
zeros, 963,975
zeros(A), 975
zeros(m,n), 975
zeros(n), 975
Compensación, 405
en serie, 405-406
paralela, 405
por prealimentación, 5, 700-703
por realimentación, 405
Compensación de atraso-adelanto, 427-432, 630-634
Compensador, 405
Compensador de adelanto, 406, 409-417
características de la respuesta en frecuencia de, 612-613
diseño mediante método de la respuesta en frecuencia, 613-615
diseño mediante método del lugar geométrico de las raíces, 411-412
Compensador de atraso, 406, 418-420
diseño mediante el método de la respuesta en frecuencia, 622-623
diseño mediante el método del lugar geométrico de las raíces, 418-420
traza de Nyquist de, 621-622
trazas de Bode de, 621-623
Compensador de atraso-adelanto, 406
diseño mediante el método de la respuesta en frecuencia, 63 1
diseño mediante el método del lugar geométrico de las raíces, 429-43 1
electrónico, 427-429
traza polar de, 630-63 1
trazas de Bode de, 630-631
Condición de ángulo, 3 19
Condición de magnitud, 3 19
Cóndiciones de Cauchy-Riemann, 15
Constante de aceleración gravitacional, 8 1
Constante de error estático de aceleración, 278-279
determinación de, 49 1-492
Constante de error estático de posición, 276
determinación de, 489-490
Constante de error estático de velocidad, 277
determinación de, 490-491
Constante de par del motor, 143
Constante de tiempo del motor, 145
Constante universal de los gases, 296
Contornos de las raíces, 364
gráficas de los, 364-368
Control con dos grados de libertad, 683-685
Control de prealimentado de la perturbación, 700-701
Control de restablecimiento. 216

Control de velocidad, 217
Control I-PD, 681-682
Control integral mediante la realimentación del estado, 682-683
Control óptimo cuadrático, 915-924
Control PI-D, 680-68 1
Control prealimentado, 5, 700-703
Control proporcional:
de sistema con carga de inercia, 225-226
Control proporcional-derivativo:
de sistema con carga de inercia, 226
de sistema de segundo orden, 226-228
Control realimentado, 3
Control robusto, 685-690
Controlabilidad, 737-743
de salida, 742
Controlabilidad completa de la salida, 778-780
Controlabilidad completa del estado, 737-738,775778
en el plano s, 741
Controlabilidad del estado:
completa, 739-741
Controlador automático, 2 11
Controlador de dos posiciones neumático, 246-247
Controlador de encendido y apagado neumático, 246-247
Controlador de pila, 247-248
Controlador de velocidad de Watt, 3
Controlador hidráulico:
de tubo a chorro, 301-303
integral, 256-258
proporcional, 258-259
proporcional-derivativo, 261-262
proporcional-integral, 260-261
Controlador-observador:
función de transferencia para, 836-837
Controlador PD, 250, 690-691
Controlador PI, 252-254, 690-691
Controlador PID, 254-255, 455-456, 674-679, 690-691
modificado, 692-693
usando amplificadores operacionales, 268-269
Controlador PID eléctrico, 268
Controlador proporcional neumático, 246
de tipo fuerza-balance, 247-248
de tipo fuerza-distancia, 244-247
Controladores autooperados, 213
Controladores industriales, 2 12
Controladores neumáticos, 244-255
Convolución, 33
integral, 33, 49, 62
Craig, J. J., 984
Criterio de estabilidad de Hurwitz, 290-291, 946
equivalencia del criterio de estabilidad de Routh y el, 291-294
Criterio de estabilidad de Nyquist, 521, 523-532
aplicado a traza polar inversa, 537-540
Criterio de estabilidad de Routh, 232-236
Criterio de Sylvester:
para definidad positiva, 901
Cunmngham, W. J., 984
Curva de respuesta en frecuencia en lazo abierto:
volver a dar forma a, 6 ll
Curva de respuesta exponencial, 136-137
Curva en forma de s, 67 1
Curvas de respuesta escalón unitario:
de sistema de segundo orden, 149
Curvas de respuesta impulso unitario:
obtenidas usando MATLAB, 204-207
una familia de, 159

D

Daniel, J., 985
Deconvolución, 972
Década, 475
Decibel, 473
Decremento logarítmico, 198-199
Definidad negativa:
de función escalar, 900
Definidad positiva de funciones escalares, 900
Desempeño en el seguimiento, 686
Determinantes de Hmwitz, 292
Diagonalización de una matriz de n X n, 714-715
Diagrama de bloques, 63-64
álgebra, 68
reducción, 68
Diferenciador:
aproximado, 693-694
Dinámica del error, 8 18
Dispositivo de realimentación de velocidad, 637
Dominio de atracción, 898
Dorf, R. C., 984
Doyle, J. C., 984

E

e^{At}:
calculo de, 73 1-735
Ecuación característica, 970
Ecuación de error del observador, 825
Ecuación de estado, 72
solución del caso homogéneo, 722-727
solución del caso no homogéneo, 727-728
solución mediante la transformada de Laplace de, 725, 728-729
Ecuación de estado homogénea:
solución de, 722-727

Ecuación de estado no homogénea:
solución de, 727-729
Ecuación de Euler, 937
Ecuación de Riccati, 916
Ecuación de salida, 72
Ecuación del error:
para observador de orden mínimo, 833
Ecuación en el espacio de estados, 71
correlación entre función de transferencia y, 74
solución de, 722-729
Ecuación matricial de Riccati, 925
Ecuación matricial reducida de Riccati, 922-923
Elemento de medición, 213, 218-219
Emami-Naeini, A., 984
Enns, M., 984
Equivalencia, 141
Error de modelado, 686
Error de velocidad, 277
Error en estado estable, 135
sistema de control con realimentación unitaria, 274-280
Espacio de estados, 7 1
Espacio muerto, 59
Especificaciones de desempeño, 404
Esquema de prealimentado de la perturbación, 702
Esquemas de control PID, 679-83
Estabilidad:
en el sentido de Liapunov, 898
Estabilidad absoluta, 135
Estabilidad asintótica, 898
en general, 898-899
Estabilidad asintótica uniforme, 941
en general, 903
Estabilidad condicional, 629
Estabilidad relativa, 150, 237, 542-550
Estado, 70
Estado de equilibrio, 897-898
asintóticamente estable, 899
estable, 899
inestable, 899
Evans, W. R., 317,984
Expansión en fracciones parciales, 37-41
con MATLAB, 4 1-44
Expansión EN SERIES de Taylor, 101
Exponencial de una matriz, 723, 731-735
cálculo de, 73 1-735

F

Factor de amortiguamiento relativo, 146
líneas de constante, 412-413
Falb, I? L., 983
Figura de mérito:
de sistemas de control, 276
Filtro de entrada, 698
Forma canónica controlable, 7 11-712, 749-751
Forma canónica de Jordan, 713, 715, 756-757
Forma canónica diagonal, 712, 753-755
Forma canónica observable, 712, 751-753
Forma cuadrática, 900
Forma hermitiana, 901
Fórmula de Ackermann:
Fórmula de interpolación de Lagrange, 768
Fórmula de interpolación de Sylvester, 733, 735, 769-774
Francis, B. A., 984
Franklin, G. F., 984
Frecuencia cruce de ganancia, 545
Frecuencia de corte, 554-555
Frecuencia de cruce de fase, 545
Frecuencia de esquina, 477
Frecuencia de pico de resonancia, 482-483, 507, 549-550
Frecuencia de quiebre, 477
Frecuencia de resonancia, 482-483, 507, 549-559
Frecuencia natural amortiguada, 147
Frecuencia natural no amortiguada, 146-148
Friedland, B., 984
Fu, K. S., 984,986
Fuerza contraelectromotriz, 143
constante, 143
Fuerzas, 82
de campo, 82
de contacto, 82
Función analítica, 14
Función compleja, 14
Función con corrimiento en el tiempo, 21
Función de Liapunov, 902
Función de ponderación, 63
Función de respuesta-impulso, 63
Función de sensibilidad, 687
Función de sensibilidad complementaria, 688
Función de transferencia, 60
de elementos en cascada sin carga, 91
determinación experimental de, 567-572
expresión en términos de A, B, C y D, 163
Función de transferencia de fase mínima, 486
Función de transferencia de fase no mínima, 486-569
Función de transferencia en lazo abierto, 65
Función de transferencia en lazo cerrado, 66
Función de transferencia prealimentada, 65
Función de transferencia prealimentada de la perturbación, 701
Función de transferencia senoidal, 273,473
Función delta de Dirac, 25
Función doblete unitaria, 48

Función escalar:
definidad negativa de, 900
definidad positiva de, 900
indefinidad de, 900
semidefinidad negativa de, 900
semidefinidad positiva de, 900
Función escalón, 19-20
Función escalón unitario, 20
Función impulso, 24
Función impulso unitario, 25
Función pulso, 24

G

Gamkrelidze, R. V., 986
Ganancia proporcional, 2 15
Gantmacher, F. R., 984
Gardner, M. F., 984
Generalizados, valores característicos, 969
Generalizados, vectores característicos, 969
Gibson, J. E., 984,986
Gilbert, E. G., 984
Giroscopio:
de un solo grado de libertad, 112
González, R. C., 984
Graham, D., 984
Greenwood, J. l?, III, 984

H

Hahn, W., 984
Halmos, P. R., 984
Harbor, R. D., 986
Hazen, H. L., 1
Higdon, D. T., 984
Ho, Y. C., 985

I

Impedancia, 88
enfoque para obtener función de transferencia, 265-266
Impedancia compleja, 88
Indefinidad:
de una función escalar, 900
Índice de desempeño, 916
Inestabilidad, 899,904
Integral de inversión, 17, 34
Integral de Laplace:
límite inferior de, 26-27
Irwin, J. D., 984

J

Jayasuriya, S., 983-984

K

Kailath, T. 984
Kalman, R. E., 737, 748, 985
Kochenburger, R. J., 985
Kreindler, E., 985
Kuo, B. C., 985

L

LaSalle, J. P., 985
Lathrop, R. C., 984
Lee, C. S. G., 984
Lefschetz, S., 985
Levinson, N., 984
Ley de corrientes de Kirchhoff, 87
Ley de lazos de Kirchhoff, 87
Ley de nodos de Kirchhoff, 87
Ley de voltajes de Kirchhoff, 87
Liapunov, A. M., 897
primer método de, 897
segundo método de, 897
Línea de conversión de número-decibel, 474-475
Linealización:
de sistemas no lineales, 60, 100-105
del sistema de seguimiento hidráulico, 102-105
Luenberger, D. G., 985
Lugar geométrico de las raíces, 3 19
método, 317-318
para sistema con retraso de transporte, 360-364
para sistemas con realimentación positiva, 352-357
reglas generales para construir, 330-335
Lugares geométricos de ángulo de fase constante (círculos N), 558-560
Lugares geométricos de las raíces circulares, 329-330, 385-386, 390-391
Lugares geométricos de las raíces de ganancia constante, 357-358
Lugares geométricos de magnitud constante (círculos M), 557-558
Lur'e, A. I., 985

M

Magnitud del pico de resonancia, 549-550
Manejador de seguimiento, 142
Mapeo conforme, 543-544, 584-586, 597
Margen de estabilidad, 687-688
Margen de fase, 544-549
contra, 5.52
Margen de ganancia, 544-549
Masa, 81
Matheson, J. E., 984
MATLAB:
algoritmo de graficación automática, 967
análisis de respuesta transitoria con, 160-178
colores disponibles, 967
comando de doble asignación, 969
conversión de tiempo continuo a tiempo discreto, 98 1

enunciado de doble asignación, 968
escalamiento manual de los ejes, 967
escritura de texto en los diagramas, 644, 966
expansión en fracciones parciales con, 979
graficación de curvas múltiples, 965
graficación de lugares geométricos de las raíces con, 338-339
graticación de trazas de Bode con, 492-504
línea que comienza con '%', 963
obtención de respuesta ante una condición inicial, 173-178
obtención de respuesta escalón unitario con, 416-417
tipos de líneas, 966
tipos de puntos, 966
uso del operador dos puntos, 963-964
uso del operador punto y coma, 963-964
variables en, 963
Matriz:
cancelaciones en la transferencia, 775-778,785
defectuosa, 969
Matriz de controlabilidad, 738,790
Matriz de entrada, 72
Matriz de estado, 72
Matriz de ganancias de realimentación del estado, 788
enfoque de MATLAB para determinar, 808-810
Matriz de ganancias del observador de estado:
enfoque de sustitución directa para obtener, 82 1
Matriz de observabilidad, 744
Matriz de salida, 72
Matriz de Schwartz, 3 ll
Matriz de transferencia, 76, 163
cancelaciones en la, 775-778, 875
Matriz de transmisión de estado, 725-727
propiedades de, 726-727
Matriz de transmisión directa, 72
Matriz jacobiana, 905
Mecanismo de seguimiento, 2
Melbourne, W. G., 985
Método de interpolación de Sylvester, 733
Método de Krasovskii, 905-907
Método de la transformada de Laplace:
solución de ecuaciones diferenciales mediante el, 44-46
Minorskyk, N., 1,985
Mishchenko, E. F., 986
Mitter, S. K., 986
Modelo matemático, 57
Modelos matemáticos no lineales:
aproximación lineal de, 101-105
Momento de inercia equivalente, 145-146, 191-193
Monopoli, R. V., 985
Moore, J. B., 983
Motor de cd sin escobillas, 141

N

Narendra, K. S., 985
Newton, 82
Nichols, N. B., 986
No linealidad de la ley cuadrática, 59
No linealidad de saturación, 59
No linealidad de zona muerta, 59
No unicidad:
de un conjunto de variables de estado, 717-718
Noble, B., 985
Norma:
de un vector, 967
de una matriz, 967
Norma euclidiana, 898
Nyquist, H., 1, 523, 985

0

Observabilidad, 737, 743-749
completa, 743-744
Observabilidad completa, 782-783
condiciones para, 745-747
en el plano s, 745
Observación, 8 13
Observación del estado:
condiciones necesarias y suficientes para, 816
Observador, 8 13
Observador de estado, 8 13-8 14
diseño con MATLAB, 837-843
Observador de estado de orden completo, 813-822
diseño de, 8 16-822
Observador de estado de orden mínimo, 8 13, 830-834
Observador de estado de orden reducido, 813
Observador de orden mínimo, 813, 830-834
sistema de control mediante la realimentación del estado observado con, 836-837
Observador de orden reducido, 813
Octava, 475
Ogata, K., 985-986
Op amp, 263
Orden exponencial, 18

P

Perturbación, 3
externa, 3
interna, 3
rechazo a, 686
respuesta al par de, 221-222, 224-225
Peso, 81

Phillips, C. L., 986
Pico de resonancia:
contra, 483-484
Planta, 2
Polinomio auxiliar, 236
Polinomio característico, 75
Polinomio de Lagrange, 768
Polinomio mínimo, 730-731, 762-765
Polo, 16
de orden n, 16
simple, 16
Polos complejos conjugados:
cancelación no deseable, 638-639
Polos dominantes en lazo cerrado, 230-23 1
Polos reguladores, 788
Pontryagin, L. S., 986
Powell, J. D., 984
Primer método de Liapunov, 897
Principio de dualidad, 748-749
Principio de superposición, 58
Problema de control óptimo cuadrático, 920-924
solucionar con MATLAB, 925-934
Problema de optimización de parámetros, 917-918
Problema de ubicación de polos, 788
solucionar con MATLAB el, 798-803
Proceso, 3
Proceso de'reconocimiento de patrones, 4
Punto de desprendimiento, 323
Punto de ingreso, 328
Punto de ramificación, 64
Punto ordinario, 16
Punto suma, 64
Puntos singulares, 16

R

Raíces características, 714
Razón de corte, 555
Razón de par a inercia, 193
Razón de par al cuadrado a inercia, 193
Razón de restablecimiento, 216
Reacción de punto de ajuste, 679
Realimentación de velocidad, 156-157, 637, 700
Realimentación del estado, 788
Red de adelanto, 273,406
Red de atraso, 273,406
eléctrica, 440-441
mecánica, 439
Red de atraso-adelanto, 406
eléctrica, 441-442
mecánica, 440
Redes con puentes en T, 639
Reglas de sintonización, 669
Reglas de sintonización de Ziegler-Nichols, 670-679
primer método, 670-672
segundo método, 672-674
Rekasius, Z., 986
Relevador de acción inversa, 244
Relevador de tipo de laminillas, 243
Relevador del tipo sin laminillas, 243
Relevador neumático, 243
de acción inversa, 244
de tipo con laminillas, 243
de tipo sin laminillas, 243
Representación del espacio de estados:
de sistema de n-ésimo orden, 76-81
en formas canónicas, 711-714
Residuo, 37
Resistencia:
de flujo de líquidos, 92
de flujo laminar, 93
de flujo turbulento, 93
de sistema de presión, 239
de sistema térmico, 98
Resistencia de flujo del gas, 239
Resistencia térmica, 98
Respuesta ante una condición inicial:
enfoque de MATLAB para obtener, 173-178
Respuesta del sistema ante una condición inicial:
enfoque de MATLAB para obtener, 810-813
Respuesta en estado estable, 135
Respuesta en frecuencia, 47 1
correlación entre respuesta escalón y, 550-554
Respuesta en frecuencia en lazo cerrado:
para sistemas con realimentación no unitaria, 563-564
Respuesta escalón, 760
de sistema de segundo orden, 146-151
Respuesta escalón unitario:
de sistema de primer orden, 136-138
de sistema de segundo orden, 146-155
obtenida usando MATLAB, 161-166
Respuesta impulso, 760
de sistema de segundo orden, 158-160
enfoque de MATLAB para obtener, 166-170
Respuesta impulso unitario:
de sistema de primer orden, 138-139
de sistema de segundo orden, 158-160
Respuesta rampa, 760-761
enfoque de MATLAB para obtener, 17 1-173
Respuesta rampa unitaria:
de sistema de primer orden, 137-139
de sistema de segundo orden, 171-173
obtenida usando MATLAB, 171-173
Respuesta senoidal, 269

Respuesta transitoria, 135
análisis con MATLAB, 160-178
de sistema de orden superior, 228-230
especificaciones de la, 150- 152
Retraso de transporte, 487-488, 508, 527, 529
aproximación de, 364
características del ángulo de fase de, 488
Rideout, V. C., 986
Robot industrial, 4-5
Rozenvasser, E. N., 985

S

Sarachick, P. E., 985
Sauer, C. G., Jr., 985
Schultz, D. G., 986
Segundo método de Liapunov, 897
optimización de un sistema de control mediante, 917
Semidefinidad negativa:
de función escalar, 900
Semidefinidad positiva:
de función escalar, 900
Sensibilidad:
ante errores de modelado, 686
Sensor, 213, 218-219
ruido, 689
Señal intermitente, 102
Señales, 64
Servomotor de cd, 142
control de armadura de, 142- 145
control de campo de, 142
Servomotor hidráulico, 102-105, 257-258
Sintonización del controlador, 670
Sistema, 3, 897
de tipo 0, 275, 280, 570
de tipo 2, 275, 280, 570
de tipo 1, 275, 280, 570
Sistema con realimentación positiva:
lugares geométricos de las raíces para un, 352-357
traza de Nyquist para un, 593-596
Sistema con un control I-PD, 698
Sistema condicionalmente estable, 358-359, 535
Sistema criticamente amortiguado, 147-148
Sistema de calefacción de aire, 122-123
Sistema de control con modelo de referencia, 912-914
Sistema de control del nivel de líquido, 10, 140-141, 200-204, 219-221, 287-289
Sistema de control de posición, 189- 190
Sistema de control de posición de satélite, 62
Sistema de control de realimentación, 6-7
Sistema de control de robot, 4
Sistema de control de tensión, 12
Sistema de control de trafico, 7
Sistema de control de velocidad, 3,284, 304-305
Sistema de control del péndulo invertido, 803-810, 852-861, 891-893, 952-957
diseño con MATLAB, 808-810, 852-861, 891-893
Sistema de control en lazo abierto, 7
desventajas de, 10
ventajas de, 10
Sistema de control en lazo cerrado, 7
Sistema de control industrial, 212
Sistema de control mediante la realimentación del-estado observado, 825
Sistema de control PID:
básico, 679-680
con filtro de entrada, 697
de dos grados de libertad, 689
Sistema de control PID con dos grados de libertad, 689
Sistema de fase mínima, 486-487
Sistema de ingenierfa organizacional, ll
Sistema de lazos múltiples, 536
estabilidad de, 528-529
Sistema de presión, 239-241
Sistema de presión neumática, 297-299
Sistema de primer orden, 136
respuesta escalón unitario de, 136-138
respuesta impulso unitario de, 138-139
respuesta rampa unitaria de, 137-139
Sistema de seguimiento de tipo 1:
diseño de, 843-863
diseño de ubicación de polos de, 843-852
Sistema de seguimiento, 142-145
con realimentación de velocidad, 156-158
Sistema de seguimiento hidráulico, 127-128, 305-306
Sistema de segundo orden, 141
curvas de respuesta escalón unitario de, 149
especificación de la respuesta transitoria de, 152-156
respuesta escalón de, 146- 15 1
respuesta impulso de, 158-160
Sistema de suspensión automotriz, 113-115
Sistema de suspensión de motocicleta, 114-115
Sistema de tanque de agua cónico, 132
Sistema de termómetro, 123- 124
Sistema de tipo 0, 275, 490
curva de magnitud logarítmica para, 569-570
traza polar de, 5 11
Sistema de tipo 2, 275, 492
curva de magnitud logarítmica para, 569-570
traza polar de, 5 ll

Sistema de tipo 1, 275, 490
curva de magnitud logarítmica para, 569-570
traza polar de, 5 ll
Sistema de trazado, 12
Sistema del péndulo invertido, 85-87, 803-810, 952-957
Sistema diferenciador, 188
Sistema empresarial, 6
Sistema lineal, 58
Sistema lineal e invariante con el tiempo, 58
Sistema lineal variante con el tiempo, 58
representación en MATLAB de, 160- 16 1
Sistema no amortiguado, 147-148
Sistema no lineal, 59
Sistema sobreamortiguado, 147-149
Sistema vibratorio mecánico, 178-187, 196-198
simulaciones en computadora, 182- 187
Sistemas de control de temperatura, 4-6
Sistemas de fase no mínima, 359-360,486-487,575
Sistemas de nivel líquido, 92-96, 120-122
Sistemas hidráulicos, 238, 255-256
ventajas y desventajas de, 256
Sistemas neumáticos, 238-239
Sistemas térmicos, 96-98-100
Sistemas tipo regulador:
diseño mediante ubicación de polos, 803-813
Sivan, R., 983
Slug, 81
Smith, R. J., 986
Sobrepaso máximo:
contra, 155
en respuesta escalón unitario, 151, 153
en respuesta impulso unitario, 160
Sobrepaso máximo en porcentaje, 151-153
Staats, P. F., 986
Strang, G., 986

T

Tacómetro, 637
realimentación, 156-157, 637, 700
Tannenbaum, A., 984
Teorema de Cauchy, 584-585
Teorema de Cayley-Hamilton, 729-730,762
Teorema de diferenciación compleja, 32
Teorema de diferención real, 27
Teorema de Euler, 16-17
Teorema de extensión analítica, 19
Teorema de integración real, 3 1
Teorema del mapeo, 526, 584-587
Teorema del residuo, 586
Teorema del valor final, 29-30
Teorema del valor inicial, 30
Teorema principal de la estabilidad de Liapunov, 902-903, 940-942
Teoría de control moderna, 70
Teoría del control convencional, 70
Thompson, F. T., 984
Tiempo de asentamiento, 151, 153-155
contra, 155
Tiempo de levantamiento, 150, 152
Tiempo de retardo, 150, 67 1
Tiempo derivativo, 217
Tiempo integral, 2 16
Tiempo muerto, 360
Transductor eléctrico-neumático, 3 14
Transferencia de calor por conducción, 98
Transferencia de calor por convección, 98
Transformación:
de función de transferencia al espacio de estados, 718
Transformación inversa de Laplace, 17
Transformada de Laplace, 17
cambio de escala en tiempo, 26
de la función con corrimiento, 21
de la función escalón, 19
de la función exponencial, 19
de la función impulso, 24
de la función periódica, 50-5 1
de la función pulso, 24
de la función rampa, 20
de la función senoidal, 20
existencia de la, 18
propiedades de, 36
tabla de, 22-23
Transformada inversa de Laplace, 35
método de expansión en fracciones parciales para obtener, 35-44
Trayectoria de Nyquist, 526
Trayectoria de Nyquist modificada, 541-542
Traza de la magnitud logarítmica contra la fase, 519-521
Traza de Nyquist, 504
de sistema con realimentación positiva, 593-596
de sistema definido en el espacio de estados, 517-518
Traza logarítmica, 473
Traza polar, 504
Traza polar de, 5 ll
Traza polar inversa, 537-540
Trazas de Bode, 473
de factores cuadráticos, 480-482
de factores de primer orden, 476-479
de sistema definido en el espacio de estados, 502
error en la expresión asintótica de, 478
graficar con MATLAB, 492-504
procedimiento general para graficar, 483-484
Trazas de Nichols, 520
Tren de engranes, 191
Truxal, J. G., 986

U

Ubicación de polos, 787-797
  diseño de un sistema mediante, 787-797
  pasos de diseño para, 792-795
  técnica de, 787
Unidades de fuerza, 82

V

Valkenburg, M. E., 986
Valor característico, 714-968
  generalizado, 969
  invariancia del, 7 17
Valor del pico de resonancia, 482-483
Válvula:
  con sin traslape, 257
  con sobretraslape, 257, 301
  con subtraslape, 257,301
Válvula con **actuador** neumático, 248-250
Válvula con diafragma neumático, 296-297
Válvula con sobretraslape, 257
Válvula de carretes con sobretraslape, 257,301
Válvula de devanados:
  modelo matemático linealizado de, 105
Válvula piloto, **102, 256-257**
Válvula sin traslape, 257
Van Landingham, H. F., 986
Variable compleja, 14
Variable controlada, 2
Variable de estado, 70
Variable manipulada, 2
Vector **característico,** 968-969
  generalizado, 969
Vector de error, 815
Vector de estado, 7 1
Vectores:
  dependencia lineal de, 736
  independencia lineal de, 735-736

W

Wadel, L. B., 986
Waltz, M. D., 986
Watt, J., 1
Wilcox, R. B., 986
Willems, J. C., 986
Wojcik, C. K., 986
Wonham, **W.** M., 986

Z

Ziegler, J. G., 986

Referencia rápida para los programas de MATLAB

Programa MATLAB para obtener	**Número del programa MATLAB**
Respuesta escalón	4-1, 4-2, 4-3, 4-11, 4-13, 5-1, 5-2, 6-8, 7-1, 7-4, 9-1, 9-2, 9-10, 9-16, 10–1, 10-2, 12-9, 12-11, 12-15, 13-5, 13-7.
Respuesta impulso	4-4, 4-5, 4-6, 4-14.
Respuesta rampa	4-7, 4-8, 7-3, 9-1, 9-2, 9-11, 9-17.
Respuesta ante condiciones iniciales	4-9, 4-10, 12-4.
Conversiones de tiempo continuo a tiempo discreto	4-12.
Lugar geométrico de las raíces	6-1, 6-2, 6-3, 6-4, 6-5, 6-6, 6-7, 6-9, 6-10, 6-11, 6-12, 6-13, 6-14, 7-2.
Trazas de Bode	8-1, 8-2, ‘8-3, 8-4, 8-5, 8-6, 8-7, 8-14, 8-15, 8-16, 9-3, 9-6, 9-7, 9-8, 9-9, 9-12, 9-13, 9-14.
Traza de Nyquist	8-8, 8-9, 8-10, 8-11, 8-12, 8-13, 8-17, 8-18, 8-19, 8-20, 8-21, 9-4, 9-5, 9-15.
Solución a problemas de ubicación de polos	12-1, 12-2, 12-3, 12-5, 12-10, 12-12, 12-13, 12-15.
Solución a un problema de diseño de un observador	12-5, 12-7, 12-8, 12-14.
Solución a un problema de control óptimo cuadrático	13-1, 13-2; 13-3, 13-4, 13-6.
Transformación de un modelo matemático	ll-l, 11-2, 11-3.

Comandos de MATLAB que se usan para obtener

Respuestas en frecuencia

```
step(num,den)
step(num,den,t)
Step(A, B, C,D)
[y,x,t] = step(num,den,t)
[y,x,t] = step(A,B,C,D,iu)
[y,x,t] = step(A,B,C,D,iu,t)
```

Respuestas impulso

```
impulse(num,den)
impulse(num,den,t)
impulse(A,B,C,D)
[y,x,t] = impulse(num,den)
[y,x,t] = impulse(num,den,t)
[y,x,t] = impulse (A,B,C,D)
[y,x,t] = impulse(A,B,C,D,iu)
[y,x,t] = impulse(A,B,C,D,iu,t)
```

Gráficas del lugar geométrico de las raíces

```
rlocus(num,den)
rlocus(num,den,K)
rlocus(A,B,C,D)
rlocus(A,B,C,D,K)
[r,K] = rlocus(num,den)
[r,K] = rlocus(num,den,K)
[r,K] = rlocus(A,B,C,D)
[r,K] = rlocus(A,B,C,D,K)
```

Expansión de fracciones parciales

```
[r,p,k] = residue(num,den)
[num,den] = residue(r,p,k)
```

Trazas de Bode

```
bode(num,den)
bode(num,den,w)
bode(A,B,C,D)
bode(A,B,C,D,iu)
[mag,phase,w] = bode(num,den,w)
[mag,phase,w] = bode(A,B,D,iu,w)
w = logspace(d1 ,d2,n)
magdB = 20*log1 0(mag)
```

Trazas de Nyquist

```
nyquist(num,den)
nyquist(num,den,w)
nyquist(A,B,C,D)
nyquist(A,B,C,D,iu)
nyquist(A,B,C,D,iu,w)
[re,im,w] = nyquist(num,den)
[re,im,w] = nyquist(num,den,w)
[re,im,w] = nyquist(A,B,C,D,iu)
[re,im,w] = nyquist(A,B,C,D,iu,w)
```

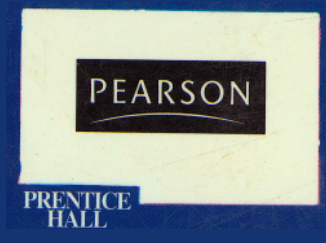
Control óptimo cuadrático

```
K = lqr(A,B,Q,R)
[K,P,E] = lqr(A,B,Q,R)
```

Transformación de modelos matemáticos

```
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den)
[num,den] = ss2tf(A, B,C, D)
[num,den] = ss2tf(A,B,C,D,iu)
[NUM,den] = ss2tf(A,B,C,D,iu)
```

Transformaciones de tiempo continuo a tiempo discreto

```
[G,H] = c2d(A,B,Ts)
```

ISBN 970-17-0048-1